Práctica 5: partículas relativistas y campos

1. Sean $(\check{e}_\mu)^\nu \equiv \delta^\nu_\mu$ las componentes de los versores en las direcciones $\mu = 0, 1, 2, 3$. Considere un vector arbitrario p de componentes $(p^\mu) = (p^0, \vec{p})$

a) Encuentre una rotación $R(\vec{p})$ tal que $R(\vec{p})\,\vec{p} = |\vec{p}|\,\check{e}_3$.

b) Si p es tipo tiempo, encuentre la transformación de Lorentz que lo lleva a la forma $m\,\check{e}_0$, donde $m^2 = p^2$.

c) Si p es tipo espacio, encuentre la transformación de Lorentz que lo lleva a la forma $m\,\check{e}_3$, donde $m^2 = -p^2$.

d) Si p es tipo luz, encuentre la transformación de Lorentz que lo lleva a la forma $E\,(\check{e}_0 + \check{e}_3)$, donde $E = p^0$.

2. Considere dos partículas de masas m_1, m_2 con momentos $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ en el sistema de laboratorio $\mathcal{O}$.

a) Encuentre el boost a un sistema $\mathcal{O}'$ en el centro de momentos (tal que $\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{0}$).

b) Escriba los tetramomentos p_1', p_2' en $\mathcal{O}'$ en términos de p_1, p_2.

3. Una partícula con energía en reposo E_0 es acelerada a la energía E y choca con otra similar que se encuentra en reposo. Calcule la energía máxima disponible para la producción de partículas en el estado final.

4. Muestre que la aniquilación de un par electrón-positrón en un fotón es incompatible con la conservación de la energía y la cantidad de movimiento. ¿Qué pasa entonces con la energía del sistema en la aniquilación?

5. Una partícula de masa m y energía cinética T_0 choca elásticamente con una idéntica en reposo. Calcule el ángulo θ de dispersión de las partículas luego del choque en términos de la energía cinética de alguna de ellas. Analice en qué condiciones el ángulo se minimiza.

6. Escriba las ecuaciones de movimiento y determine la correspondiente trayectoria de una partícula de carga q y masa m en presencia de un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = (0, 0, E)$.

7. El tensor de energía-momentos de un sistema de partículas puede definirse como

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_n P^\mu_n \,\frac{d}{dt} x^\nu_n(t)\; \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))\,,$$

donde $\vec{x}_n(t)$ es la trayectoria de la partícula n-ésima y $x^0_n(t) = t$.

a) Muestre que puede escribirse

$$T^{\mu\nu}(x) = \sum_n \frac{P^\mu_n\, P^\nu_n}{E_n}\; \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))\,.$$

b) Reescríbalo de modo de poner en evidencia su carácter tensorial.

c) Obtenga la expresión de su tetradivergencia $\partial_\mu T^{\mu\nu}$ y muestre que para la partícula libre es nula (T es una cantidad conservada).

8. Considere campos electromagnéticos sin fuentes confinados en una región finita del espacio. Muestre que las integrales tridimensionales espaciales de las componentes T^{00} y T^{0i} del tensor simétrico de energía-momentos electromagnético transforman como las componentes de un tetravector independiente del tiempo.