Electromagnetismo 2016

Práctica 3 - Problemas con cond. de contorno II - Separación de variables

1. A partir de $B = \{f_n(x) = e^{\frac{2\pi i n x}{L}} / n \in \mathbb{Z}\}$, base del espacio de funciones en el intervalo $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$, considerada en el ejercicio 7 de la práctica 0, se puede construir una base completa y ortonormal de senos y cosenos

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{L}},\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right),\ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right\} \qquad \text{con } n \text{ entero positivo}$$

   La expansión de funciones en esta base se conoce como **serie de Fourier**.

   a) Mostrar que las funciones de la base son ortonormales

   b) Mostrar que en la expansión de una función $f(x)$ en serie de Fourier

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) + B_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) \right]$$

   los coeficientes del desarrollo son

$$A_n = \frac{2}{L} \int_{L/2}^{-L/2} dx\ f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right), \qquad B_n = \frac{2}{L} \int_{L/2}^{-L/2} dx\ f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)$$

   c) Hallar la serie de Fourier de una función

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -\pi \leq x < 0 \\ +1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

2. Considerar un cilindro conductor hueco de radio a y de longitud infinita, cuyas mitades ($-\pi \leq \phi < 0$ y $0 \leq \phi \leq \pi$) están mantenidas a potencial $-V$ y $+V$ respectivamente. Hallar una serie para el potencial en el interior del cilindro, resumarla. Graficar las curvas equipotenciales y las líneas de campo.

3. Considerar el mismo cilindro del ejercicio anterior, cuyos 4 cuartos ahora están mantenidos a potencial $-V$ y $+V$ de manera alternada. Hallar una serie para el potencial en el interior del cilindro, resumarla. Graficar las curvas equipotenciales y las líneas de campo.

4. Los polinomios de Legendre, dados por la fórmula de Rodrigues

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l\,,$$

   satisfacen la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2)\frac{dP_l}{dx}\right] + l(l+1)P_l = 0\,,$$

   y conforman una base completa para las funciones en el intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Mostrar que satisfacen la siguiente condición de ortogonalidad

$$\int_{-1}^{1} dx P_{l'}(x) P_l(x) = \frac{2}{2l+1} \delta_{l'l}\,.$$

5. El potencial sobre la superficie de una esfera de radio a está dado por la expresión $\Phi(a,\theta) = V_0 \cos 3\theta$ y no hay cargas dentro ni fuera de la esfera. Encontrar el potencial en todo el espacio y la densidad superficial de cargas sobre la esfera.

6. Volver a considerar la ecuación de Laplace en la región exterior a una esfera conductora de radio a, cuyo hemisferio superior se mantiene a potencial V, mientras que su hemisferio inferior se mantiene a potencial $-V$, separando variables en coordenadas esféricas y expandiendo en polinomios de Legendre el potencial. Hallar su valor sobre el eje z y verificar que el resultado coincide con el obtenido en el problema 7 de la práctica 2.

7. Una esfera de radio a tiene una distribución superficial de carga uniforme igual a $\frac{q}{4\pi a^2}$ para todo $\alpha < \theta < \pi$, pero la densidad superficial se anula para $0 < \theta < \alpha$.

   a) Mostrar que el desarrollo del potencial en el interior de la esfera es

   $$\Phi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l+1} \left[P_{l+1}(\cos\alpha) - P_{l-1}(\cos\alpha)\right] \frac{r^l}{R^{l+1}} P_{l+1}(\cos\theta) \,.$$

   b) Hallar el desarrollo del potencial en el interior de la esfera.

   c) Discutir el límite de ambos resultados para $\alpha \ll 1$.

8. Considerar una esfera de radio de radio a cuyos cuatro cuadrantes, definidos por $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$, $\pi < \phi < \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{3\pi}{2} < \phi < 2\pi$, están mantenidos a potencial $+V$, $-V$, $+V$ y $-V$ respectivamente. Hallar el desarrollo en serie de armónicos esféricos del potencial electrostático en el interior de la esfera.

9. Considerar una carga q en $(0,0,a)$, otra carga q en $(0,0,-a)$ y una tercera carga $-2q$ en el origen.

   a) Calcular el potencial generado por las tres cargas y describir luego el límite $a \to 0$ (manteniendo qa^2 finito) en coordenadas esféricas.

   b) Estudiar cómo cambia el potencial si se encierran las cargas con una esfera de radio $b > a$ conductora centrada en el origen y conectada a tierra.

10. Hallar la expansión en armónicos esféricos de la función de Green para el problema de Possion con condiciones de contorno de Dirichlet en el interior de una esfera de radio b. Usar dicha expresión para dar el potencial electrostático cuando la esfera esta conectada a tierra y se distribuye uniformemente una carga total q sobre una anillo de radio $a < b$, cuyo centro coincide con el de la esfera.