Práctica 2: invarianza relativista

1. (a) Si usa la convención de unidades $c = 1$, seleccione las unidades fundamentales de la mecánica y determine las dimensiones de las siguientes magnitudes: longitud, tiempo, intervalo, masa, velocidad, impulso, aceleración, fuerza y energía.
   (b) Si usa unidades naturales $\hbar = c = 1$, repita el análisis anterior.
   (c) Si usando $c = 1$ encuentra una longitud $l = 5s$, convierta l a metros. Convierta también la energía $E = 10^{-20}$ g a eV.

2. Con las constantes fundamentales de naturaleza $G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2}$, $c = 2.998 \times 10^8 \frac{m}{s}$, $\hbar = 1.055 \times 10^{-34} \frac{kg\ m^2}{s}$ y $k_B = 1.38 \times 10^{-23} \frac{J}{K}$, construir magnitudes que tengan unidades de masa, tiempo, longitud, energía y temperatura. (Lo que construirán, es la famosa escala de Planck. Estos números representan escalas en las cuales los efectos de la gravedad cuántica relativista pueden ser importantes).

3. Probar que el el intervalo espacio-temporal es invariantes frente a una transformación de lorentz en una dirección.

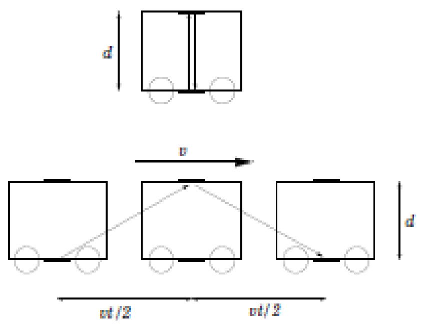

Figure 1: El reloj de luz en un tren en movimiento visto por un observador $\mathcal{O}'$ dentro del tren (arriba) y un observador $\mathcal{O}$ en el andén (abajo).

4. Considérese un tren que se mueve con velocidad v en movimiento uniforme rectilíneo con respecto al andén de una estación. Un pasajero en el tren $\mathcal{O}'$ dispone de un reloj de luz, que consiste en dos espejos colocados uno encima del otro a una altura d y un pulso de luz que viaja continuamente entre los dos espejos. Por lo tanto, $\mathcal{O}'$ medirá el tiempo $\Delta t'$ que tarda la luz en subir y bajar entre los dos espejos. Un observador $\mathcal{O}$ en el andén verá este mismo fenómeno de manera distinta: para él la luz sale del espejo de abajo, pero llega al espejo de arriba después de un tiempo $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia $v\Delta t/2$ y otra vez al espejo de abajo después de un tiempo total $\Delta t/2$ cuando el tren se ha desplazado una distancia total $v\Delta t/2$ (véase Figura 1, siendo Δt el tiempo que el pulso desde que sale del espejo y vuelve al mismo). Para $\mathcal{O}$, la luz recorre una trayectoria más larga y, dado que la velocidad de la luz es la misma que para el pasajero, habrá pasado más tiempo entre que la luz saliese y llegase otra vez al espejo de abajo.

   Encontrar la relación entre los tiempos medidos por $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$.

5. Barras en movimiento

   Considere un sistema de referencia $\mathcal{S}$ fijo y otro $\mathcal{S}'$ que se mueve a velocidad constante respecto a $\mathcal{S}$.

   (a) Considere una varilla a lo largo del eje x y en reposo respecto a un sistema $\mathcal{S}$. Como está en reposo, las coordenadas de posición de sus extremos x_1 y x_2 son independientes del tiempo. En consecuencia,

   $$L_0 = x_2 - x_1 \tag{1}$$

   es la *longitud de la varilla en reposo o longitud propia* de la varilla. Determine la longitud de esta varilla respecto de un sistema de referencia $\mathcal{S}'$ que se mueve a velocidad constante respecto de $\mathcal{S}$.

   (b) Ahora, considere también una varilla a lo largo del eje x' y en reposo respecto al sistema $\mathcal{S}'$. Por la misma razón que el inciso anterior

   $$L_0 = x_2' - x_1' \tag{2}$$

   se denomina *longitud de la varilla en reposo o longitud propia* de la varilla en $\mathcal{S}'$. Determine la longitud de esta varilla respecto de un sistema de referencia $\mathcal{S}$ si esta se mueve a velocidad constante respecto de $\mathcal{S}$.

   (c) Discuta los resultados.

6. Una regla de longitud L está en reposo en un sistema en el cual está orientada a un ángulo θ con respecto al eje x. ¿Cuáles son la longitud L' y orientación θ' medidas por un observador moviéndose a velocidad $\vec{v}$ paralela al eje x con respecto al primer sistema?

