Laboratorio 2: Hidrostática. Principio de Arquímedes y relación presión-altura

Física experimental II. Dpto. de Física. Fac. Cs. Exactas. UNLP

28 de agosto de 2021

Resumen

Vamos a verificar el principio de Arquímedes con un arreglo experimental casero. Además, utilizaremos el barómetro del teléfono celular para determinar la densidad del aire a partir de la variación de la presión atmosférica con la altura.

[1]

[1]Detalle de decoración en las paredes de la Alhambra, conjunto monumental islámico del sXIV ubicado en Granada, España. El arte islámico es un exponente típico del *horror vacui*, que en la plástica se manifiesta como la tendencia a rellenar cada espacio disponible de la obra, sin dejar zonas vacías.

1. Introducción

Los tres estados o fases de la materia accesibles en condiciones cotidianas son: sólido, líquido y gaseoso[2] (o lo que se come, lo que se toma y lo que se aspira, diría un profesor de la casa) siendo los dos últimos considerados fluidos. La presentación de una sustancia en un estado particular depende de la presión, la temperatura y de las interacciones características entre los elementos constituyentes de la misma (átomos, iones o moléculas). En general, cuando la energía térmica supera a la energía de interacción, el material pierde cohesión y se vuelve fluido.

- Los materiales **sólidos** conservan una geometría estable *i.e.* la distancia entre sus elementos constituyentes es constante.
- Los **líquidos** conservan su volumen pero no mantienen una forma fija (toman la forma del recipiente que los contiene). Al igual que los sólidos no son fácilmente compresibles, su volumen puede modificarse sólo mediante altas[3] presiones.
- Los **gases** por su parte, no tienen forma ni volumen fijos, se expanden hasta llenar el recipiente que los contiene. Sus constituyentes interactúan débilmente, por lo que la distancia promedio entre ellos es fuertemente dependiente de la presión y la temperatura.

En cuanto al estudio de los fluidos, se habla de **hidrostática** cuando estos están en reposo; y de **hidrodinámica** cuando hacen honor a su nombre y fluyen. De las magnitudes utilizadas en hidrostática, la presión es la más importante. Vamos a repasar brevemente el desarrollo histórico del concepto de presión para luego describirlo en términos actuales.

1.1. Historia de la nada

1.1.1. *Horror vacui*, el miedo al vacío [1]

La filosofía natural premoderna afirmaba que la naturaleza aborrece el vacío, haciendo de este *horror vacui* un principio absoluto causante, entre otras cosas, de los fenómenos hidrostáticos como la elevación de agua por succión. Uno de los principales promotores de esta noción fue Aristóteles que, en el libro Δ de su obra *Φνσικής Ακροάσεωζ* (*Physiks Akroáses*, conocida simplemente como Física, sIV AEC) argumenta que la existencia del vacío se contradice con la del movimiento: *En el vacío, nadie podría decir por qué un objeto puesto en movimiento se detendría en algún lado (...). Así que un cuerpo estaría en reposo, o bien en movimiento infinito a menos que algo más poderoso se interponga* [2][4]. Esta refutación del vacío iba dirigida especialmente a los atomistas encabezados por Demócrito. El atomismo antiguo, que postulaba que la naturaleza estaba formada por átomos sólidos e impenetrables[5] y vacío es, por su parte la fuente

[2]Existen otros estados posibles como el plasma (presente en las descargas eléctricas a través de gases), el condensado de Bose-Einstein y las estrellas de neutrones.

[3]En términos de las presiones accesibles en laboratorio.

[4]Traducción propia. Tener en cuenta que la dinámica aristotélica consideraba que el estado natural de los objetos era el reposo por lo que siempre debía haber una causa, natural o bien violenta para todos los movimientos.

[5]De ahí la palabra átomo del griego *ατομον*, *atomon*, donde *a* es sin y *tomon* significa corte o división.

clásica de todas las corrientes que luego defendieron la existencia del vacío. Pero la postura dominante sería la de Aristóteles y el atomismo se mantendría como una corriente marginal. No sólo Aristóteles alimentó el antivacuismo[6]. También Platón, los estoicos y la mayoría de las escuelas antiguas contribuyeron a esa cuasi unanimidad que se mantuvo hasta la Edad Media y la incipiente Edad Moderna. Desde ese punto de vista fueron interpretados ciertos fenómenos tales como la succión que ejerce una ventosa y la dificultad en separar un fuelle si no se permite la entrada del aire. Todas estas observaciones, acompañadas de rudimentarios experimentos, parecían demostrar que la naturaleza se resiste a tolerar la ausencia de aire; o sea, que la naturaleza aborrece el vacío.

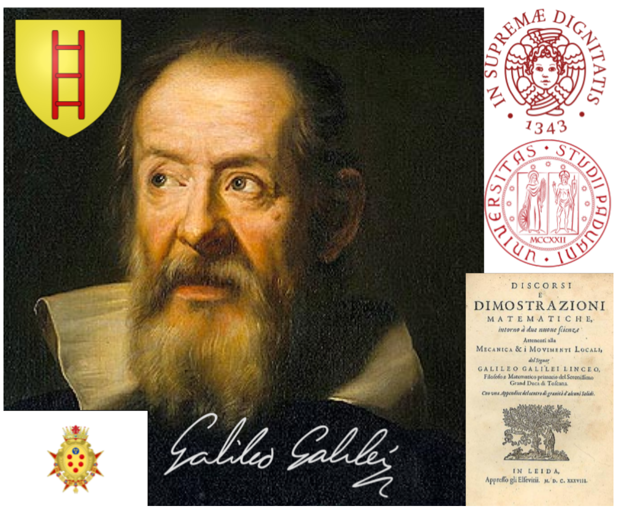

Figura 1: Galileo Galilei (1564-1642) Universidades de Pisa y Padua. Astrónomo, físico e ingeniero toscano. Se lo considera el padre de la física, del método científico y de la ciencia moderna. Fue uno de los principales impulsores del modelo heliocéntrico, lo que le costó la censura de la iglesia.Insertos: escudo de armas de Galielo (ar. izq.), bandera del Gran Ducado de Toscana (ab. iz.), escudos de la Universidad de Pisa (ar. der.) y la Universidad de Padua (cen. der.). Portada de *"Discorsi e dimostrazioni matematiche, intorno à due nuove scienze"* (Discursos y demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias, 1638).

Figura 2: Giovanni Battista Baliani (1582-1666). Político, militar, ingeniero y científico genovés. Fue gobernador de Savona y capitán de los arqueros de la República de Génova. Por más de 25 años, mantuvo correspondencia con Galileo Galilei acerca de las más novedosas teorías y experimentos científicos del momento. Fue el primero en plantear el concepto de que la atmósfera era un "mar de aire". **Insertos**: Bandera de la República de Génova y portada de *De motu naturali gravium solidorum et liquidorum* (El movimiento natural de sólidos y líquidos pesados, 1646).

[6]No confundir con antivacunismo, que no hubiera tenido sentido antes de existir la vacunas... no es que ahora tenga sentido tampoco.

Figura 3: Evangelista Torricelli (1608-1647) Universidad de Pisa. Físico romano. Fue discípulo de Galielo los últimos meses de la vida de éste. Inventó el barómetro de mercurio y formalizó las bases del concepto de presión atmosférica a partir de los experimentos realizados con el dispositivo. Además, realizó aportes a la cinemática, dinámica, óptica y astronomía. En su honor se definió la unidad de presión torr, originalmente equivalente a la presión generada por 1 mm de Hg en la superficie terrestre. Hoy el torr está redefinido como 1 Torr = 0,999999857... mmHg. Insertos: bandera del Gran Ducado de Toscana, escudo de la Universidad de Pisa. Página de *"Lezioni accademiche"* con el esquema del primer barómetro.

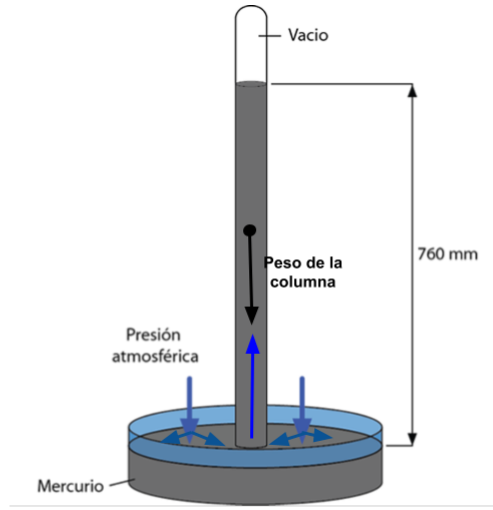

Figura 4: Barómetro de Torricelli. Se vierte mercurio en un tubo cerrado en un extremo. Se tapa el extremo abierto y se invierte el tubo para luego sumergir ese extremo en un recipiente con mercurio. La presión atmosférica sobre el mercurio expuesto eleva una columna del metal en el tubo vacío hasta que el peso de la misma es igual a la fuerza hacia arriba en su base. En el extremo superior del tubo se genera vacío. Así, la altura de la columna depende de la presión atmosférica absoluta. La definición original de la unidad atmósfera equivalía a 760 mm de mercurio.

