Práctica 6 - Inducción - Ecuaciones de Maxwell - Ondas - Radiación

1. Un circuito esta compuesto por una capa conductura cilíndrica de espesor despreciable y radio a y un cable cilíndrico de radio b coaxial por el que retorna la corriente. Si en el cable interior la corriente I se distibuye uniformemente sobre su sección, la energía magnética por unlidad de longitud y la autoindictancia por unidad de longitud. Determinar como sería la autoinductancia si en lugar de un cable interior se coloca una capa conductura cilíndrica de espesor despreciable y radio b

2. Mostrar que las ecuaciones de Maxwell implican la conservación local de la carga eléctrica.

3. Considerar una onda electromagnética plana, descrita por los potenciales:
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}, \qquad \Phi(\vec{r},t) = \Phi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-\omega t)}.$$
Usar la ecuaciones de Maxwell para encontrar una relación entre las constantes $\vec{A}_0$ y Φ_0. Hallar una transformación de gauge en la que el potencial vector esté transversalmente polarizado y escribir el potencial escalar en dicho gauge.

4. Deducir la ley de Ohm para un material conductor, $\vec{J} = \sigma(\omega)\,\vec{E}$, siendo
$$\sigma(\omega) = \frac{ne^2\tau}{m(1-i\,\omega\tau)}$$
donde n es la densidad de electrones libre y τ el tiempo libre medio (considerar una fuerza disipativa $-\frac{m}{\tau}\vec{v}$)

   Estudiar las fases relativas entre $\vec{E}$ y $\vec{J}$ como función de $\omega\tau$. Explicar por qué los metales reflejan la luz visible y transmiten el ultravioleta. Determinar el número de onda en función de la frecuencia y de la conductividad.

5. Una onda monocromática incide normalmente sobre una lámina metálica. Calcular los coeficientes de transmisión y de reflexión en términos de la longitud de penetración.

6. La propagación de una onda plana en un medio dispersivo está dada por
$$\phi(x,t) = \int \partial_t K(x-x',t)\phi(x',0)\,dx' + \int K(x-x',t)\partial_t\phi(x',0)\,dx'$$
   a) Escribir una expresión que permita calcular $K(x,t)$ a partir de la relación de dispersión $\omega = \omega(k)$.
   b) Considerar un modelo de dispersión dado por $\omega(k) = a + b\,k^2$ y calcule $\partial_t K(x,t)$. Determine la evolución temporal en este material de un campo cuyos valores iniciales son
   $$\phi(x,0) = e^{-\frac{x^2}{L^2}}\cos(k_0\,x) \qquad \partial_t\phi(x,0) = 0$$
   Verificar que la envolvente se propaga con la velocidad de grupo y que los extremos locales lo hacen con la velocidad de fase. ¿Pueden ser estas velocidades mayores que c? ¿Por qué? Graficar la dispersión del paquete como función del tiempo.

7. Una onda plana monocromática incide normalmente sobre una lámina dieléctrica. Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión. Calcular la longitud de onda para la cual toda la energía incidente es transmitida.

8. Una onda plana monocromática incide con un ángulo θ_I desde un medio con índice de refracción n_1 hacia un segundo medio con índice de refracción n_2, tal que $n_1 > n_2$. Mostrar que si $\sin\theta_I > \frac{n_2}{n_1}$ el flujo medio de energía a través de la interface se anula.

9. Considar un material que contiene n cargas e de masa m por unidad de volumen sometidas a una fuerza de restauración caracterizada por una frecuencia ω_0 y a una fuerza disipativa caracterizada por un coeficiente γ. Mostrar que la permitividad debida a estas cargas está dada por

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_0 + \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\,\gamma\,\omega}$$

Describir la dispersión anómala y la absorción resonante.

10. La parte imaginaria de la permitividad de un material está dada por

$$\mathrm{Im}[\epsilon(\omega)] = \alpha\epsilon_0 \left[\Theta(\omega - \omega_1) - \Theta(\omega - \omega_2)\right] , \qquad \text{con} \quad 0 < \omega_1 < \omega_2$$

Usar las relaciones de Kramers-Kronig para calcular la correspondiente parte real de $\epsilon(\omega)$.

11. Calcular los campos electromagnéticos generados por un dipolo que actúa en un instante dado. Mostrar que se propagan con velocidad c.

12. Una carga puntual se conecta a un cable recto semiinfinito a través del cual se descarga exponencialmente. Utilizando el gauge de Lorenz calcular los campos electromagnéticos. Calcular los potenciales en el gauge de Coulomb.

13. Estimar el tiempo que demoraría en decaer un átomo de hidrógeno clásico (considerar una aproximación adiabática en la que la órbita es circular en todo momento), si se toma como radio inicial el radio de Borh $a \sim 5 \times 10^{-11} m$.