

Luis N. Epele, H. Fanchiotti  
y C. A. García Canal

# Electrodinámica

Alianza  
Editorial

Reservados todos los derechos. El contenido de esta obra está protegido por la Ley, que establece penas de prisión y/o multas, además de las correspondientes indemnizaciones por daños y perjuicios, para quienes reprodujeran, plagiaran, distribuyeren o comunicasen públicamente, en todo o en parte, una obra literaria, artística o científica, o su transformación, interpretación o ejecución artística fijada en cualquier tipo de soporte o comunicada a través de cualquier medio, sin la preceptiva autorización.

© Luis N. Epele, Huner Fanchiotti y Carlos A. García Canal  
© Alianza Editorial, S. A., Madrid, 1996  
Calle Juan Ignacio Luca de Tena, 15; 28027 Madrid; teléf. 393 88 88  
ISBN: 84-206-8160-1  
Depósito legal: M. 25.487-1996  
Impreso en EFCA, S. A.  
Parque Industrial "Las Monjas". Torrejón de Ardoz - 28850 Madrid  
Printed in Spain

# ÍNDICE

PREFACIO .....	13
CAPÍTULO 1. FUNDAMENTOS .....	15
<b>1.1 Introducción</b> .....	15
<b>1.2 Leyes de conservación</b> .....	18
1.2.1 Conservación de la energía, 18.–1.2.2 Conservación del impulso lineal, 20.	
<b>1.3 Ondas electromagnéticas</b> .....	22
<i>Paréntesis ondulatorio</i> , 22.–1.3.1 Ondas a lo largo de conductores, 24.– <i>Ondas estacionarias</i> , 26.– <i>Ondas escalares</i> , 27.– <i>Ondas esféricas</i> , 27.–1.3.2 Ondas planas, 28.– <i>Vector de Poynting complejo</i> , 31.–1.3.3 Polarización, 33.– <i>Parámetros de Stokes</i> , 36.–1.3.4 Paquete de ondas: velocidad de grupo, 39.–1.3.5 Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas, 41.–a) <i>Condiciones de contorno</i> , 42.– <i>Componente tangencial del campo <math>\vec{E}</math></i> , 42.– <i>Componente tangencial del campo <math>\vec{H}</math></i> , 43.– <i>Componente normal del campo <math>\vec{D}</math></i> , 44.– <i>Componente normal del campo <math>\vec{B}</math></i> , 44.–b) <i>Leyes de Snell</i> , 44.– <i>Ángulo de Brewster</i> , 48.– <i>Reflexión total</i> , 48.–c) <i>Presión de las ondas electromagnéticas</i> , 49.–1.3.6 Problemas, 51.	
<b>1.4 Ecuaciones de Maxwell en conductores</b> .....	56

Aplicación: Efecto pelicular, 57.–1.4.1 Ondas en medios conductores, 59.–  
a) *Modelo de Drude*, 61.–b) *Plasma tenue*, 62.–1.4.2 Problemas, 63.

## 1.5 Ondas en dieléctricos isótropos . . . . . 64

1.5.1 Dispersión de la permitividad dieléctrica, 68.–*Propiedades de  $\epsilon'$  ( $\omega$ )*,  
70.–*Apéndice por causalidad*, 72.–1.5.2 Problemas, 73.

## 1.6 Ecuación de ondas inhomogénea . . . . . 75

1.6.1 Potenciales electromagnéticos, 75.–a) *Gauge de Coulomb*, 77.–b) *Gauge de Lorentz*, 78.–1.6.2 Función de Green del D'Alambertiano, 78.–*Ley de Biot-Savart*, 82.–1.6.3 Campos de radiación, 84.–*Cálculo de la potencia radiada*, 88.–*Antenas*, 90.–1.6.4 Problemas, 91.

## 1.7 Apéndice preparatorio . . . . . 94

1.7.1 Campos cuasiestacionarios, 94.–1.7.2 Ley de inducción de Faraday, 95.–1.7.3 Corriente de desplazamiento de Maxwell, 96.–1.7.4 Fuerza de Lorentz, 97.

