

Práctica 4: formulación covariante de la electrodinámica

1. a) Muestre que la expresión del campo eléctrico de una carga puntual q en movimiento con velocidad v en la dirección del eje z , en el instante en que la carga coincide con el origen, es

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q(1-v^2)}{r^2(1-v^2\sin^2\theta)^{3/2}} \vec{r}$$

donde \vec{r} es el vector del origen del sistema \mathcal{O} (donde la partícula está en movimiento) al punto de observación y θ es el ángulo entre \vec{r} y el eje z , medido también en \mathcal{O} .

- b) Dé la expresión del campo eléctrico en función del tiempo. Estudie el límite $v = 1$.
 c) Encuentre la expresión del campo magnético generado por la misma carga.
 d) Verifique explícitamente que se satisface la ley de Gauss.
2. Encuentre las fórmulas de transformación de \vec{E} y \vec{B} ante un boost general con velocidad \vec{v} .
3. a) Muestre que $B^2 - E^2$ es un invariante de Lorentz. ¿Cuál es su expresión en notación tensorial?
 b) Verifique que la forma covariante del conjunto de ecuaciones de Maxwell homogéneas es equivalente a

$$\partial^\nu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0.$$

4. En un sistema \mathcal{O} hay campos \vec{E}, \vec{B} ortogonales entre sí.
 a) Muestre son ortogonales en cualquier otro sistema.
 b) Si son uniformes y estáticos, determine si existe un \mathcal{O}' en movimiento relativo uniforme respecto a \mathcal{O} en el cual alguno de los dos se anule.

5. Un dipolo magnético clásico puntual \vec{m} , en reposo en el origen de un sistema \mathcal{O} , da lugar a un potencial vector

$$\vec{A} = \mu_0 \kappa' \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$$

y a ningún potencial escalar.

- a) Muestre que si el dipolo se mueve con velocidad \vec{v} , $v \ll 1$, se observa un momento dipolar eléctrico \vec{p} asociado con el momento magnético dado por

$$\vec{p} \sim \vec{v} \times \vec{m}.$$

- b) Muestre que la energía de interacción entre el dipolo móvil y unos campos externos \vec{E} y \vec{B} es la misma que la que se hubiera obtenido mediante el cálculo del campo magnético \vec{B}' en el sistema de referencia \mathcal{O}' del momento magnético.
6. Una barra infinitamente larga y de radio R está cargada uniformemente en volumen con una densidad de carga ρ . Calcule de dos maneras distintas los campos eléctrico y magnético en un sistema de referencia que se mueve a velocidad v paralelamente a la barra:
 a) A partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema,

- b) Por transformación directa de los campos.
7. En un cierto sistema de referencia un campo eléctrico estático uniforme E_0 es paralelo al eje x y una inducción magnética estática uniforme $B_0 = \alpha E_0$ ($\alpha > 1$) se encuentra en el plano (x, y) formando un ángulo θ con el eje x . Determine la velocidad relativa de un sistema de referencia en el cual los campos eléctricos y magnéticos son paralelos. ¿Cuáles son los campos en ese sistema para $\theta \ll 1$?