1.1.2. Galileo, Baliani, Torricelli, la cuerda de agua y el mar de aire

El italiano[7] Galileo Galilei (1564-1642, fig. 1), junto con sus discípulos Evangelista Torricelli (1608-1647, fig. 3) y Giovanni Baliani (1582-1666, fig. 2), se dedicaron también al dilema del vacío. Mediante algunos experimentos y los testimonios de técnicos hidráulicos de la época, Galileo conocía bien la imposibilidad de elevar por succión una columna de agua de más de 10 m de altura. El rechazo de la naturaleza hacia el vacío parecía tener un límite [3], pero Galileo atribuyó este comportamiento a la ruptura de la columna de agua por su propio peso, de la

[7] Sin olvidar que la nacionalidad italiana no existió como tal hasta el sXIX. Galileo nació en Pisa.

misma forma que le ocurriría a una cadena o soga sostenida desde arriba a partir de un cierto largo. El toscano mantuvo esta interpretación hasta su muerte a pesar de una iluminada carta que en 1630 le envió Baliani sugiriendo la relación con la presión atmosférica. Las bombas no succionaban realmente sino que una fuerza finita empujaba la columna de agua desde abajo. No se sabe si Galileo ignoró la carta o nunca llegó a leerla.[4]
Después de la muerte de Galilei, Torricelli, que había pasado con él los últimos meses de vida[8], continuó con los experimentos. Alrededor del año 1644 ejecutó su famosa experiencia en la que vertió mercurio en un tubo de vidrio cerrado en un extremo y lo invirtió tapando la boca del tubo con el dedo[9]. Con esto generó vacío en el extremo cerrado. Luego colocó el tubo en un recipiente con más mercurio y midió la altura de la columna. Comprobó que la columna de mercurio (13,6 veces más pesado[10] que el agua) tenía una altura de aproximadamente 760 mm= $\frac{10000}{13,6}$mm *i.e.* 13,6 veces menor a la altura máxima de una columna de agua (fig. 4). Esto le sirvió para reforzar su teoría de que estamos sumergidos en un mar de aire sometidos a la presión generada por el peso de la atmósfera.

1.1.3. Y en eso llegó Pascal

Con base en repetir los experimentos de Torricelli, el francés Blaise Pascal (1623-1662, fig. 5) dedujo que si la atmósfera tiene un peso finito, su espesor debía ser también finito y, por lo tanto, la presión ejercida por ésta debía ser menor a mayores alturas (con menos atmósfera encima). Para comprobarlo decidió repetir el experimento del italiano a diferentes alturas del monte *Puy de Dôme*. Los resultados fueron consistentes con sus hipótesis.
A partir de 1647 y condensando los trabajos previos de Arquímedes y Torricelli, Pascal generó abundante literatura sobre el vacío y el peso del aire atmosférico. En otro de sus experimentos, por ejemplo, tapaba la boca de una jeringa con el dedo y movía el pistón para succionar. En base al dolor que esto le generaba, comprobó así que la presión de succión no dependía del tamaño de la jeringa (el dolor era siempre el mismo). Así, en su obra *Expériences nouvelles touchant le vide* (Nuevas experiencias sobre el vacío) se encargó de refutar enérgicamente las teorías antivacuísticas sobre qué contenía el volumen aparentemente vacío del barómetro de Torricelli. De manera enérgica descartó que ese espacio estuviera relleno con aire que entraba por o estaba alojado en poros del vidrio ni en los espacios entre los átomos del líquido. Tampoco era una pequeña porción de aire que ingresaba accidentalmente y que algunos afirman podría diluirse hasta llenar todo el universo antes de admitir que existe el vacío. En resumen, descarta que ese espacio estuviera relleno de cualquier material y que, por ende, el vacío existía y era relativamente simple de generar.[4]

1.1.4. The long and winding road

Así, para finales del sXVII se enfrentaban dos propuestas: el rechazo de la naturaleza al vacío, teoría animista que no explicaba cómo la naturaleza manifestaba su rechazo y la presión atmosférica, teoría mecanicista que proponía una relación causal a partir del peso del aire.
La existencia del vacío siguió siendo discutida por grandes nombres de la comunidad científica

[8] Por lo que es posible que él sí haya leído la carta de Baliani.
[9] No lo hagan en casa, niñes, el mercurio es venenoso.
[10] En términos actuales, el mercurio es 13,6 veces más denso que el agua

Figura 5: Blaise Pascal (1623-1662) Matemático, físico, filósofo, teólogo católico y apologista francés. Sus contribuciones a la matemática y a la historia natural incluyen el diseño y construcción de calculadoras mecánicas, aportes a la teoría de la probabilidad, investigaciones sobre los fluidos y la aclaración de conceptos tales como la presión y el vacío. Después de un trastorno depresivo y una experiencia religiosa profunda en 1654, Pascal se dedicó también a la filosofía y a la teología. La unidad de presión del SI lleva su nombre (1 Pa= 1 N/m^2. Insertos: bandera del Reino de Francia, escudo de armas de Pascal y portada de "*Expériences nouvelles touchant le vide*".

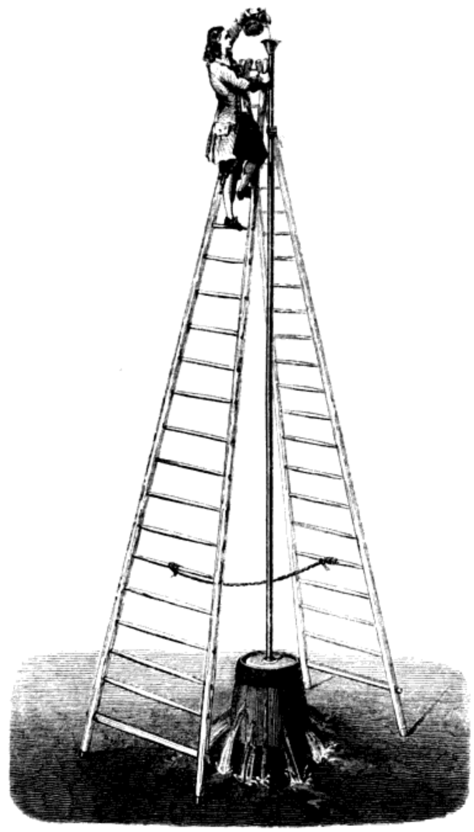

Fig. 45.—Hydrostatic paradox. Pascal's experiment.

Figura 6: Barril de Pascal. Es un experimento atribuido a Pascal en el que, para demostrar que la presión no depende del peso del fluido sino de la altura de la columna, conectó un barril a un tubo vertical que llenó de agua hasta que el barril estalló. No hay registros de este experimento en los escritos de Pascal, pero se lo asocia a él desde el sXIX.

como Descartes[11] durante décadas. Y se sostenían objeciones como que el vacío iba en contra del sentido común [12], que el espacio estaba lleno de una materia desconocida e imperceptible o que si la luz era corpuscular entonces llenaba el vacío y que, si era una onda, no podría viajar

[11]Descartes visitó a Pascal en 1647 y se fue luego de dos días discutiendo sobre el vacío para luego escribir en una carta a Huygens: “tiene demasiado vacío en la cabeza”

[12]Recordemos que para el sentido común, la Tierra es plana.

por el mismo[13].
Cuando el británico Isaac Newton publicó los *Principia* en 1687, en donde presenta su ley de gravitación universal, una de las principales objeciones a la misma fue que proponía una interacción gravitatoria que se transmite en el vacío, sin necesidad de un medio material que conecte los cuerpos. Así es que, recién con la consolidación de la física newtoniana como paradigma en el sXVIII el concepto de vacío terminó de ser incorporado al consenso científico mundial.