## 1.8 Apéndice sobre el tensor de Maxwell . . . . . 97

## 1.9 Apéndice: definición de un campo vectorial . . . . . 101

## 1.10 Apéndice sobre la transformada de Fourier . . . . . 103

## 1.11 Apéndice delta de Dirac . . . . . 104

## 1.12 Apéndice sobre sistemas de unidades . . . . . 105

a) *Dimensiones*, 106.–b) *Sistemas de unidades electromagnéticas*, 107.

## 1.13 Apéndice poético . . . . . 109

## CAPÍTULO 2. ASPECTOS FORMALES . . . . . 111

### 2.1 Invarianza relativista . . . . . 111

2.1.1 Introducción, 111.–2.1.2 Experimento clave, 112.–2.1.3 Postulados de la relatividad, 114.–2.1.4 Transformaciones de Lorentz, 115.–2.1.5 Consecuencias de las transformaciones de Lorentz, 120.–a) *Contracción de longitudes*, 120.–b) *Dilatación temporal*, 122.–c) *Efecto Doppler*, 123.–d) *Teorema de adición de velocidades*, 126.–2.1.6 Elemento de línea o intervalo, 126.–2.1.7 Problemas, 129.

### 2.2 Grupo de Lorentz . . . . . 129

2.2.1 Tensores, 130.–a) *Covariantes y contravariantes*, 130.–b) *Tensor métrico*, 133.–c) *Tensor de Levi-Civita*, 135.–2.2.2 Campos tensoriales, 137.–a) *Campos escalares*, 137.–b) *Campos vectoriales*, 137.–c) *Campos tensoriales en general*, 139.–d) *Convención de suma de Einstein*, 139.–2.2.3 Teoría de grupos y transformaciones de Lorentz, 140.–a) *Definición de un grupo*, 140.–

	<i>b) Clasificación de grupos, 140.–c) Representación de un grupo, 141.–d) Grupo de Lorentz restringido, 142.–e) Representaciones del grupo de Lorentz restringido, 145.–2.2.4 Problemas, 148.</i>	
<b>2.3</b>	<b>Formulación covariante de la electrodinámica</b> . . . . .	149
	2.3.1 Tetravector densidad de corriente, 149.–2.3.2 Tensor de campo electromagnético, 152.–2.3.3 Transformaciones de Lorentz de los campos, 154.–Propiedades de los campos bajo $P$ y $T$ , 156.–2.3.4 El potencial electromagnético, 159.–2.3.5 Problemas, 161.	
<b>2.4</b>	<b>Partículas relativistas y campos</b> . . . . .	163
	2.4.1 Mecánica relativista, 163.–2.4.2 Potenciales de Liénard-Wiechert, 176.–2.4.3 Problemas, 184.	
<b>2.5</b>	<b>Principio de mínima acción</b> . . . . .	184
	2.5.1 Problemas, 195.	
<b>2.6</b>	<b>Simetrías</b> . . . . .	196
	2.6.1 Simetrías de campos clásicos, 200.–2.6.2 Simetrías geométricas, 204.–2.6.3 Simetrías internas, 210.–2.6.4 Simetrías de gauge, 213.–2.6.5 Ruptura de simetría, 220.–2.6.6 Problemas, 229.	
<b>2.7</b>	<b>Apéndice con elementos del análisis funcional</b> . . . . .	229
	<i>Diferencial funcional, 232.–Extremos de una funcional, 232.</i>	
<b>CAPÍTULO 3. APLICACIONES</b> . . . . .		235
<b>3.1</b>	<b>Guías de onda</b> . . . . .	235
	<i>a) Modo transversal eléctrico, 237.–b) Modo transversal magnético, 240.–c) Modo transversal electromagnético, 241.–d) Transporte de energía en la guía, 242.–3.1.1 Problemas, 243.</i>	
<b>3.2</b>	<b>Cavidades resonantes</b> . . . . .	245
	<i>Modo transversal eléctrico, TE, 245.–Modo transversal magnético, TM, 246.–Q de la cavidad, 246.–3.2.1 Problemas, 248.</i>	
<b>3.3</b>	<b>Óptica</b> . . . . .	249
	3.3.1 Principio de Huygens-Fresnel, 250.–3.3.2 Difracción, 250.– <i>a) Integral de Kirchoff, 251.–b) Difracción por una abertura, 253.–Difracción de Fraunhofer, 254.–Difracción de Fresnel, 255.–3.3.3 Óptica de cristales, 256.–Electro-óptica y magneto-óptica, 260.–Efecto Kerr, 260.– Efecto Pockels, 262.–Efecto Faraday, 262.–3.3.4 Problemas, 263.</i>	

