Práctica 6: dinámica de campos relativistas. Simetrías.

1. A partir del lagrangiano de interacción de una partícula de masa m y carga q con un campo electromagnético A_μ externo (no dinámico),

$$L[x^\mu(\tau), \dot{x}^\mu(\tau)] = \frac{1}{2} m \dot{x}^\mu \dot{x}_\mu + q \dot{x}_\mu A^\mu \ ,$$

donde $\dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau$ es la tetravelocidad de la partícula:

a) Obtenga las ecuaciones de movimiento para la partícula y verifique que reproducen el resultado esperado, donde τ, en principio un parámetro arbitrario para la trayectoria, debe ser identificado con el tiempo propio de la partícula.

b) Encuentre los impulsos canónicos conjugados y dé una expresión para el hamiltoniano. ¿Es el mismo invariante de Lorentz?

c) Muestre que la transformación de gauge $A^\mu \to A^\mu + \partial^\mu \Lambda$ da lugar a un lagrangiano equivalente.

2. Considere las siguientes acciones:

i. Campo escalar real $\varphi(x)$,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^\mu \varphi \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2 \right) \ ,$$

ii. campo escalar complejo $\Phi(x)$,

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x \left(\partial^\mu \bar{\Phi} \partial_\mu \Phi - m^2 \bar{\Phi} \Phi \right) \ ,$$

iii. campo vectorial masivo $B_\mu(x)$,

$$S = \frac{1}{4} \int d^4x \left(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - 2m^2 B^\mu B_\mu \right) \ ,$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$.

a) Decida si son invariantes de Lorentz. Escriba la ley de transformación infinitesimal de los campos.

b) Encuentre las ecuaciones de movimiento y las condiciones de contorno para estos sistemas teniendo en cuenta los términos de borde al integrar por partes. Para los casos relativistas observe qué forma toman las ecuaciones al hacer la sustitución $i\partial_\mu \to p_\mu$.

c) Verifique que todas las acciones propuestas dan origen a ecuaciones de movimiento lineales. Resuelva las ecuaciones de movimiento transformando Fourier al espacio de impulsos y encuentre en cada caso la relación de dispersión $p_0(\vec{p})$.

3. Uno de los intentos para evitar las divergencias ultravioletas causadas por la presencia de cargas puntuales en la teoría electromagnética de Maxwell fue el de introducir electrodinámicas no lineales. La densidad lagrangiana de Born-Infeld se define como

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{E_0^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{\det \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{E_0} F_{\mu\nu} \right)} \right) \ ,$$

donde E_0 es una constante que, como se verá mas abajo, tiene el significado de un campo eléctrico máximo.

a) Muestre que la expresión en términos de campos E, B es

$$\mathcal{L}_{BI} = \frac{E_0^2}{4\pi}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{E_0^2} - \frac{(E \cdot B)^2}{E_0^4}}\right) .$$

b) Pruebe que si los campos E y B son mucho menores que la escala E_0, la densidad lagrangiana $\mathcal{L}_{BI}$ se reduce a la de la electrodinámica ordinaria.

c) Obtenga las ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso $B = 0$ (que es, por ejemplo, el caso de una carga puntual en el origen). Determine la relación constitutiva $D(E)$.

d) Encuentre la solución de las ecuaciones de movimiento del item anterior para el caso en el que hay simetría esférica.

e) Muestre que el valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas es finito, y su valor máximo está dado por la constante E_0.

f) Calcule la autoenergía de una partícula puntual y compare con el caso Maxwell.

4. Partiendo de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = i\hbar c\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc^2\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

use la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ para escribir una densidad lagrangiana invariante frente a las transformaciones de gauge locales

$$\psi \to \psi e^{i\alpha(x)} , \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\alpha(x)} , \quad A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) .$$

Obtenga las ecuaciones de movimiento correspondientes.

5. Escriba el lagrangiano invariante de Lorentz más general en 4 dimensiones para un campo escalar real $\phi(x)$, si además la teoría debe ser invariante ante transformaciones de escala $x^\mu \to \lambda\, x^\mu$ y $\phi \to \lambda^{-\Delta}\phi$ (Δ es la llamada *dimensión de escala* de ϕ). Encuentre la corriente conservada asociada a la invariancia de escala.

6. Considere la densidad lagrangiana del modelo de Higgs abeliano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \overline{D^\mu\phi}D_\mu\phi - m^2\overline{\phi}\,\phi - \lambda(\overline{\phi}\,\phi)^2 ,$$

donde $\lambda > 0$.

a) Muestre que es invariante ante las transformaciones de gauge locales $A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x)$, $\phi(x) \to \phi(x)e^{ie\Lambda(x)}$.

b) Encuentre los estados de mínima energía, que son los mínimos del potencial

$$V[\phi] = m^2\overline{\phi}\,\phi + \lambda(\overline{\phi}\,\phi)^2 .$$

Muestre que para $m^2 < 0$ hay una familia de estados fundamentales equivalentes que se relacionan entre sí por rotaciones en el plano complejo ϕ. En la configuración de menor energía, el sistema estará en alguno de esos estados: muestre entonces que el estado fundamental no mantiene la simetría de gauge del sistema.

c) Complete el estado de vacío especificando el valor del campo de gauge.

d) Considere ahora al sistema en una de las configuraciones de estado fundamental, digamos $A_\mu = 0$, $\phi = f \in \mathbb{R}$, y estudie perturbaciones pequeñas de los campos alrededor de este estado. Haciendo una transformación de gauge con Λ el opuesto de la perturbación en la dirección angular del plano complejo ϕ, muestre que la perturbación en la dirección radial del plano complejo ϕ es masiva, y que aparece un término de masa para el campo de gauge.

7. Considere la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \overline{D^\mu \phi} D_\mu \phi - \lambda \left(|\phi|^2 - f^2 \right)^2 ,$$

equivalente a la del problema anterior.

a) Obtenga las ecuaciones de movimiento.

b) Para el caso de un campo magnético estático con simetría cilíndrica alrededor del eje z, escriba la integral que da energía por unidad de longitud (en z).

c) Muestre que las soluciones con energía por unidad de longitud finita tienen, para $r \to \infty$, el comportamiento $|\phi| \to f$, $D_\mu \phi \to 0$ más rápido que $1/r$. Observe que en ese caso una solución fuera del origen es $\phi = f e^{ien\varphi}$, con $n \in \mathbb{Z}$. Notando que se trata de una transformación de gauge de una de las soluciones de vacío, obtenga el correspondiente campo de gauge.

d) Para tener una solución bien definida en el origen, module la propuesta anterior con funciones de r que se anulen en $r = 0$.

e) Calcule para la solución obtenida el flujo del cmpo magnético a través del plano xy, mostrando que está cuantificado.