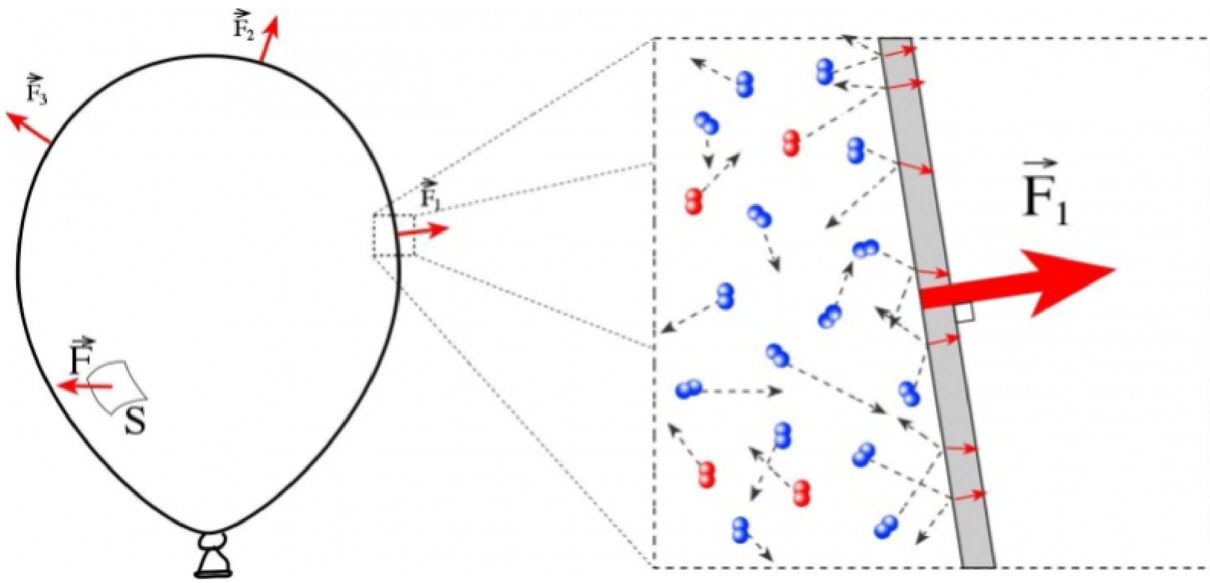

Figura 7: Interacción del aire en el interior de un globo con la pared del mismo
Las moléculas chocan constantemente contra la pared del globo generando una fuerza normal sobre cada porción de ésta debida al impulso proveniente de los choques. Para vencer la resistencia elástica del globo y poder inflarlo, es necesario generar en su interior una presión superior a la atmosférica.

1.2. Presión

La presión es una magnitud escalar que se define como la fuerza normal por unidad de área ejercida sobre la superficie de un objeto (fig. 7)[5]

$$p = \frac{dF}{dA} \tag{1}$$

Cuando un fluido está en reposo, ejerce una fuerza perpendicular a cualquier superficie en contacto con él, como la pared de un recipiente o un cuerpo sumergido en el fluido. Esto se debe a que, aunque el fluido considerado como un continuo está en reposo, las moléculas que lo componen están en constante movimiento en todas direcciones. Así, la fuerza ejercida por el fluido sobre la superficie se debe a los choques de las moléculas con ésta. Si imaginamos una superficie dentro del fluido, el fluido a cada lado de ella ejerce fuerzas iguales y opuestas sobre la superficie (de otra forma, la superficie se aceleraría y el fluido no permanecería en reposo). La fuerza por unidad de área sobre cada una de las caras determina la presión a la que se encuentra el fluido.

[13]Las ondas electromagnéticas no serían descubiertas hasta el sXIX.

La unidad del SI para la presión es el pascal (Pa): 1 Pa= 1 N/m^2. Dos unidades relacionadas, que se emplean sobre todo en meteorología, son el bar[14], igual a 10^5 Pa, y el milibar, igual a 100 Pa.
La presión atmosférica p_a es la presión ejercida por la capa de aire que rodea a la Tierra. Esta presión varía con el estado del tiempo[15] y con la altitud. El valor medio de la presión atmosférica al nivel del mar es 1 atmósfera (atm), definida exactamente como 101.325 Pa≈1 bar. En Argentina, el servicio meteorológico reporta la presión atmosférica en hectopascales (10^2 Pa).
Incluso bajo el efecto de un campo gravitatorio, la presión en cada punto de un fluido en reposo se manifiesta de igual manera en todas direcciones. Consideremos un cubo infinitesimal de fluido, el cual es tan pequeño que podemos considerarlo un punto e ignorar la fuerza de gravedad sobre él. La presión sobre cada una de sus caras debe ser igual a la presión sobre la cara opuesta. Si esto no fuera cierto, se tendría una fuerza neta sobre el cubo, éste se aceleraría y el fluido estaría en movimiento.

1.3. Densidad

[16] La densidad media ρ de un objeto se define como la relación entre su masa total m y su volumen total V

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} \tag{2}$$

Así un objeto es más denso cuando empaqueta más materia en un determinado volumen[17]. Por ejemplo, la densidad media de un recipiente vacío es menor que la de uno lleno de agua, o de cualquier otra sustancia. Se dice que un objeto es homogéneo cuando su densidad es constante en todo su volumen. Para los casos en los que esto no ocurre se define la densidad local como el límite de ρ tendiendo el volumen considerado a cero *i.e.* la derivada volumétrica de la masa

$$\rho = \lim_{V \to 0} \frac{m}{V} = \frac{dm}{dV} \tag{3}$$

Se desprende de esto que, para objetos homogéneos, la densidad es una propiedad intensiva (no depende del tamaño del sistema) cuya contraparte extensiva (su integral volumétrica) es la masa[18].
La unidad en el SI para la densidad es el kg/m^3. En ocasiones las densidades están dadas en g/cm^3 ($1\ kg/m^3 = 10^{-3} g/cm^3$). En esta tabla se presentan las densidades de varias sustancias. La tabla especifica temperatura y presión porque éstas afectan la densidad de las sustancias (aunque el efecto es pequeño para líquidos y sólidos). Observe que el aire es aproximadamente 1000 veces menos denso que el agua.
La densidad relativa ρ_r es una cantidad adimensional (como muchas cantidades relativas) definida como la relación de la densidad absoluta con alguna densidad de referencia ρ_0

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_0} \tag{4}$$

[14]Del griego $\beta\alpha\rho o\sigma$ (beta+alfa+ro+ómicron+sigma=baros), peso.
[15]Mientras el clima se define como el conjunto de condiciones meteorológicas medias de una región, se llama tiempo meteorológico a las condiciones en un determinado momento: clima es lo que se espera, tiempo lo que se tiene .
[16]Todavía se pueden encontrar docentes de cierta edad que en lugar de densidad hablan de peso específico. Esta terminología es obsoleta e inadecuada ya que la densidad es una propiedad de los cuerpos mientras que el peso (específico o no) depende del campo gravitatorio en el que están inmersos.
[17]La famosa pregunta capciosa sobre si 1 kg de plomo pesa más que 1 kg de plumas se basa justamente en la imprecisión del lenguaje coloquial en el que se suele hablar de que una sustancia es más pesada cuando se quiere decir en realidad que es más densa.
[18]Vale aclarar que si bien el concepto de densidad se extiende a la derivada de cualquier magnitud respecto a cualquier dimensionalidad espacial (densidad de carga dq/dV , densidad lineal de masa dm/dx), cuando no se agregan adjetivos se está hablando de densidad volumétrica másica que es a la que nos referimos en este apunte.

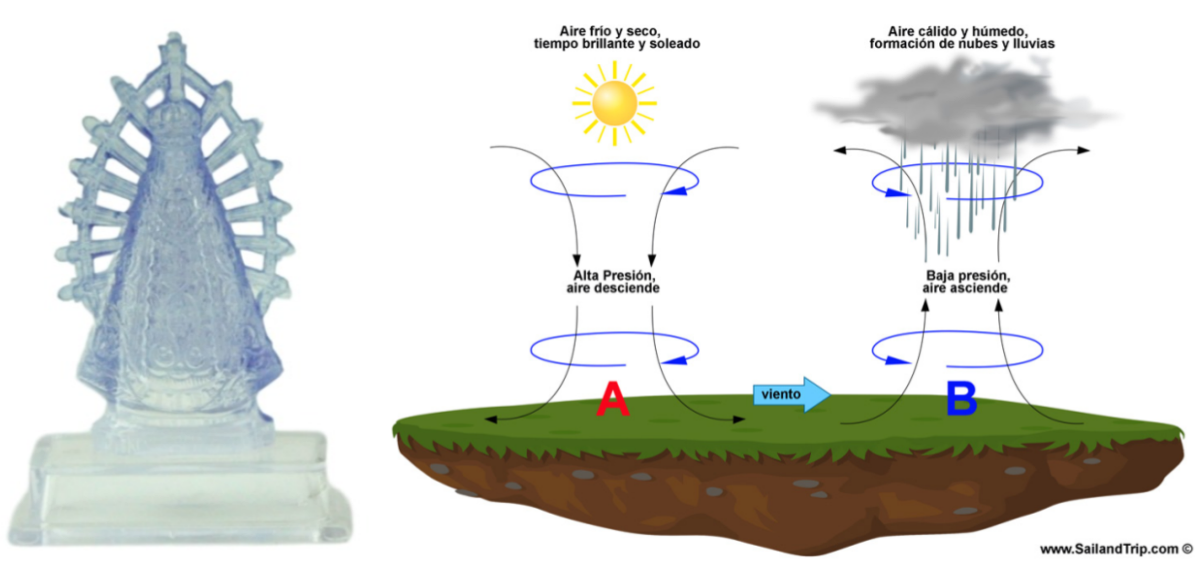

Figura 8: La lluvia, el barómetro y la virgencita. Tal vez ya sea cosa de gente mayor, pero es probable que la mayoría reconozca el objeto de la imagen de la izquierda. Se suelen llamar virgencitas del tiempo (también vienen en forma de delfín con la leyenda Recuerdo de Santa Teresita) porque se afirma que su color predice el estado del tiempo, si está azul el tiempo será bueno; en cambio si se pone rosa, es probable que llueva. Esto se debe a que están recubiertas con una capa mezcla de gel de sílice (silica gel, presentación granular del SiO_2) una sustancia incolora muy higroscópica (tiene mucha afinidad por el agua, por eso vienen bolsitas de gel en las cajas de artículos electrónicos) y una sal de cobalto que cambia de color en función de su exposición al agua.
Otra manera un poco más cuantitativa de predecir el tiempo es medir la presión atmosférica. En las regiones de baja presión, el aire tiende a elevarse al ser empujado por las regiones de mayor presión a su alrededor. Si el aire que sube es húmedo, cuando llega a las zonas altas de menor temperatura, la humedad se condensa y cae en forma de lluvia. Si el aire que sube es seco, esta elevación sólo provocará vientos fuertes. Como referencia, los días de lluvia la presión suele llegar por debajo de los 100.000 Pa.

