Práctica 1: Ecuaciones de Maxwell

1. Muestre que las ecuaciones de Maxwell implican la conservación local de la carga.
2. Una onda plana incide en forma normal sobre una pantalla perfectamente absorbente. Use la ley de conservación del impulso lineal para mostrar que la presión de radiación ejercida sobre la pantalla es igual a la energía del campo por unidad de volumen.
3. Muestre que una onda plana polarizada linealmente puede escribirse como la combinación lineal de dos ondas polarizadas circularmente de igual amplitud y helicidad opuesta.
4. Un paquete unidimensional de ondas planas aproximadamente monocromático tiene la forma instantánea $u(x;0) = f(x)e^{ik_0x}$. Estudie la amplitud $|A(k)|^2$ y las desviaciones medias cuadráticas Δx y Δk y verifique la desigualdad $\Delta x\Delta k \geq \frac{1}{2}$ para
   (a) $f(x) = Ne^{-\alpha|x|/2}$
   (b) $f(x) = Ne^{-\alpha^2x^2/4}$
   (c) $f(x) = N(1-\alpha|x|)\Theta(1-\alpha|x|)$
   (d) $f(x) = N\Theta(a-|x|)$
5. Una onda electromagnética monocromática plana polarizada linealmente incide en forma normal sobre la superficie de un medio no permeable. Calcule la amplitud y la fase de la onda reflejada. Discuta los casos límite de acuerdo a la conductividad del medio.
6. (a) Demostrar que la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

   tiene la solución general de D'Alambert

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}f(t-x/v) + \frac{1}{2}f(t+x/v) + \frac{v}{2}\int_{t-x/v}^{t+x/v} g(t')dt' \tag{2}$$

   donde las condiciones de contorno están especificadas por los valores de ψ y de $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ en $x=0$ para todo tiempo:

$$\psi(0,t) = f(t) \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0,t) = g(t). \tag{3}$$

   (b) Cuál es la solución correspondiente a las condiciones iniciales

$$\psi(x,0) = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x,0) = g(x). \tag{4}$$

   Ahora suponga $v = 1$, y resuelva la ecuación (1) con las siguiente condiciones de contorno:
   (c) $\frac{\partial\psi}{\partial x}(t,0) = \frac{\partial\psi}{\partial x}(t,\pi) = 0$ (Condición de contorno de Neuman en ambos extremos).
   (d) $\psi(t,x) = \psi(t,x+2\pi)$.
   (e) $\psi(t,0) = \psi_i$ y $\psi(t,\pi) = \psi_f$ (Condición de contorno de Dirichlet en ambos extremos).
   Los incisos (6c), (6d) y (6e), quizás sea conveniente utilizar separación de variables.

7. Verifique que las condiciones de gauge de Lorentz, Coulomb, temporal y axial desacoplan las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas. Muestre que pueden elegirse potenciales que satisfagan alguna de estas condiciones; determine en cada caso la simetría de gauge remanente, las ecuaciones que satisfacen los potenciales.

8. Funciones de Green

   (a) Obtener la función de Green de la ecuación de Poisson en 3 dimensiones.

   (b) Obtener la función de Green de la ecuación

   $$(-\nabla^2 + m^2)\phi = \rho, \tag{5}$$

   con $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

   (c) Obtener las diferentes funciones de Green (retardada y avanzada) de la ecuación

   $$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = -4\pi\rho. \tag{6}$$

   (Ayuda: Usar transformadas de Fourier.)