Electromagnetismo 2016

Práctica 0 - Repaso de conceptos matemáticos

1. Probar las siguientes identidades

   a) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

   b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

   c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

2. Dado el campo vectorial $\vec{A}(\vec{r}) = (-y, x, 0)$,

   a) Calcular la circulación

   $$\oint_{\mathcal{C}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

   sobre $\mathcal{C}$ una circunferencia de radio a, centrado en el origen del plano $z = 0$ y recorrida en sentido antihorario.

   b) Calcular el flujo del rotor de $\vec{A}$

   $$\int_{\mathcal{S}} (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}$$

   sobre $\mathcal{S}$ una semiesfera (en $z > 0$) cuyo borde es la curva $\mathcal{C}$ y verificar el teorema de Stokes

3. Dado el campo vectorial $\vec{A}(\vec{r}) = (x, y, z)$,

   a) Calcular la integral de flujo

   $$\int_{\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

   sobre $\mathcal{S}$ una esfera de radio a y centrada en el origen.

   b) Calcular la integral de volumen de la divergencia de $\vec{A}$

   $$\int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\, d^3x$$

   sobre $\mathcal{V}$ el interior de la esfera y verificar el teorema de la divergencia.

4. Dada la siguiente sucesión de funciones

   $$g_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\alpha} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

   a) Desmostrar que $\lim_{\alpha \to 0} g_\alpha(x - x_0) = \delta(x - x_0)$. Es decir, probar que

   $$\lim_{\alpha \to 0} \int_a^b f(x) g_\alpha(x - x_0) = \begin{cases} f(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$

   b) Probar que

   $$\int_a^b f(x) \delta'(x - x_0) = \begin{cases} -f'(x_0) & \text{si } x_0 \in (a, b) \\ 0 & \text{si } x_0 \notin (a, b) \end{cases}$$

   c) Probar que, si $h(x)$ es una función con ceros en los puntos x_i^*, todos ellos ceros simples (*i.e.* $h(x_i^*) = 0$ y $h'(x_i^*) \neq 0$), entonces

   $$\delta(h(x)) = \sum_{x_i^*} \frac{\delta(x - x_i^*)}{h'(x_i^*)}$$

5. Dado el cambio de coordenadas cartesianas a esféricas

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\theta \cos\phi \\
y &= r \sin\theta \sin\phi \\
z &= r \cos\theta
\end{aligned}
$$

a) Hallar el Jacobiano de la transformación

b) Si una carga q se sitúa en $\vec{r}_0 = (1, 1, 0)$, escribir la densidad de carga usando funciones delta de Dirac en coordenadas esféricas.

c) Sobre la superficie de una esfera de radio a se distribuye una carga q. Escribir la densidad de carga en el espacio usando funciones delta de Dirac en coordenadas esféricas.

d) En un anillo de radio a se distribuye uniformemente una carga q. Escribir la densidad de carga en el espacio usando funciones delta de Dirac en coordenadas esféricas.

6. Usando el cambio de coordenadas esféricas y la regla de la cadena verificar que la forma del laplaciano en coordenadas esféricas es

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}
$$

7. El espacio de funciones en un intervalo $[a, b]$ es un espacio vectorial de dimensión infinita. Una base para dicho espacio es necesariamente un conjunto infinito de funciones linealmente independientes $B = \{f_n(x)/n \in \mathbb{Z}\}$. Dicha base es **ortonormal** si satisface que

$$
\int_a^b f_n^*(x) f_m(x) dx = \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}
$$

No es suficiente, sin embargo, que las infinitas funciones sean linealmente independientes para constituir una base del espacio de funciones. Para ello, además las funciones de la base deben satisfacer la condición de **completitud**

$$
\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n^*(x) f_n(x') = \delta(x - x')
$$

a) Usar la completitud y la ortogonalidad de las funciones de la base para mostrar que una función cualquiera $\Phi(x)$ puede desarrollarse como

$$
\Phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n f_n(x) \qquad \text{donde} \qquad c_n = \int_a^b f_n^*(x)\Phi(x) dx
$$

b) Considerar $B = \{f_n(x) = e^{2\pi i n x}/n \in \mathbb{Z}\}$, base del espacio de funciones en el intervalo $[0, 1]$, y mostrar que las funciones $e^{2\pi i n x}$ son ortonormales.

c) Considerar la función $\Phi(x) = x$, hallar los coeficientes c_n de su desarrollo y usarlos para evaluar las sumas parciales

$$
\Phi_M(x) = \sum_{n=-M}^{M} c_n e^{2\pi i n x}
$$

para $M = 1, 2, 10, 100$ y graficarlas.