En general, para líquidos y sólidos se utiliza ρ_0 =1000 kg/m^3=1 g/cm^3, la densidad del agua a 4°C y 1 atm de presión. De hecho, la definición de gramo que adoptó el gobierno revolucionario francés en el sXVII, cuando instauró el sistema métrico, era justamente la masa de 1 cm^3 de agua a 4°C, de manera que la masa de 1 litro de agua pura fuera igual a 1 kilogramo.[19]

1.4. Presión en función de la altura

Partiendo del principio de Pascal sobre que la presión en el seno de un fluido es mayor cuanto más grande es la cantidad de fluido por encima de ese punto, podemos deducir una relación general entre la presión p en cualquier lugar de un fluido en reposo y la altura y de esa ubicación.

[19] La idea de dividir el día en 10 horas de 100 minutos no prosperó tanto en cambio.[6]

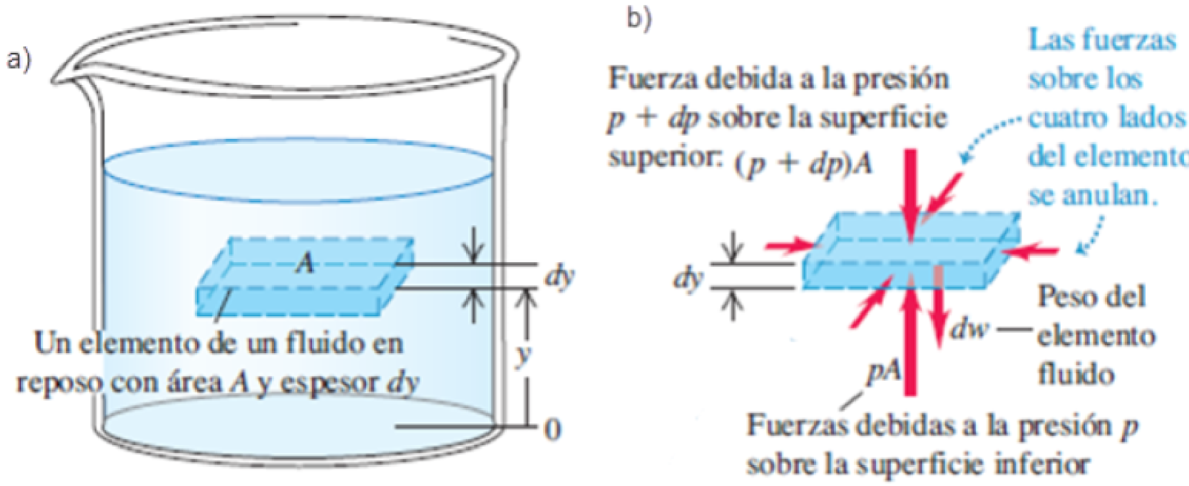

Figura 9: Elemento de fluido en reposo (a) y fuerzas actuando sobre este (b).

Supondremos que la densidad ρ del fluido y la aceleración debida a la gravedad g tienen el mismo valor en todo el fluido (es decir, la densidad es uniforme). Si el fluido está en equilibrio, cada elemento de volumen está en equilibrio. Considere un elemento delgado, de altura dy (figura [**?**]). Las superficies inferior y superior tienen área A, y están a distancias y e $y + dy$ por arriba de algún nivel de referencia (y = 0). El volumen del elemento fluido es $dV = Ady$, su masa es

$$dm = \rho\, dV = \rho A\, dy \tag{5}$$

, y por ende su peso $dw = gdm = \rho g A dy$.
Llamemos p a la presión en la superficie inferior; la componente y de fuerza total hacia arriba que actúa sobre esa superficie es $F_{y\wedge} = pA$. La presión en la superficie superior es $p + dp$, y la componente y de fuerza total (hacia abajo) sobre esta superficie es $F_{y\vee} = -(p+dp)A$. El elemento de fluido está en equilibrio, así que la componente y de fuerza total debe ser cero, por lo que deducimos

$$pA - (p + dp)A - \rho g A dy = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dy} = -\rho g \tag{6}$$

Esta relación nos dice cómo varía la presión dentro del fluido con la altura respecto a cualquier punto de referencia. El signo menos indica que la presión disminuye con un incremento de la altura o que la presión aumenta con la profundidad. Si la presión a una altura y_1 en el fluido es p_1 y a una altura y_2 es p_2, entonces podemos integrar la ecuación anterior para obtener

$$\int_{p_1}^{p_2} dp = \int_{y_1}^{y_2} \rho g\, dy \tag{7}$$

Para líquidos, en los que puede considerarse ρ=cte, en un campo gravitatorio homogéneo (g=cte), la ecuación anterior se integra fácilmente obteniendo

$$\Delta p = -\rho g \Delta y \tag{8}$$

lo que se suele conocer como **Ecuación hidrostática**.
Las dos suposiciones anteriores no son adecuadas por ejemplo para calcular la variación de presión atmosférica cuando Δy es muy grande, ya que la densidad de la atmósfera no es constante en todo su espesor (fig. 10).
Para la situación común de un líquido en un recipiente abierto, como el agua en un vaso, una

pileta, un lago o el océano, es conveniente medir las distancias desde la superficie superior. Llamemos h a la profundidad en el líquido, donde $h = y_2 - y_1$. Si y_2 es la posición de la superficie superior, entonces p_2 es la presión atmosférica p_0 en la superficie libre. Así, la presión p a una profundidad h en el fluido es

$$p = p_0 + \rho g h \tag{9}$$

Notar que la presión es la misma en dos puntos cualesquiera situados a la misma profundidad. La forma del recipiente no importa. Además, si se aumenta la presión p_0 en la superficie, la presión p a cualquier profundidad aumenta exactamente en la misma cantidad. Esto se conoce como ley de Pascal.

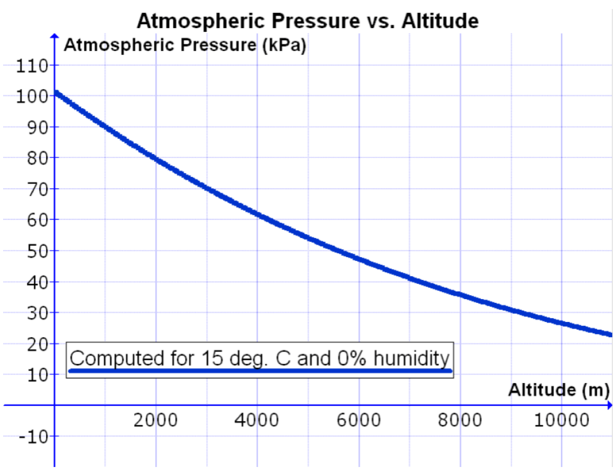

Figura 10: Presión atmosférica vs. altura respecto al nivel del mar. La densidad de la atmósfera no es constante, se va haciendo más tenue al alejarse de la superficie terrestre hasta llegar al límite con el espacio extraterrestre.

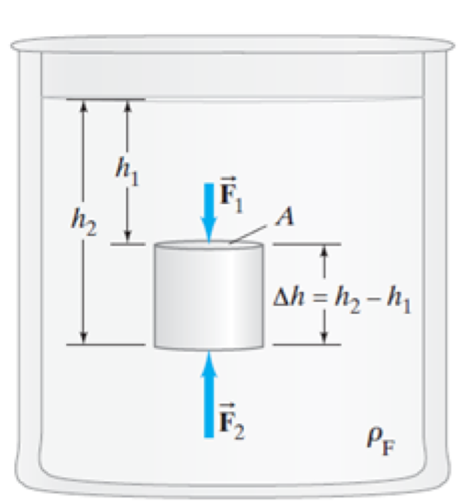

Figura 11: Objeto cilíndrico de altura Δh y base A sumergido en un fluido de densidad ρ_F. El fluido ejerce las fuerzas F_1 y F_2 sobre el cuerpo.

