Práctica 4 - Momentos multipolares - Materiales dieléctricos

1. Calcular los momentos multipolares de las siguientes distribuciones de carga:

   a) Una carga Q en $(a, 0, 0)$, una carga $-Q$ en $(-a, 0, 0)$, una carga Q en $(0, a, 0)$ y una carga $-Q$ en $(0, -a, 0)$.

   b) Una carga Q en $(0, 0, a)$, una carga Q en $(0, 0, -a)$ y una carga $-2Q$ en $(0, 0, 0)$.

   Escribir los potenciales para $r \gg a$ en términos de los momentos multipolares y comparar ambos resultados.

2. Mostrar que el potencial generado por un dipolo puntual $\vec{p}$ ubicado en $\vec{r}_0$ equivale al de una distribución de carga $\rho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla}\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$.

3. a) Usando el desarrollo de Taylor de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ hallar los primeros términos de la expansión multipolar en coordenadas cartesianas.

   b) Calcular los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica.

   c) Mostrar que si la carga total de una distribución es distinta de cero entonces puede elegirse un sistema de coordenadas con respecto al cual el momento dipolar de la distribución se anule.

4. Considerar un elipsoide de revolución de semieje mayor b (alineado con el eje z) y semieje menor a, cargado uniformemente con una carga total q y mostrar el siguiente valor del momento cuadrupolar:

   $$Q_{33} = \frac{2}{5}q(b^2 - a^2)$$

   Determinar el valor de los demás momentos cuadrupolares.

5. Considerar la densidad de carga $\rho(\vec{r}) = -eZ\,|\psi(\vec{r})|^2$, donde $\psi(\vec{r})$ es la función de onda de un electrón en el estado con $m = 1$ del nivel 2p de un átomo hidrogenoide de número atómico Z.

   $$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{8\sqrt{\pi}a_0^{3/2}}\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}\sin\theta e^{i\phi}\,, \qquad \text{Radio de Bohr } a_0 \simeq 5{,}29 \times 10^{-11}m$$

   a) Calcular los momentos multipolares de esta distribución y, a partir de ellos, determinar el potencial electrostático para $r \gg a_0$.

   b) A partir de una expansión del potencial electrostático válida para todo punto del espacio, calcular los valores del gradiente del campo eléctrico en el límite $r \ll a_0$. Usar este resultado para estimar el corrimiento de la energía de un electrón en este estado debido a la interacción cuadrupolar con el núcleo (suponer que el núcleo posee un momento cuadrupolar del orden de $Q \sim 10^{-28}\,m^2$).

6. Calcular el potencial electrostático generado por una esfera dieléctrica con una carga q en su centro y describir la densidad de polarización.

7. Considerar una esfera conductora a potencial V en un medio dieléctrico. Calcular el potencial electrostático en todo el espacio, la densidad de carga en la superficie de la esfera conductora y la densidad de carga de polarización en la superficie de contacto con el dieléctrico.

8. Considerar una carga puntual frente a una esfera dieléctrica de permitividad ϵ.

   a) Calcular el potencial electrostático en todo el espacio y verificar que se obtienen los límites esperados en los casos $\epsilon \to \epsilon_0$ y $\epsilon \to \infty$

   b) Describir el campo eléctrico cerca del centro de la esfera y determinar la densidad de carga polarización en la superficie de la esfera.

9. Se coloca una esfera dieléctrica en una región que contiene un campo eléctrico constante $\vec{E}_0$.

   a) Calcular el potencial en todo el espacio y los campos $\vec{E}, \vec{D}, \vec{P}$.

   b) Determinar la densidad de carga inducida sobre la superficie de la esfera y los correspondientes momentos multipolares.

   c) Comparar el resultado con el valor del potencial a grandes distancias de la esfera.

10. Dos esferas conductoras concénticas de radios a y b ($a < b$) tienen cargas opuestas q y $-q$ respectivamente. La mitad del volumen comprendido entre ellas (capa hemisférica inferior) está ocupado por un líquido dieléctrico de permitividad ϵ y la otra mitad vacía.

    a) Calcular el campo eléctrico en la región comprendida entre las esferas.

    b) Determinar la densidad de carga inducida sobre la superficie de la esfera interior y los correspondientes momentos multipolares.

    c) Determinar la densidad de carga de polarización en la superficie del dieléctrico en $r = a$.