<b>3.4 Superconductividad</b> . . . . .	267
<i>Superconductores y corriente alternada, 266.–3.4.1 Propiedades magnéticas de los superconductores, 267.–a) Efecto Meissner, 268.–b) Superconductores Tipo II, 268.–3.4.2 Ecuaciones de London, 270.–3.4.3 Problemas, 271.</i>	
<b>3.5 Radiación de una carga en movimiento</b> . . . . .	271
<i>Régimen no relativista, 272.–Régimen relativista, 273.–Tratamiento general, 277.–Campo de reacción, 281.–3.5.1 Problemas, 287.</i>	
<b>3.6 Dispersión</b> . . . . .	288
<i>3.6.1 Por electrones libres, 289.–3.6.2 Por electrones ligados, 292.–3.6.3 Por objetos macroscópicos, 294.–3.6.4 Problemas, 301.</i>	
<b>3.7 Interacción de la radiación con la materia</b> . . . . .	301
<i>3.7.1 Difracción de rayos X, 302.–La constante dieléctrica, 304.–Solución de las ecuaciones, 305.–La periodicidad del cristal, 308.–3.7.2 Problemas, 309.</i>	
<b>3.8 Pasaje de partículas rápidas a través de la materia</b> . . . . .	309
<i>3.8.1 Caso no relativista, 309.–3.8.2 Caso relativista, 313.–3.8.3 Radiación Cherenkov, 315.–3.8.4 Problemas, 316.</i>	
<b>3.9 Movimiento de partículas cargadas</b> . . . . .	317
<i>3.9.1 Magnetohidrodinámica, 320.–3.9.2 Presión magnética, 321.–Flujo entre placas paralelas, 323.–3.9.3 Problemas, 326.</i>	
<b>BIBLIOGRAFÍA</b> . . . . .	327

*Para Elba, Luisa y Graciela*

# PREFACIO

A aquellas Tres Cosas que los Antiguos  
consideraban imposibles  
debería sumársele esta cuarta:  
hallar un Libro Impreso sin erratas.

ALONSO DE CARTAGENA (1384-1456)

El prefacio de la mayoría de los libros, sobre todo el de los textos de estudio, comienza con un intento de justificar por qué fue escrito. Esta, nuestra *Electrodinámica*, probablemente no escape a esa rutina. Sólo que no diremos que fue escrito porque hemos coleccionado en ella la experiencia del dictado de la correspondiente asignatura en reiteradas oportunidades; aunque sea cierto. Tampoco diremos que la hicimos porque no hay en la literatura científica en castellano un libro similar; aunque también puede ser cierto. La razón más profunda es que adquirimos el compromiso con José Luis Sánchez Gómez y gracias a su gestión, con Alianza Editorial.

A pesar de que muchas veces nos hemos sentido arrepentidos por asumir este compromiso, podemos decir ahora que valió la pena. Valió la pena hasta por razones bastante egoístas, ya que concretar este libro nos permitió aprender y mucho.

Nos impusimos como objetivo básico lograr un adecuado balance entre la formalización de los principios básicos y la presentación de las aplicaciones; esperamos haberlo conseguido.

El texto quedó finalmente dividido en tres capítulos. El primero está dedicado a introducir los fundamentos de la Electrodinámica clásica partiendo de las ecuaciones de Maxwell. El capítulo incluye varios *apéndices de lectura obligatoria*. En uno de ellos se proveen las bases fenomenológicas de la teoría de Maxwell. En otro se discuten los sistemas de unidades con la esperanza de aclarar definitivamente, o casi, este problema tradicional del aprendizaje del electromagnetismo. En efecto, todas las ecuaciones del texto están escritas en un sistema absolutamente genérico, de modo que para obtener resultados numéricos hay que especializarlas en el sistema que se prefiera. También incluimos un «Apéndice poético» cuyo contenido instamos encarecidamente a memorizar.