1.5. Algo flota en la laguna

Si se pesa un objeto sumergido en un líquido colgándolo de un dinamómetro, el peso aparente del objeto (la lectura del dinamómetro) es menor al peso antes de sumergirlo. Debe existir entonces una fuerza hacia arriba que contrarresta parte del peso. Esta fuerza, que denominaremos de flotación o empuje, tiene su origen en el hecho que la presión en un fluido se incrementa con la profundidad. La presión (ascendente) sobre la superficie del fondo de un objeto sumergido es mayor que la presión (descendente) sobre su superficie superior. Para ver este efecto, consideremos un cilindro de altura Δh y base A el cual está completamente sumergido en un fluido de densidad ρ_F (fig. 11). El fluido ejerce una presión $p_1 = \rho_F g h_1$ sobre la parte superior del cilindro. La fuerza debida a esta presión sobre la parte superior del cilindro es $F_1 = p_1 A = \rho_F g h_1 A$ y está dirigida hacia abajo. De forma similar, el fluido ejerce una fuerza ascendente sobre el fondo del cilindro igual a $F_2 = p_2 A = \rho_F g h_2 A$. La fuerza F_E resultante que ejerce el fluido sobre el cilindro está dirigida hacia arriba y tiene magnitud

$$F_E = F_2 - F_1 = \rho_F g A(h_2 - h_1) \tag{10}$$

donde $A(h_2 - h_1) = V$ es el volumen del cilindro y entonces $V\rho_F$ es la masa del líquido que ocupaba el lugar del cilindro *i.e.* la masa de fluido desplazado por el objeto sumergido

$$F_E = m_F g \tag{11}$$

por lo que el empuje termina siendo igual al peso del fluido desplazado por el objeto sumergido. Esta relación se conoce como "principio de Arquímedes" dado que fue este físico y matemático el que la presentó en su obra "Sobre los cuerpos flotantes".

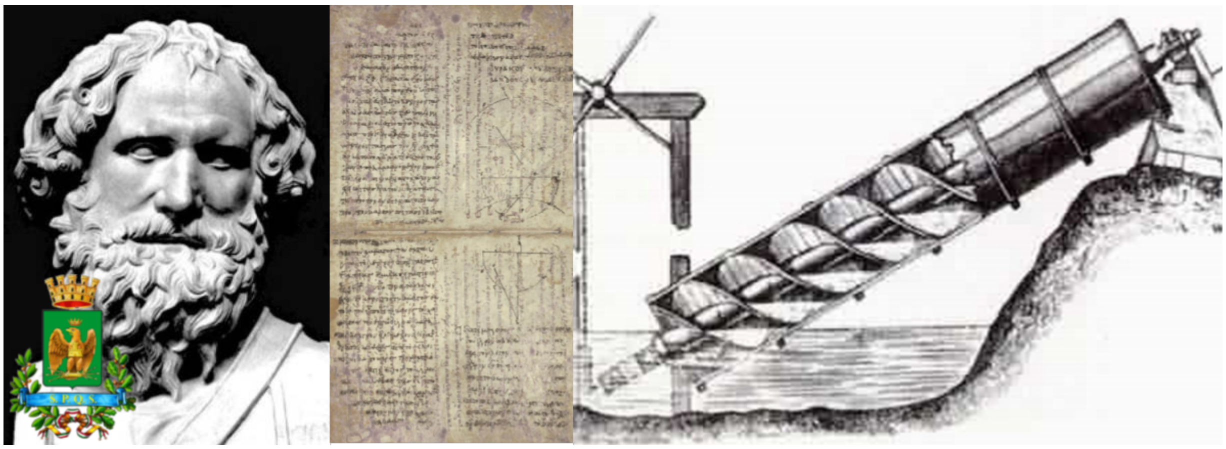

Figura 12: Arquímedes de Siracusa (287-212 AEC) físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático helénico. Considerado uno de los científicos más importantes de la antigüedad. Hizo aportes a la hidrostática, estática y explicó el principio de la palanca. Es reconocido por haber diseñado innovadoras máquinas, incluyendo armas de asedio y el tornillo que lleva su nombre (izq). Sus trabajos fueron retomados en el renacimiento por Galileo Galilei y sus discípulos. Insertos: escudo de la ciudad de Siracusa (post conquista romana) y sección de una página de "Sobre los cuerpos flotantes" obra de Arquímedes donde presenta su principio. Este libro fue descubierto en una iglesia de Turquía con textos litúrgicos escritos encima del original.

1.5.1. La gallina dijo eureka

Arquímedes de Siracusa (287-212 AEC, fig. 12) es considerado uno de los más importantes científicos de la antigüedad. Además de sus numerosos desarrollos matemáticos, era un inventor prolífico. Cuando el ejército romano quiso tomar la ciudad por asalto en 212 AEC, los métodos de defensa diseñados por Arquímedes obligaron a los atacantes a cambiar su plan e iniciar un sitio que duró ocho meses. Los relatos del evento afirman que cada vez que los soldados romanos veían asomar algún artefacto por encima de las murallas de la ciudad, entraban en pánico sabiendo que era alguna de las invenciones de Arquímedes. El general a cargo del ataque dio la orden de capturar con vida al sabio. Una versión de lo acontecido al caer la ciudad dice que un soldado romano encontró a Arquímedes estudiando unos esquemas geométricos

dibujados en el piso y que, al querer llevarlo con su general, el griego se resistió al grito de *¡No molestes mis círculos!*, por lo que fue asesinado[20].
La historia más famosa sobre Arquímedes cuenta que el rey de Siracusa le había encargado un método para saber si una corona que había mandado a hacer estaba hecha completamente de oro o si este se había mezclado con otro metal. Se dice que Arquímedes estaba tomando un baño cuando notó que la bañera completamente llena rebalsó al sumergirse en ella. En ese momento entendió que el agua que había salido de la bañera tenía el mismo volumen que la parte sumergida de su cuerpo y que este fenómeno podía usarse para medir el volumen de la corona y calcular así su densidad[21]. El descubrimiento lo puso tan contento que salió corriendo desnudo por las calles de Siracusa al grito de ¡Eureka!, griego antiguo para ¡Lo encontré![22].

En resumen

Cuando un cuerpo es parcialmente sumergido en un líquido, el mismo ejerce presión sobre todas las superficies de contacto del cuerpo, las laterales y la inferior. Las fuerzas sobre las superficies laterales se cancelan por simetría y el efecto neto de la presión del fluido es una fuerza de empuje hacia arriba. Del mismo modo, si el cuerpo está totalmente sumergido, el líquido también ejerce presión sobre la superficie superior, pero como la presión sobre el fondo es mayor que sobre ésta (la presión crece linealmente con la profundidad en un fluido de densidad uniforme), el resultado es una fuerza de empuje neta hacia arriba igual al peso del líquido desplazado. Este empuje es el responsable de la flotabilidad de los objetos sumergidos en fluidos. Desde los barcos, hasta los globos aerostáticos[23]. Se puede ver que la aceleración que sufre un cuerpo sumergido depende de la relación entre su densidad media y la del fluido.

2. Laboratorio

2.1. Verificación del principio de Arquímedes

Para demostrar experimentalmente el principio de Arquímedes se debe verificar que, para un fluido de densidad uniforme, el empuje es directamente proporcional al volumen sumergido del cuerpo. El máximo empuje se obtiene cuando el cuerpo está totalmente sumergido y, en estas condiciones, el empuje no cambia con la profundidad. Además, es necesario verificar que la fuerza de empuje es directamente proporcional a la densidad del fluido en el que está sumergido el cuerpo.

Les presentamos un experimento que consiste en mostrar que el empuje sobre un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un líquido es igual al peso del líquido desplazado. En un laboratorio convencional de física se podría detectar la fuerza de empuje de la manera tradicional usando una balanza hidrostática o, alternativamente, usando una balanza de precisión. Sin embargo, debido a la situación actual de DiSPO se deberá recurrir a un experimento ca-

[20] Otra versión dice que el soldado lo asesinó para robarlos los instrumentos astronómicos que tenía en la mano.
[21] Pueden ver una animación ilustrativa de este momento en la página de la materia
[22] Actualmente se considera poco probable que Arquímedes haya usado ese método para resolver el problema por impreciso. Es más factible que haya usado algún tipo de balanza hidrostática.
[23] Pregunta de final: £qué pesa más? £un globo desinflado o uno inflado con aire?

