Planos conductores en x = 0 y x = L. Cable de densidad lineal de carga μ en (x = d, y = 0)
El potencial del cable en ausencia de planos sería

$$\phi[x, y] = -\frac{\mu}{2\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\sqrt{(x-d)^2+y^2}\right] = -\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[(x-d)^2+y^2\right]$$

El espejo en x = 0 lleva a la condición $\phi[x, y] = \phi[-x, y]$,
mientras que el espejo en L lleva a $\phi[x, y] = \phi[2L - x, y]$.

Combinando ambas vemos que el problema tiene periodicidad en 2 L.

En el primer término escribo el potencial del cable real y de la imagen en x = −d, combinados en un mismo logaritmo.

La suma barre con los pares de cables que se repiten en
(x = 2 L n − d) y (x = −2 L n − d) con μ y en (x = 2 L n + d) y (x = −2 L n + d) con $-\mu$
Suma de n = 1 a infinito, se convierte en productoria dentro del logaritmo.

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}\right] - \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\sum_{n=1}^{\infty}\text{Log}\left[\frac{(x-d+2Ln)^2+y^2}{(x+d+2Ln)^2+y^2}\,\frac{(x-d-2Ln)^2+y^2}{(x+d-2Ln)^2+y^2}\right]$$

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}\right] - \frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(x-d+2Ln)^2+y^2}{(x+d+2Ln)^2+y^2}\,\frac{(x-d-2Ln)^2+y^2}{(x+d-2Ln)^2+y^2}\right]$$

Reescribo las distintas posiciones al cuadrado para recombinar los términos

```
a1 = x - d + 2 L n;
a2 = x - d - 2 L n;
a3 = x + d + 2 L n;
a4 = x + d - 2 L n;
```

Escribo los paréntesis como diferencias de cuadrados con la unidad imaginaria

$$(y^2 + a1^2) = (y + I\,a1) * (y - I\,a1)$$
$$(y^2 + a1^2) * (y^2 + a2^2) = (y + I\,a1) * (y - I\,a1) * (y + I\,a2) * (y - I\,a2) =$$
$$((y + I\,a1) * (y + I\,a2)) * ((y - I\,a2) * (y - I\,a2)) =$$
$$(y^2 + I\,(a1 + a2) - a1a2) * (y^2 - I\,(a1 + a2) - a1a2)$$

Vuelvo a escribir a1 y a2 en términos de x e y

$$(y^2 + 2\,I\,(x-d) - (x-d)^2 + 4L^2n^2) * (y^2 - 2\,I\,(x-d) - (x-d)^2 + 4L^2n^2) =$$
$$= ((y + I\,(x-d))^2 + 4L^2n^2) * ((y - I\,(x-d))^2 + 4L^2n^2)$$

Verifico que los pasos hayan sido correctos

```
FullSimplify[((y + I (x - d))^2 + 4 L^2 n^2) * ((y - I (x - d))^2 + 4 L^2 n^2) - (y^2 + a1^2) * (y^2 + a2^2)]
```

0

Reemplazo en el producto lo que obtuve para a1 y a2, y el resultado análogo para a3 y a4.

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}\right]-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(y+I\,(x-d))^2+4L^2n^2}{(y+I\,(x+d))^2+4L^2n^2}\,\frac{(y-I\,(x-d))^2+4L^2n^2}{(y-I\,(x+d))^2+4L^2n^2}\right]$$

Ordeno para que se parezca a la productoria del enunciado,
es seno hiperbólico y no seno común por el signo de diferencia

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}\right]-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(\frac{(y+I\,(x-d))^2}{4L^2n^2}+1\right)*\left(\frac{(y-I\,(x-d))^2}{4L^2n^2}+1\right)\right)\Big/\left(\left(\frac{(y+I\,(x+d))^2}{4L^2n^2}+1\right)*\left(\frac{(y-I\,(x+d))^2}{4L^2n^2}+1\right)\right)\right]$$

Compruebo el resultado del enunciado

$$\text{Product}\left[1+\frac{t^2}{n^2},\ \{n,1,\infty\}\right]$$

$$\frac{\text{Sinh}[\pi t]}{\pi t}$$

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{(x-d)^2+y^2}{(x+d)^2+y^2}\right]-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y+I\,(x-d)}{2L}\right]*\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y-I\,(x-d)}{2L}\right]}{\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y+I\,(x+d)}{2L}\right]*\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y-I\,(x+d)}{2L}\right]}*\frac{(x+d)^2+y^2}{(x-d)^2+y^2}\right]$$

$$-\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0}\text{Log}\left[\frac{\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y+I\,(x-d)}{2L}\right]*\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y-I\,(x-d)}{2L}\right]}{\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y+I\,(x+d)}{2L}\right]*\text{Sinh}\left[\pi\,\frac{y-I\,(x+d)}{2L}\right]}\right]$$

Usando seno hiperbólico de la suma

```
FullSimplify[Sinh[a + I b] * Sinh[a - I b]]
```

$$\frac{1}{2}\,(-\mathrm{Cos}[2\,b] + \mathrm{Cosh}[2\,a])$$

Obtenemos el resultado final

$$\phi[x,\,y] - \frac{\mu}{4\,\pi\,\epsilon_0}\,\mathrm{Log}\left[\frac{\mathrm{Cosh}\left[\pi\,\frac{y}{L}\right] - \mathrm{Cos}\left[\pi\,\frac{(x-d)}{L}\right]}{\mathrm{Cosh}\left[\pi\,\frac{y}{L}\right] - \mathrm{Cos}\left[\pi\,\frac{(x+d)}{L}\right]}\right]$$

Gráfico con distancias en unidades de L, con $\mu / \epsilon_0 = 1$ V, distintos valores de d

```
ϕ[x_, y_, d_] := - 1/(4 π) Log[(Cosh[π y] - Cos[π (x - d)])/(Cosh[π y] - Cos[π (x + d)])]
Row[{Plot3D[ϕ[x, y, 0.01], {x, 0, 1}, {y, -1, 1}, ImageSize → 300],
  Plot3D[ϕ[x, y, 0.5], {x, 0, 1}, {y, -1, 1}, ImageSize → 300],
  Plot3D[ϕ[x, y, 0.8], {x, 0, 1}, {y, -1, 1}, ImageSize → 300]}]
```