El segundo capítulo está dedicado a los aspectos formales del electromagnetismo. Se discute fundamentalmente la invarianza relativista y la simetría de gauge, con la intención de abrir el camino a la visión contemporánea de las interacciones fundamentales de la Naturaleza.



El último capítulo contiene varias aplicaciones de la teoría electromagnética en diferentes ámbitos y con distintos grados de dificultad formal. La elección de estas aplicaciones se basó en consideraciones de tradición, de gusto personal y también de tiempo para cumplir con el compromiso que mencionamos arriba. . .

Para no diferenciarnos mucho de nuestros predecesores y porque pensamos que hacen absolutamente falta, hemos incluido problemas que proponemos como único medio de detectar si el texto generó conocimiento al lector. Es necesario resolverlos. La gran mayoría de los problemas que planteamos fueron elegidos de entre los propuestos en los libros consultados. En esos casos hemos indicado la fuente a través de una sigla explicitada en la lista de esos libros, incluyendo además la numeración correspondiente al problema en la publicación original. De esta forma evitamos intentar «inventar» lo ya «inventado» y además impulsamos a consultar las obras que nosotros hemos consultado. Se trata ciertamente de inducir un enriquecimiento de saberes, aprovechando la «jurisprudencia» previa.

Este será un prefacio con conclusiones. En efecto, luego de leerlo por última vez antes de enviar todo el material al editor nos dijimos: a este libro de electrodinámica le hace falta una segunda edición inmediata, corregida y aumentada. ¿Aparecerá alguna vez?

# Capítulo I

## FUNDAMENTOS

### 1.1. INTRODUCCIÓN

El estudio teórico de los fenómenos electromagnéticos a partir del ordenamiento adecuado de las evidencias experimentales conduce a una formalización ideal, coherente y simple de la física involucrada en términos de axiomas (leyes o postulados): las *ecuaciones de Maxwell* del electromagnetismo. Estas son ecuaciones diferenciales vectoriales y tienen en el electromagnetismo la misma jerarquía que las leyes (o axiomas o postulados) de Newton en la mecánica clásica. Por otra parte, están en la base de la teoría de la relatividad, que surgió a partir de la comprensión de las propiedades de transformación de las ecuaciones de Maxwell bajo cambios de sistemas de referencia. Precisamente, son las propiedades de invarianza de estas ecuaciones las que subyacen a su importancia, generalidad y vitalidad.

Las ecuaciones de Maxwell resumen completamente las características y el comportamiento del *campo electromagnético*, concepto basado en una realidad física objetiva con propiedades bien definidas. El punto de partida de toda la teoría es el hecho establecido de la existencia de cargas eléctricas, magnitudes físicas independientes de la forma de producirlas y de las palabras que eventualmente usemos para definir las. Claro que para que puedan ser consideradas magnitudes físicas es necesario asignarles la dimensión correspondiente y dar una manera de medirlas. Esto es posible, pues existen instrumentos –los electrómetros– que permiten comparar cargas y así definir la suma (algebraica) de las mismas. Un *campo electromagnético* es el estado de excitación que se establece en el espacio si hay cargas eléctricas presentes. En otras palabras, las cargas eléctricas son la fuente de los campos: eléctrico,  $\vec{E}$ , si las cargas están en reposo, y también del campo magnético,  $\vec{B}$ , si están en movimiento. Los campos electromagnéticos son los causantes de la interacción entre las fuentes. Este hecho es capital en el desarrollo de la teoría, ya que permite la medida de un campo producido por una fuente a través del efecto que causa en otra fuente. La descripción de los efectos electromagnéticos sobre la materia hace necesaria la introducción de otros

vectores: el vector desplazamiento,  $\vec{D}$ ; el vector intensidad del campo magnético,  $\vec{H}$  y el vector densidad de corriente eléctrica,  $\vec{j}$ .