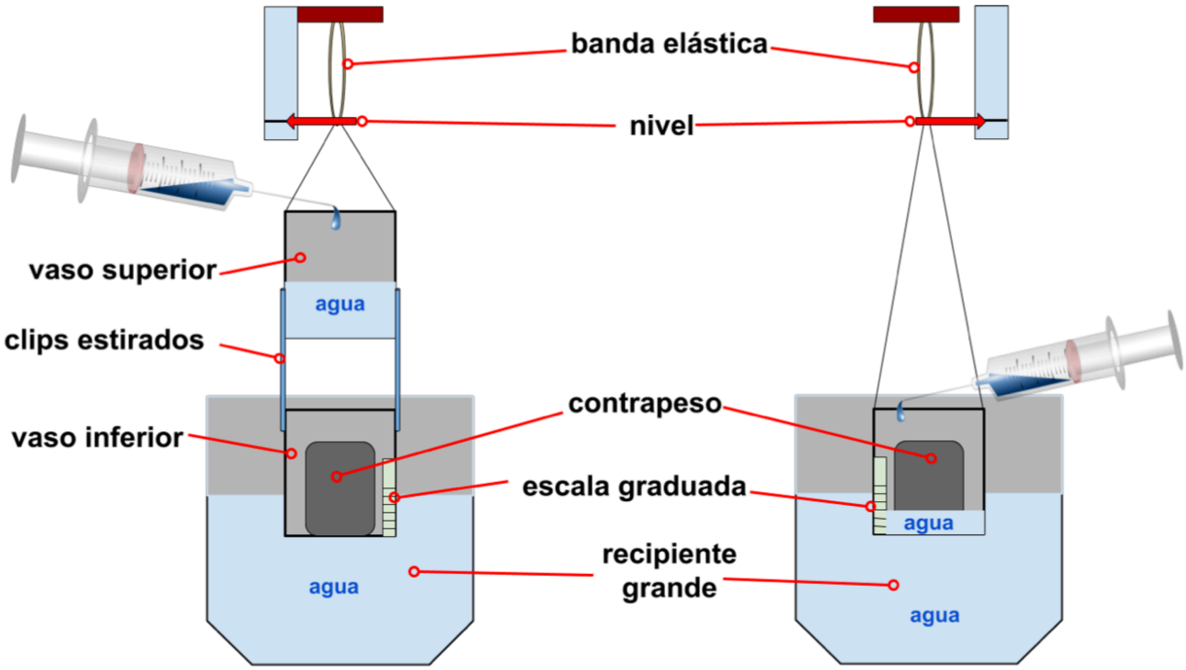

Figura 13: **Esquema general del montaje experimental.** A la izquierda con dos vasos, a la derecha con uno. Usando dos vasos, la cantidad de agua para renivelar se coloca en el superior. Si el contrapeso se puede mojar, se puede usar un sólo vaso en el que también se pone el agua.

sero y por simplicidad sólo se sumergirá parcialmente al cuerpo en el fluido. Se utilizarán los siguientes materiales:

- 1 o 2 vasos plásticos, preferentemente de sección constante, por ejemplo vasos de yogur o tapas de aerosol
- 1 bandita elástica o elástico
- Hilo y/o algunos clips de papel
- Un par de clavos o tornillos
- Cinta adhesiva
- Balanza de cocina, vaso medidor de líquidos o jeringa descartable (preferiblemente)
- Recipiente donde quepa uno de los vasos y se pueda llenar de agua (preferentemente transparente, por ejemplo, una botella de gaseosa cortada)
- Agua
- Arena, monedas y cualquier otra cosa que se pueda poner en el vaso a modo de contrapeso

Para poder medir el volumen sumergido de uno de los vasitos deberemos hacer dos cosas:

Figura 14: Vaso inferior con escala graduada y relleno con arena.

Figura 15: montaje de los dos vasos mediante clips e hilo.

1. Dibujar una escala graduada, por ejemplo cada 2 mm, sobre un costado del vaso desde la base hasta la parte superior y cubrir dicha escala con cinta adhesiva transparente para que el agua no la borre. Esto puede verse en la figura 14. Otra opción es sacarle fotos al vaso durante el experimento para luego tomar las medidas sobre las imágenes, por ejemplo con el programa gratuito imageJ.

2. Si el vaso no es de sección circular deberemos calcular el área de la base mediante un dibujo y una partición en forma de grilla regular por ejemplo de 4mm2 (es un método rudimentario pero similar al que van a usar cuando vean la integral de Riemann). También deben idear la manera de tener una cota de error en el cálculo de dicha área. (Ayuda: pensar que el error se comete en los cuadraditos del perímetro). Otra opción es estimar el área a partir de la altura a la que llegue un volumen conocido de agua en el vaso. También se puede usar el imageJ para medir el área a partir de una foto.

Luego haremos 4 orificios en cada vaso en las orejas superiores y uniremos los vasos mediante clips de papel estirados y con un doblez en las puntas. También pasaremos cuatro hilos por los orificios del vaso superior para poder colgar el conjunto. Todo esto puede verse en la figura 15.

Para finalizar este conjunto debe unirse el hilo a una bandita elástica cortada. En esta unión pegaremos una cinta en forma de bandera y le dibujaremos una flecha. En el otro extremo de la bandita elástica colocaremos un tornillo o clavo. En la figura 16 puede verse todo esto. Si el contrapeso que se utilizará no es arena sino objetos mojables como monedas, tornillos o tuercas, todo el experimento se puede hacer con un solo vaso.

También vamos a hacer una cinta de papel de aproximadamente 2 cm de ancho por el largo

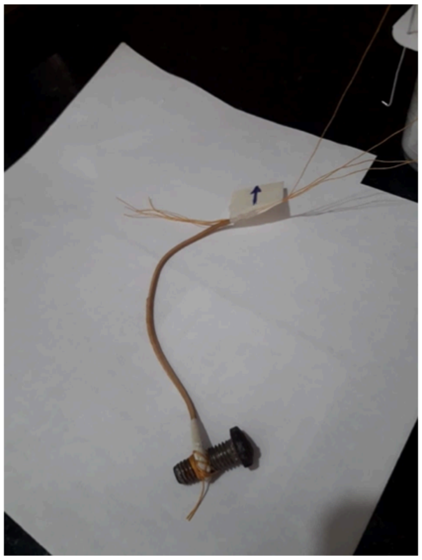

Figura 16: unión de la bandita elástica con los hilos y con un tornillo. También puede verse la cinta adhesiva en forma de bandera con su flecha dibujada.

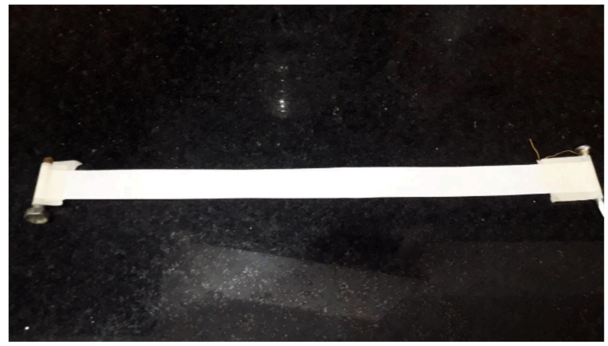

Figura 17: cinta de papel y extremos con tornillos o clavos.

de la hoja. En los dos extremos vamos a pegar con cinta adhesiva un clavo o tornillo. Esta cinta permitirá ajustar la posición de equilibrio durante todo el experimento. La figura 17 muestra esta cinta de papel y los tornillos o clavos en sus extremos.

Es momento de dejar las manualidades y empezar! Si se preguntan para qué son los tornillos acá viene la respuesta. Una forma cómoda de hacer el experimento es en la cocina sobre la mesada. Si tenemos mueble sobre mesada podremos meter el tornillo que está en la bandita elástica y un extremo de la cinta de papel dentro del mueble sobre mesada y cerramos la puerta del compartimiento. Así las dos cosas quedarán colgando sobre la mesada. Si el mueble no tiene puertas idear una manera para colgar todo. Una vez que tenemos todo colgado haremos una marca en la cinta de papel que coincida con la flecha que está en el hilo. Esta será la posición de equilibrio que deberemos tratar de mantener durante todo el experimento. Esto está ilustrado en la figura 18. Verificar que con todo colgado en la posición de equilibrio la bandita elástica no esté lo suficientemente estirada como para que se produzcan deformaciones permanentes. Si ocurre esto usar dos banditas en lugar de una.

Ahora pondremos la botella de gaseosa cortada como para que entre el vaso inferior y comenzaremos a llenarla de agua. Si realmente existe un empuje todo el sistema se moverá hacia arriba y la flecha ya no coincidirá con la marca inicial. Por ejemplo agregaremos agua a la botella para que la marca se corra aproximadamente 1 cm. Lo que haremos a continuación será agregar agua con la jeringa en el vaso superior hasta conseguir nuevamente la posición de equilibrio inicial. Pueden ser necesarias varias jeringas y deben anotar los cm^3 de agua que agregan. En el momento que se vuelve a la marca de equilibrio inicial anotaremos los datos de cuántos cm^3 de agua agregamos y hasta qué altura quedó sumergido el vaso inferior. Todo el procedimiento puede verse en la figura 19.

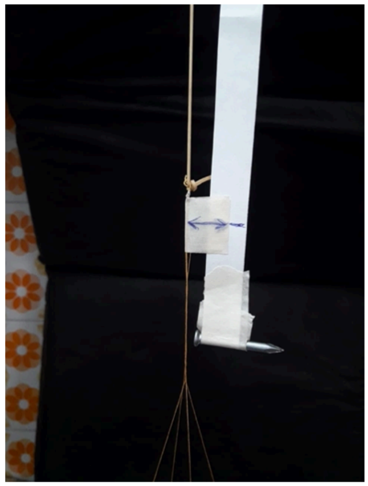

Figura 18: sistema colgando en su posición de equilibrio y la marca que muestra esa posición.

Inicialmente, antes de agregar agua, en la posición de equilibrio inicial tenemos:

$$kx_0 = m_0 g, \tag{12}$$

donde k es la constante elástica de la bandita de goma, x_0 es la posición inicial respecto de la posición de relajación de la bandita de goma y m_0 es la masa total inicial de todo el sistema. $g = 9,8m/s^2$ es la aceleración de la gravedad.

