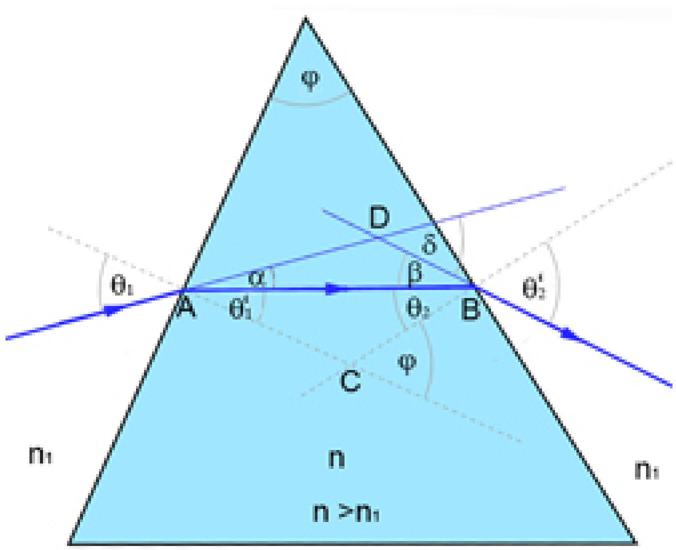
Cálculos de ángulo mínimo de desviación

Física experimental III

April 6, 2018



A partir del grafico podemos encontrar la siguientes relaciones

$$\sin(\theta_1) = n \sin\left(\theta_1^{'}\right) \tag{1}$$

$$n \sin(\theta_2) = \sin\left(\theta_2^{'}\right) \tag{2}$$

$$\varphi = \theta_1^{'} + \theta_2 \tag{3}$$

$$\delta = \theta_1 + \theta_2^{'} - \varphi \tag{4}$$

Donde 12 corresponden a la ley de snell, y 34 se obtienen a partir de trigonometría.

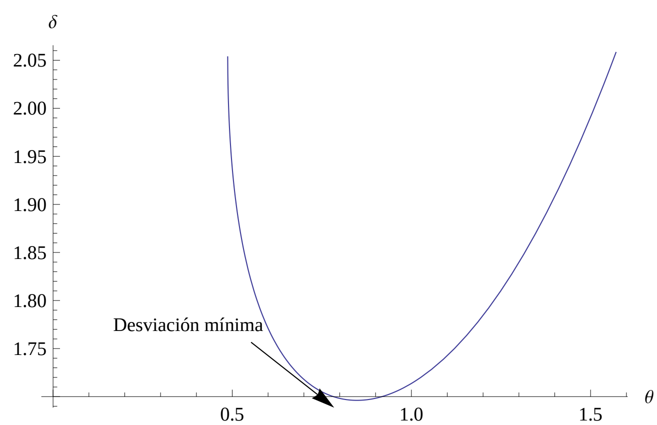
A partir de estas ecuaciones podemos escribir el ángulo de desviación δ en función del angulo incidente θ_1.

Debemos calcular $\theta_2^{'}(\theta_1)$.

$$\begin{aligned}
\theta_2^{'} &= \arcsin\left(n\sin\left(\theta_2\right)\right) \\
&= \arcsin\left(n\sin\left(\varphi-\theta_1^{'}\right)\right) \\
&= \arcsin\left\{n\left[\sin\left(\varphi\right)\cos\left(\theta_1^{'}\right)-\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\theta_1^{'}\right)\right]\right\} \\
&= \arcsin\left\{n\left[\sin\left(\varphi\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{\sin\left(\theta_1\right)}{n}\right)\right)-\frac{\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\theta_1\right)}{n}\right]\right\} \\
&= \arcsin\left[\sin\left(\varphi\right)\sqrt{n^2-\sin^2\left(\theta_1\right)}-\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\theta_1\right)\right]
\end{aligned}$$

En la última linea usamos las identidad trigonométrica $\cos\left[\arcsin\left(x\right)=\sqrt{1-x^2}\right]$. La expresión final para δ es:

$$\delta(\theta_1)=\theta_1+\arcsin\left[\sin\left(\varphi\right)\sqrt{n^2-\sin^2\left(\theta_1\right)}-\cos\left(\varphi\right)\sin\left(\theta_1\right)\right]-\varphi \tag{5}$$



Podemos ver en el Gráfico que la función tiene un mínimo.

Derivar la función 5 para encontrar el mínimo requiere mucho cálculo por lo que es preferible derivar implícitamente y usar la regla de la cadena en la ecuación 4

$$\begin{aligned}
\frac{d\delta}{d\theta_1} &= 1+\frac{d\theta_2^{'}}{d\theta_1} \\
&= 1+\frac{d\theta_2^{'}}{d\theta_2}\frac{d\theta_2}{d\theta_1^{'}}\frac{d\theta_1^{'}}{d\theta_1}
\end{aligned}$$

De las ecuaciones 123 se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d\theta_2^{'}}{d\theta_2} &= n\frac{\cos\left(\theta_2\right)}{\cos\left(\theta_2^{'}\right)} \\ \frac{d\theta_2}{d\theta_1^{'}} &= -1 \\ \frac{d\theta_1^{'}}{d\theta_1} &= \frac{\cos\left(\theta_1\right)}{n\cos\left(\theta_1^{'}\right)} \end{aligned}$$

Obteniendo finalmente

$$\frac{d\delta}{d\theta_1} = 1 - \frac{\cos\left(\theta_2\right)}{\cos\left(\theta_2^{'}\right)}\frac{\cos\left(\theta_1\right)}{\cos\left(\theta_1^{'}\right)}$$

Encontramos su mínimo $\frac{d\delta}{d\theta_1} = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\cos\left(\theta_1^{'}\right)}{\cos\left(\theta_2\right)} &= \frac{\cos\left(\theta_1\right)}{\cos\left(\theta_2^{'}\right)} \\ \frac{1-\sin^2\left(\theta_1^{'}\right)}{1-\sin^2\left(\theta_2\right)} &= \frac{1-\sin^2\left(\theta_1\right)}{1-\sin^2\left(\theta_2^{'}\right)} \\ \frac{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\theta_1\right)}{1-\frac{1}{n^2}\sin^2\left(\theta_2^{'}\right)} &= \frac{1-\sin^2\left(\theta_1\right)}{1-\sin^2\left(\theta_2^{'}\right)} \end{aligned}$$

La igualdad se cumple cuando $\theta_1 = \theta_2^{'}$, Por lo tanto $\theta_1^{'} = \theta_2$, Podemos concluir que el ángulo mínimo de desviación se da cuando el rayo es paralelo a la base del prisma.