El proceso de formalización del electromagnetismo pasó por diferentes y muy intrincadas etapas que incluyen (ver «Apéndice preparatorio»):

- La electrostática, ligada al análisis de los fenómenos que involucran cargas eléctricas en reposo;
- El estudio de corrientes eléctricas estacionarias, que conduce a la Ley de Ohm y a la Ley de Joule;
- La descripción de los fenómenos magnéticos producidos por corrientes eléctricas o por imanes;
- El electromagnetismo propiamente dicho, que liga los fenómenos eléctricos con los magnéticos, al considerar las variaciones temporales de los respectivos campos.

Ese largo camino desemboca en el bien conocido conjunto de *ecuaciones de Maxwell*

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa' \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (1.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa\rho \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (1.4)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga eléctrica y las constantes  $\kappa$ ,  $\kappa'$  y  $\kappa''$  dependen del sistema de unidades que elijamos (Ver «apéndice sobre sistemas de unidades»).

Estas ecuaciones gobiernan localmente los fenómenos electromagnéticos. Y cualquier campo electromagnético *debe* satisfacer a todas ellas. La expresión «Fue un dios quien escribió estas líneas» (Boltzmann dixit) pone en evidencia su validez universal y su belleza. El significado físico de estas ecuaciones puede resumirse de la siguiente manera:

- Todo campo magnético variable en el tiempo origina un campo eléctrico rotacional (1.1). Pueden además existir campos electrostáticos originados en cargas eléctricas en reposo (1.3), en cuyo caso son irrotacionales (conservativos).
- Toda corriente eléctrica de conducción y/o todo campo eléctrico (de desplazamiento) variable en el tiempo origina un campo magnético rotacional (1.2).

Además pueden existir campos magnéticos  $\vec{H}$  originados por imanes permanentes, en cuyo caso son irrotacionales. La inclusión de la corriente de desplazamiento en las ecuaciones electromagnéticas conduce a un tratamiento simétrico de la electricidad y el magnetismo.

- Las fuentes del campo de inducción eléctrica o campo de desplazamiento eléctrico son las cargas eléctricas (1.3). Vale el teorema de Gauss, es decir, la ley de fuerzas entre cargas es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.
- El campo de inducción magnética no tiene fuentes, no existen cargas magnéticas libres.  $\vec{B}$  es siempre un campo solenoidal (1.4).
- Tomando divergencia en ambos miembros de la ecuación (1.2), recordando el apéndice poético y usando la ecuación (1.3), surge de inmediato la ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad (1.5)$$

de manera que la ley de conservación local de la carga eléctrica está contenida en las ecuaciones de Maxwell.

Por supuesto que la física que sigue a estas leyes no puede resumirse de la misma manera. En efecto, ella es tan variada y de tal dimensión que justifica una inmensa bibliografía y en particular a este libro que se desarrollará a partir de las ecuaciones de Maxwell.

Teniendo en cuenta la ecuación de continuidad, que liga densidad de carga y densidad de corriente, aparecen 5 vectores en las ecuaciones de Maxwell, a priori, independientes:  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{j}$ . Es decir, un total de 15 funciones del espacio y el tiempo a ser determinadas a partir de 6 ecuaciones diferenciales. Es claro entonces que hace falta implementar relaciones entre los vectores incógnita. La presencia de la materia en los fenómenos electromagnéticos sirve a este propósito, ya que exige implementar a las ecuaciones de Maxwell con las llamadas *relaciones constitutivas*. Estas son

$$\vec{D} = f_D(\vec{E}) \quad (1.6)$$

$$\vec{B} = f_B(\vec{H}) \quad (1.7)$$

$$\vec{j} = f_j(\vec{E}), \quad (1.8)$$

donde las funciones  $f_D$ ,  $f_B$  y  $f_j$  contienen la dependencia con el material particular bajo consideración. En medios lineales e isótropos se verifican las relaciones habituales:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon' \vec{E} \quad (1.9)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu' \vec{H} \quad (1.10)$$

y la ley de Ohm

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}, \quad (1.11)$$

donde  $\epsilon'$  y  $\mu'$  son la permitividad eléctrica relativa y la permeabilidad magnética relativa del medio, respectivamente; mientras que  $\sigma$  es la conductividad del material en cuestión.