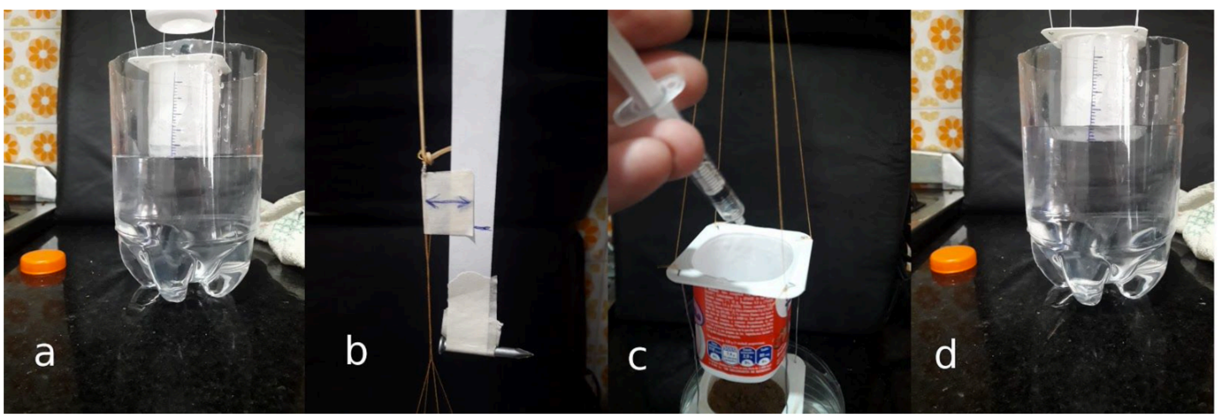

Figura 19: a) llenado de la botella. b) el nuevo punto de equilibrio desplazado hacia arriba. c) llenado del vaso superior para volver el sistema a la posición de equilibrio original. d) una vez alcanzado el punto de equilibrio original el vaso inferior quedará sumergido un cierto volumen.

Una vez que agregamos agua en la botella para cambiar la posición de equilibrio y agregamos agua en el vaso de arriba para llegar al punto de equilibrio inicial, suponiendo que realmente existe un empuje de abajo hacia arriba, ahora tenemos:

$$kx_0 + E_1 = (m_0 + m_1)g, \tag{13}$$

donde ahora E_1 es el empuje y m1 es la masa de agua agregada en el vaso de arriba.

Usando la ecuación (7) finalmente obtenemos:

$$E_1 = m_1 g. \tag{14}$$

En estos momentos debemos registrar este valor de empuje y el volumen sumergido del vaso inferior $V_1 = Ah_1$ (A es el área de la sección del vaso y h_1 la altura medida).

Continuando con el procedimiento y siempre planteando la condición de equilibrio cuando se llega a la posición inicial, ahora tendremos un nuevo empuje E_2 y una nueva masa de agua agregada m_2:

$$kx_1 + E_2 = (m_0 + m_1 + m_2)g. \tag{15}$$

Reemplazando nuevamente la igualdad que nos da (7) tenemos:

$$E_2 = (m_1 + m_2)g. \tag{16}$$

Ahora tenemos E_2 y un volumen sumergido V_2.

Seguiremos con este procedimiento al menos 5 veces teniendo en cuenta que los subíndices nos indican los valores correspondientes a cada iteración.

En resumen haremos 3 pasos repetidamente:

1. Agregamos agua a la botella y hacemos subir todo el sistema.
2. Agregamos agua con la jeringa hasta volver el sistema a la marca de equilibrio inicial.
3. Armamos una tabla con la masa de agua total agregada en el vaso superior y el volumen sumergido del vaso inferior.
4. Volvemos a 1.

Este método tiene como ventaja que no necesitamos conocer la constante elástica k de la bandita de goma ni la masa inicial del sistema. Como desventaja tiene que pueden arrastrarse errores en las masas de agua que se van agregando ya que se van sumando.

Con los datos de la tabla hacer un gráfico E vs. V y verificar si existe proporcionalidad como enuncia el principio de Arquímedes. Además, para verificar que el empuje no depende de la densidad del cuerpo sumergido vamos a utilizar diferentes rellenos en el vaso inferior (arena, monedas, etc), por lo que debe repetirse el procedimiento anterior para diferentes contenidos y comprobar que en todos los casos al graficar el empuje en función del volumen sumergido, se obtiene siempre la misma pendiente, y que la misma es, según la ecuación (6) igual a $\rho_{agua} g$. También se puede repetir el experimento reemplazando el agua con otro líquido como aceite, alcohol o más barato, agua con sal.

2.2. Determinación de la densidad del aire con un barómetro

La siguiente es una historia que circula hace tiempo en el ambiente de la física. Su veracidad no es relevante en este caso. La transcribo acá en la versión de Adrian Paenza para el diario Página 12 (con algunas correcciones de mi parte en tanto imprecisiones físicas).[7]

Sir Ernest Rutherford, presidente de la Sociedad Real Británica y Premio Nobel de Química en 1908, contaba la siguiente anécdota:

Hace algún tiempo, recibí la llamada de un colega. Estaba a punto de ponerle un cero a un estudiante por la respuesta que había dado en un problema de física, pese a que éste afirmaba convencidísimo que su respuesta era absolutamente acertada. Profesores y estudiantes acordaron pedir arbitraje de alguien imparcial y fui elegido yo. Leí la pregunta del examen y decía:
"¿Qué haría usted para determinar la altura de un edificio con la ayuda de un barómetro?"
El estudiante había respondido:
"Lleve el barómetro a la azotea del edificio y átale una cuerda muy larga. Descuélguelo hasta la base del edificio, marque y mida. La longitud de la cuerda es igual a la longitud del edificio".
Realmente, el estudiante había planteado un serio problema con la resolución del ejercicio, porque había respondido a la pregunta, correcta y completamente. Por otro lado, si se le concedía la máxima puntuación, podría alterar el promedio de su año de estudios, obtener una nota más alta y así certificar su alto nivel en física; pero la respuesta no confirmaba que el estudiante tuviera ese nivel. Sugerí que se le diera al alumno otra oportunidad. Le concedí seis minutos para que me respondiera la misma pregunta, pero esta vez con la advertencia de que en la respuesta debía demostrar sus conocimientos de física. Habían pasado cinco minutos y el estudiante no había escrito nada. Le pregunté si deseaba marcharse, pero me contestó que tenía muchas respuestas al problema. Su dificultad era elegir la mejor de todas. Me excusé por interrumpirlo y le rogué que continuara. En el minuto que le quedaba escribió la siguiente respuesta:
"Agarre el barómetro y déjelo caer al suelo desde la azotea del edificio. Calcule el tiempo de caída con un cronómetro. Después se aplica la fórmula: Altura= $0,5.g.t^2$ *(Donde* g *es la aceleración de la gravedad y* t *es el tiempo que uno acaba de calcular con el cronómetro). Y así obtenemos la altura del edificio."*
En este punto le pregunté a mi colega si el estudiante se podía retirar. Le dio la nota más alta. Tras abandonar el despacho, me reencontré con el estudiante y le pedí que me contara sus otras respuestas a la pregunta.
"*Bueno*", respondió, "*hay muchas maneras. Por ejemplo, agarrás el barómetro en un día soleado y medís la altura del barómetro y la longitud de su sombra. Si medimos a continuación la longitud de la sombra del edificio y aplicamos una simple proporción, obtendremos también la altura del edificio." Perfecto, le dije, ¿y de otra manera? "Sí"*, contestó, *"éste es un procedimiento muy básico para medir un edificio, pero también sirve. En este método, agarrás el barómetro y te situás en las escaleras del edificio en la planta baja. A medida que vas subiendo las escaleras, vas marcando la altura del barómetro y cuentas el número de marcas hasta la azotea. Multiplicás al final la altura del barómetro por el número de marcas que hiciste y ya tenés la altura. Este es un método muy directo."*
Por supuesto, si lo que uno quiere es un procedimiento más sofisticado, puede atar el barómetro a una cuerda y moverlo como si fuera un péndulo. Si calculamos que cuando el barómetro está a la altura de la azotea la velocidad es cero y si tenemos en cuenta la medida de la aceleración de la gravedad al descender el barómetro en trayectoria circular al pasar por la perpendicular del edificio, aplicando una sencilla formula trigonométrica, podríamos calcular, sin

