Práctica 2 - Problemas con condiciones de contorno en electrostática

1. Sea $f(\vec{r}) = \Phi_1(\vec{r}) - \Phi_2(\vec{r})$, en donde $\Phi_1(\vec{r})$ y $\Phi_2(\vec{r})$ son dos potenciales que satisfacen una misma ecuación de Poisson y las mismas condiciones de contorno. Considerar

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla}(f\vec{\nabla}f)\, d^3x$$

y usar el teorema de la divergencia para demostrar que la ecuación de Poisson tiene solución única cuando se imponen condiciones de contorno de Dirichlet en el borde de $\mathcal{V}$. Analizar si la solución es única cuando, en el borde de $\mathcal{V}$, se imponen condiciones de Neumann.

2. Se coloca una carga puntual q en $\vec{r}_0 = (d, 0, 0)$ frente a un plano conductor y conectado a tierra situado en $x = 0$. Utilizar el método de las imágenes para determinar:

   a) El potencial electrostático en la región $x > 0$ (considerando $d > 0$).

   b) La densidad superficial de carga inducida en el plano conductor, así como la carga total inducida sobre éste.

   c) La fuerza que ejerce el plano sobre la carga q y el trabajo necesario para llevar la carga hasta el infinito.

3. Una carga puntual q es colocada en la posición $\vec{r}_0$, exterior a una esfera conductora de radio a centrada en el origen y mantenida a potencial constante V. Usar dos cargas imágenes, una en el origen y otra sobre el radio en la dirección de $\vec{r}_0$, para hallar:

   a) El potencial electrostático en la región exterior a la esfera.

   b) La densidad de carga inducida y sobre la superficie de esfera y la carga total inducida.

   c) La fuerza eléctrica que la esfera ejerce sobre la carga q.

4. Se coloca un hilo rectilíneo uniformemente cargado con densidad lineal de carga μ a una distancia d de un plano conductor conectado a tierra situado en $x = 0$. Utilizar el método de las imágenes para determinar:

   a) El potencial electrostático en todo el espacio.

   b) La densidad superficial de carga inducida en el plano conductor.

5. Se coloca una carga q entre dos planos conductores semi-infinitos conectados a tierra que forman un ángulo recto entre ellos. Describir la configuración de cargas imagen y calcular el potencial electrostático entre los planos conductores.

6. Se coloca un hilo rectilíneo uniformemente cargado con densidad lineal de carga μ entre dos planos conductores puestos a tierra (separados por una distancia L) y a una distancia d de uno de ellos. Describir la configuración de distribuciones lineales de carga imagen y calcular el potencial electrostático en la zona comprendida entre los planos conductores. Usar, para resumar los potenciales de las imágenes, la propiedad

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$$

7. Calcular la función de Green con condiciones Dirichlet en la región exterior a una esfera de radio a (obtenerla, si es posible, del resultado del ejercicio 3.). Utilizar dicha función de Green para hallar el potencial en el exterior de una esfera formada por un hemisferio conductor a potencial V y otro a potencial $-V$. Estudiar luego el potencial a grandes distancias de la esfera.

8. A partir del resultado del ejercicio 6. hallar la función de Green del operador laplaciano con condiciones de contorno Dirichlet, para la región del plano xy definida por $0 \leq x \leq L$. Usando la función de Green hallar el potencial cuando el borde $x = L$ es mantenido a potencial nulo, mientras que el borde $x = 0$ es mantenido a potencial V para $y > 0$ y a potencial $-V$ para $y < 0$.

9. Hallar la función de Green del operador laplaciano con condiciones de contorno Neumann en la región del espacio definida por $x \geq 0$. Utilizando la función de Green dar una expresión para el potencial en ausencia de cargas, cuando se impone como condición de contorno que el campo eléctrico en $x = 0$ es $\vec{E} = (E^x, 0, 0)$, con

$$E^x = \begin{cases} E_0(1 - y^2 - z^2) & \text{si} \quad y^2 + z^2 < a^2 \\ 0 & \text{si} \quad y^2 + z^2 > a^2 \end{cases}$$

Evaluar la expresión hallada para el potencial, a lo largo del eje x