Debemos tener presente que los campos eléctricos y magnéticos a los que nos referimos cuando trabajamos con medios materiales son los llamados campos «macroscópicos». Estos campos resultan de promediar espacialmente los campos microscópicos de origen atómico. Es claro que la fuente última de los campos está en la carga de electrones y protones que constituyen la materia y en sus momentos magnéticos,

junto al de los neutrones. Sin embargo, para la descripción de los fenómenos electromagnéticos, es conveniente considerar campos promediados sobre regiones mucho mayores que las dimensiones atómicas aunque bien menores que el tamaño del sistema bajo consideración. En otras palabras, estamos obviando la necesidad de un tratamiento cuántico.

## 1.2. LEYES DE CONSERVACIÓN

Es importante establecer y analizar las leyes de conservación de la energía y del impulso en presencia de campos eléctricos y magnéticos. Con este estudio preliminar podremos individualizar las correspondientes contribuciones electromagnéticas. Además se verá en acción la posible conversión de energía electromagnética en energía mecánica y en calor, y viceversa, con el adecuado balance impuesto por la conservación. El correspondiente estudio formal se posterga para el siguiente capítulo.

### 1.2.1. Conservación de la energía

Para simplificar el tratamiento de la ley de conservación de la energía, llamada habitualmente teorema de Poynting, nos ubicamos en una región del espacio donde no existen cargas eléctricas ni imanes (por ejemplo el vacío) aunque permitimos la presencia de conductores que pueden transportar corrientes. Haremos un poco de álgebra que nos permitirá analizar la densidad de energía almacenada en el campo. Utilizamos las ecuaciones de Maxwell (1.1) y (1.2) para calcular

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \vec{H} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 4\pi\kappa' \vec{E} \cdot \vec{J} + \frac{\kappa'}{\kappa} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \kappa'' \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

recordando ahora que [demostrar!]

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{b}$$

vemos que el primer miembro de (1.12) es igual a  $-\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \wedge \vec{H})$ . Integrandolo ahora en todo el volumen  $V$  considerado, resulta

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{\kappa} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{\kappa''}{\kappa'} \vec{H} \cdot \vec{B} \right] dv &= \\ = \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv + \frac{1}{4\pi\kappa'} \int_{\Sigma_V} (\vec{E} \wedge \vec{H}) \cdot d\vec{a}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

La última integral que allí aparece, extendida a la superficie  $\Sigma_V$  que limita al volumen  $V$ , es típicamente del tipo que siempre se desprecia en electrostática y aun en el caso cuasiestacionario, ya que en esos casos se anula rápidamente al crecer  $r$ . Sin embargo, en el caso general que estamos analizando puede dar lugar a contribuciones finitas si los campos eléctricos y magnéticos se comportan asintóticamente como  $1/r$ . Ese es precisamente el caso de los campos de radiación ligados a las ondas electromagnéticas que estudiaremos posteriormente. En definitiva, como la integral

de superficie sobre  $\Sigma_V$  no puede despreciarse en general, la mantendremos en las consideraciones que siguen.

Las expresiones del caso estacionario, tanto para la energía eléctrica como para la energía magnética, seguirán siendo válidas siempre que el medio en cuestión no sea dispersivo; es decir, cuando  $\epsilon'$  y  $\mu'$  sean constantes reales. En este caso, la energía electromagnética tiene significado termodinámico de modo que el integrando de la primera integral no es más que la densidad volumétrica de esa energía electromagnética

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{\kappa} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{\kappa'}{\kappa'} \vec{H} \cdot \vec{B} \right].$$

Por lo tanto, definiendo el *vector de Poynting* mediante la expresión

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{4\pi\kappa'} \vec{E} \wedge \vec{H} \quad (1.14)$$

concluimos que la conservación de la energía puede expresarse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u_{em} dv = \int_V \vec{E} \cdot \vec{j} dv + \int_{\Sigma_V} \vec{S} \cdot d\vec{a}, \quad (1.15)$$

resultado que también se conoce como *teorema de Poynting*. El balance energético está claro en él, ya que el primer término representa la variación temporal de la energía electromagnética en el recinto de volumen  $V$ ; el segundo contiene las pérdidas por efecto Joule (recordar la ley de Ohm (1.11)), y el último, que mide el flujo neto del vector de Poynting  $\vec{S}$  a través de la superficie cerrada  $\Sigma_V$  que limita al volumen  $V$ , establece el equilibrio.