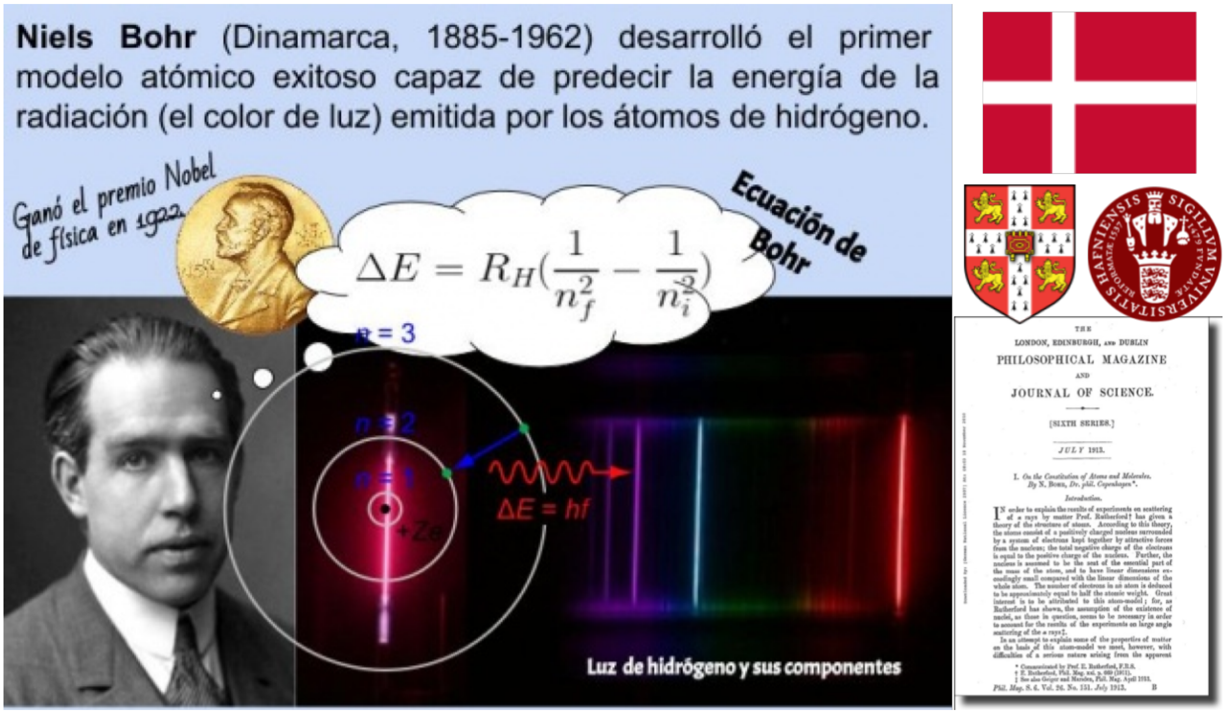

Figura 20: Niels Bohr. Universidades de Copenhagen y Cambridge. Insertos a derecha: Bandera de Dinamarca, escudos de las universidades de Cambridge y Copenhagen y portada de "*On the constitution of atoms and molecules*"(1913).

duda, la altura del edificio. En este mismo estilo de sistema, atás el barómetro a una cuerda y lo descolgás desde la azotea a la calle. Usándolo como un péndulo podés calcular la altura midiendo su período de precesión. En fin, concluyó, existen otras muchas maneras. Probablemente, la mejor sea tomar el barómetro y golpear con él la puerta de la casa del conserje. Cuando abra, decirle: señor conserje, aquí tengo un bonito barómetro. Si usted me dice la altura de este edificio, se lo regalo.

En este momento de la conversación, le pregunté si no conocía la respuesta convencional al problema (la diferencia de presión marcada por un barómetro en dos lugares diferentes nos proporciona la diferencia de altura entre ambos lugares). Me dijo que sí, que evidentemente la conocía, pero que durante sus estudios, sus profesores habían intentado enseñarle a pensar.

El estudiante se llamaba Niels Bohr (fig. 20), físico danés, premio Nobel de Física en 1922, más conocido por ser el primero en proponer el modelo de átomo que lleva su nombre con electrones orbitando un núcleo de protones. Fue fundamentalmente un innovador de la teoría cuántica. Al margen del personaje, lo divertido y curioso de la anécdota, lo esencial de esta historia es que le habían enseñado a pensar.

Ahora bien, en este TP vamos a optar por la respuesta más convencional al problema, que Bohr no quiso dar. Para hacerlo vamos a usar el barómetro incorporado a algunos teléfonos celulares para dar más precisión y velocidad a la determinación de altura realizada por el sistema GPS, que no es muy preciso en el eje vertical.

Hay varios tipos de barómetros utilizados en los celulares, pero la mayoría consisten en una pequeña celda de silicio presurizada, una de cuyas paredes es una membrana que se deforma al variar la presión externa (fig. 21). La deformación de la membrana induce un desbalance en un arreglo de piezoresistencias tipo puente de Wheatstone lo que se traduce en una señal eléctrica[8].

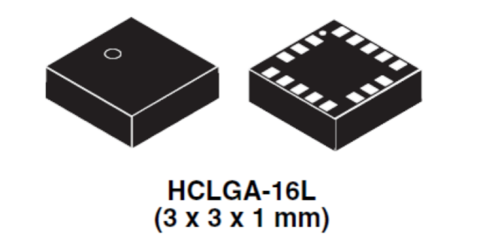

Figura 21: Ejemplo de sensor de presión para teléfonos.

Figura 22: Ejemplo de lectura de presión con la aplicación *Physics Toolbox*

Para poder obtener los datos generados por el barómetro del celular, es necesario instalar alguna aplicación, recomendamos *Physics Tollbox* que es la que usaremos para esta explicación. Una vez instalada la aplicación, en el menú desplegable de la izquierda se puede seleccionar el sensor a utilizar. Cuando elijan **Barómetro** el programa empezará a mostrarles la lectura inmediatamente. Lo primero que notarán es que es un instrumento muy sensible por lo que la lectura en la escala por defecto es muy inestable. Se puede cambiar la escala haciendo zoom con dos dedos sobre la pantalla. Pueden hacer una primera prueba eligiendo la escala adecuada para ver una lectura más o menos estable con el teléfono apoyado sobre la mesa. Luego apoyen el teléfono en el piso y observen la variación de presión medida.
Para poder guardar la lectura, basta con apretar el botón rojo con el signo **+** antes de empezar el experimento. Esto inicia el registro. Para detenerlo apretar de nuevo el mismo botón, eso abrirá un menú para que puedan elegir primero el nombre del archivo y luego el destino de almacenamiento. Si tienen su cuenta de google sincronizada con el teléfono, lo más recomendable es guardar los datos directamente en su Drive. También los pueden enviar por correo, WhatsApp o Telegram. El archivo tiene formato csv (*comma separated values*) por lo que, si lo abren con cualquier lector de texto plano, se verá así

```
time;P
0,024;101377,08
0,194;101376,90
0,386;101375,81
0,554;101375,56
0,735;101375,10
0,915;101375,76
1,094;101378,34
1,275;101379,27
```

La primera columna es el tiempo en segundos desde que comenzaron a grabar y la segunda columna, (después de ;) es la presión en pascales. El experimento en sí es muy fácil de hacer, sólo tienen que registrar la presión a varias alturas conocidas y ajustar la expresión de la ecuación hidrostática que vimos en la sección 1.4 para obtener la densidad del aire durante el experimentos. Es importante recordar un par de cosas ya mencionadas:

- La presión atmosférica es una variable meteorológica por lo que su valor a una misma altura varía en función de la posición geográfica y estado del tiempo. Debido a esto, es importante tomar todas las medidas de cada experimento en el mismo día y lugar. Si tienen alguna manera de conocer la temperatura ambiente durante el experimento, este dato les servirá para verificar el valor obtenido con la bibliografía
- Si bien el barómetro incorporados a los celulares es muy sensible, siempre es mejor tomar medidas en el rango más amplio posible de alturas para minimizar el efecto de fluctuaciones de presión locales. Si viven en un edificio es fácil, basta con tomar medidas en la escalera del mismo. Para conocer la altura pueden medir varios escalones, sacar su altura promedio y luego simplemente contarlos. En el caso de no tener acceso a un edificio, como ya nos mostró Bohr, hay varias maneras de determinar alturas. Consulten con su docente a cargo.

Referencias

[1] En los límites de la realidad: el vacío. *Mundo Científico - La Recherche*, (202):41–45, 1999.

[2] William Charlton, Edward Hussey, et al. *Aristotle Physics Book VIII*, volume 3. Oxford University Press, 1999.

[3] Galileo galilei and air pressure. `https://historyofsciences.blogspot.com/2017/01/galileo-galilei-and-air-pressure.html`, January 2017.

[4] Malcolm Correll. A case study in scientific inquiry: Atmospheric pressure, including baliani's ignored letter. *The Journal of General Education*, 6(4):280–291, 1952.

[5] Randall D. Knight, PhD. *"Fluid Mechanics". Physics for Scientists and Engineers: A Strategic Approach.* Pearson Addison Wesley, 2007.

[6] Madhvi Ramani. La fascinante historia de cómo francia creó el sistema métrico decimal y está por redefinir el peso de un kilogramo. `https://www.bbc.com/mundo/vert-tra-45845628`, October 2018.

[7] Adrián Paenza. Contratapa :: Niels bohr. `https://www.pagina12.com.ar/diario/contratapa/13-67524-2006-05-29.html`, May 2006.

[8] Cmems pressure sensor: 260-1260 mbar absolute digital output barometer.