7. (a) Considere un cohete que se mueve con velocidad $\vec{v}$ con respecto a un dado sistema, que llamaremos el laboratorio. El cohete emite un pulso de luz a ángulos polar θ' y azimutal ϕ' con respecto a la dirección de $\vec{v}$. ¿Cuál es la dirección angular del pulso en el sistema del laboratorio?

   (b) Considere una partícula en reposo en el sistema del cohete, que emite luz uniformemente en todas las direcciones. Muestre que la luz que en el sistema del cohete se emite hacia el hemisferio delantero será vista desde el laboratorio concentrada en un cono hacia adelante con eje en la dirección de movimiento.

8. A las doce del mediodía una nave espacial pasa frente a la Tierra a una velocidad de $0.8c$. Los tripulantes de la nave sincronizan sus relojes con los terrestres disponiéndolos en la hora 12:00.

   (a) A las 12:30 según un reloj situado en la nave, ésta pasa por delante de una estación interplanetaria que se encuentra en reposo relativo a la Tierra y cuyos relojes se nalan el tiempo de la Tierra. ¿Qué hora es en la estación?

   (b) ¿Cuál es la distancia propia entre la Tierra y la estación?

   (c) A las 12:30 hora de la nave se establece comunicación con la Tierra desde la nave. ¿Cuál es la hora de la Tierra cuando se recibe la señal?

   (d) Si desde la Tierra se contesta inmediatamente, ¿a qué hora de la nave se recibirá la respuesta?

9. Un tren debe atravesar un puente a velocidad relativista. Una persona ha colocado bombas en los extremos del puente, que hace estallar *simultáneamente* (observa la explosión desde afuera) cuando ve al tren ocupar *exactamente* la longitud del puente. Un pasajero del tren, advertido del atentado, verá al puente contraerse, por lo que se ubica en el primer vagón y espera pasar el puente a salvo. Describa con precisión la posición y tiempo de las explosiones vistas desde el tren, y diga si el pasajero pasa antes de que ocurra la explosión.

10. Un sistema de coordenadas $\mathcal{O}'$ se mueve a velocidad $\vec{v}$ relativa a otro sistema $\mathcal{O}'$. En $\mathcal{O}'$ una partícula tiene velocidad $\vec{u}'$ y aceleración $\vec{a}'$. Encuentre la ley de transformación de Lorentz para aceleraciones, y muestre que en el sistema $\mathcal{O}$ las componentes de la aceleración paralela y perpendicular a $\vec{v}$ son

$$a_{\parallel} = \gamma^{-3}\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}\right)^{-3} a'_{\parallel}\,, \tag{3}$$

$$\vec{a}_{\perp} = \gamma^{-2}\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\vec{u}'}{c^2}\right)^{-3}\left(\vec{a}'_{\perp} + \frac{\vec{v}}{c^2}\times(\vec{a}'\times\vec{u}')\right). \tag{4}$$

11. Considere la siguiente afirmación: La Relatividad tiene que estar mal. Si una barra de 20 m transportada en la dirección de su longitud por un corredor, tan rápido que la misma parece tener 10 m en el sistema de laboratorio, en algún instante entraría enteramente en una habitación de 10 m de longitud. Observe la situación desde el punto de vista del corredor: para él la habitación parece contraída a la mitad de su longitud. ¿Cómo puede una barra de 20 m caber en una habitación de 5 m? Explique como la Relatividad trata a la barra y a la habitación sin contradicción. Para aclarar la paradoja, haga un diagrama espacio-temporal en cada uno de los sistemas, indicando eventos relevantes y líneas de simultaneidad en cada caso.

12. Un tren que mide 100 m circula a la increíble velocidad de $\sqrt{3}/2$ veces la velocidad de la luz. El tren pasa por una estación cuyo andén mide 50 m y posee pasos a nivel con barreras a ambos extremos. El jefe de estación, que se encuentra en el extremo del andén por el que entra el tren, hace subir la barrera que hay a su lado y hace bajar la barrera del otro extremo en el mismo instante en que la cola del tren pasa frente a él. ¿Corren algún peligro las personas que intenten cruzar la vía por los pasos a nivel mientras la barreras estén subidas? Obviamente, la conclusión no puede depender del observador ¿Cómo es la película de los acontecimientos según el jefe de estación? ¿Y según el maquinista del tren?

13. Paradoja de los gemelos

14. Considere los rayos de luz emitidos por una estrella que alcanza la tierra perpendicularmente a su velocidad v (como medida en un sistema fijo a la estrella). Usando el teorema de adición de velocidades, calcule el ángulo de incidencia de dichos rayos como vistos en el sistema fijo a la Tierra.