En el caso en que no existen conductores en la región de interés, el teorema de Poynting provee, haciendo uso del teorema de Gauss-Ostrogradsky, la versión local del balance energético

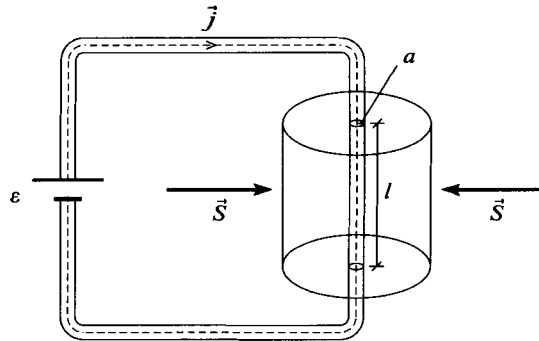
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0, \quad (1.16)$$

que es ciertamente una ecuación de continuidad: toda variación local de la energía electromagnética implica divergencia del vector de Poynting.

Es claro también que en el caso de campos estáticos en ausencia de conductores, si bien el vector de Poynting no es nulo, su divergencia será nula ya que no hay variación temporal de la energía.

**Ejemplo.** Veremos al vector de Poynting realmente en acción luego de la introducción de las ondas electromagnéticas. Sin embargo, es muy interesante tomar un caso elemental de conversión de la energía eléctrica en calor y analizarlo en términos de la ley de conservación que acabamos de obtener.

Consideremos, como en la figura (1.1), una batería que hace circular una corriente continua en un circuito con resistencia distribuida uniformemente en el conductor de radio  $a$ .

FIGURA 1.1: *Vector de Poynting en un circuito elemental.*

Evidentemente  $E = j/\sigma$  y sobre la superficie del conductor

$$H = 4\pi\kappa' \frac{1}{2} j a$$

de modo que el módulo del vector de Poynting resulta

$$S = \frac{j^2 a}{2\sigma}.$$

Es claro de la definición ( $\vec{S} = \frac{1}{4\pi\kappa'} \vec{E} \wedge \vec{H}$ ) que el vector de Poynting  $\vec{S}$  está dirigido hacia el interior del conductor y que su flujo en un cilindro de longitud  $l$  que abraza al conductor vale

$$\int_{\Sigma_V} \vec{S} \cdot d\vec{a} = -j^2 \frac{\pi a^2 l}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \int_V j^2 dv = -\text{calor del efecto Joule}.$$

Resultado que nos permite interpretar al efecto Joule sin hacer referencia a la batería, sólo en términos de los campos eléctrico y magnético que están presentes en relación con el conductor: los campos alimentan de energía a la resistencia vía el vector de Poynting.

### 1.2.2. Conservación del impulso lineal

Es de esperar que la conservación del impulso lineal de partículas cargadas que se mueven en un campo electromagnético incluya contribuciones de este último. En efecto, la conservación del impulso puede ser tratada de manera similar a la conservación de la energía que condujo al teorema de Poynting.

Una partícula cargada que se mueve en presencia de campos eléctricos y magnéticos está sometida a la fuerza de Lorentz (ver apéndice sobre fuerza de Lorentz) de manera que la ley de Newton se escribe

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q [\vec{E} + \kappa'' (\vec{v} \wedge \vec{B})]. \quad (1.17)$$

De modo que si llamamos  $\vec{\mathcal{P}}_{mec}$  al impulso lineal total de todas las partículas en un dado volumen  $V$ , podemos escribir

$$\frac{d\vec{\mathcal{P}}_{mec}}{dt} = \int_V [\rho \vec{E} + \kappa'' (\vec{J} \wedge \vec{B})] dv. \quad (1.18)$$

Usando ahora las ecuaciones de Maxwell y la propiedad distributiva de la derivada temporal respecto del producto vectorial, el integrando resulta

$$\begin{aligned} \rho \vec{E} + \kappa'' (\vec{J} \wedge \vec{B}) &= \frac{1}{4\pi\kappa} \vec{E} (\vec{\nabla} \cdot \vec{D}) - \frac{1}{4\pi\kappa} \vec{D} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) \\ &+ \frac{\kappa''}{4\pi\kappa'} \vec{H} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \frac{\kappa''}{4\pi\kappa'} \vec{B} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \\ &- \frac{\kappa''}{4\pi\kappa} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{D} \wedge \vec{B}), \end{aligned}$$

donde se agregó el término proporcional a la divergencia del vector  $\vec{B}$ , obviamente nulo, al solo efecto de simetrizar la expresión.

Para analizar el balance de impulso conviene introducir el flujo del tensor de Maxwell. A ese fin, transformamos la integral de volumen de la expresión (1.18) en una integral de superficie. Recordamos primero que los elementos del tensor de Maxwell son (ver apéndice sobre tensor de Maxwell)

$$T_{ij} = \frac{1}{4\pi\kappa} E_i D_j + \frac{\kappa''}{4\pi\kappa'} H_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \frac{1}{4\pi\kappa} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{\kappa''}{4\pi\kappa'} \vec{H} \cdot \vec{B} \right). \quad (1.19)$$

De manera que usando la identidad vectorial

$$a_i \vec{\nabla} \cdot \vec{a} - [\vec{a} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{a}]_i = \frac{\partial}{\partial x_i} (a_i^2 - \frac{1}{2} a^2) + \frac{\partial}{\partial x_j} a_i a_j + \frac{\partial}{\partial x_k} a_i a_k \quad (1.20)$$

resulta la ecuación de balance

$$\frac{d}{dt} (\vec{\mathcal{P}}_{mec})_i + \frac{\kappa''}{4\pi\kappa} \frac{d}{dt} \int_V (\vec{D} \wedge \vec{B})_i dv = \int_{\Sigma_V} T_{ij} da_j. \quad (1.21)$$

Es inmediato entonces definir el *impulso lineal del campo electromagnético*

$$\vec{\mathcal{P}}_{em} = \frac{\kappa''}{4\pi\kappa} \int_V (\vec{D} \wedge \vec{B}) dv = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{S} dv \quad (1.22)$$

y enunciar, a partir de la ecuación (1.21), el teorema de conservación del impulso lineal: la suma de la variación temporal del impulso mecánico y la variación temporal del impulso del campo electromagnético dentro de un dado volumen es igual al flujo neto del tensor de Maxwell a través de la superficie que lo limita.

En nuestra discusión formal posterior sobre los requerimientos de invarianza relativista quedará claro que la densidad de flujo de energía, ligada al vector de Poynting,



debe ser igual a la densidad volumétrica de impulso lineal del campo electromagnético. Esta condición se satisface obviamente en la ecuación anterior.

El campo electromagnético verifica también una ley de conservación del impulso Angular, ya que se puede introducir el concepto de impulso angular del campo

$$\vec{\mathcal{M}}_{em} = \frac{\kappa''}{4\pi\kappa} \int_V \vec{r} \wedge (\vec{D} \wedge \vec{B}) dv = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{r} \wedge \vec{S} dv. \quad (1.23)$$

El análisis detallado de esta ley de conservación es un poco más complicado, ya que implica el flujo de un tensor de tres índices. Volveremos sobre ella al tratar los aspectos formales del electromagnetismo.

### 1.3. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

Un aspecto esencial del electromagnetismo lo constituye la existencia de *soluciones ondulatorias* de las ecuaciones de Maxwell. Estas soluciones describen esa manera particular de transporte de energía de un punto a otro del espacio. Por otra parte, como la teoría de Maxwell contiene a todo el electromagnetismo, deberíamos esperar estas soluciones ondulatorias. En efecto, hay hechos experimentales que muestran que cuando cargas o corrientes eléctricas varían rápidamente en el tiempo, se producen campos eléctricos y magnéticos variables que se propagan a partir de esas fuentes fluctuantes. Basta recordar los fenómenos que suceden a una descarga eléctrica entre conductores a muy diferente potencial.

Mostraremos entonces cómo una adecuada combinación de las ecuaciones de Maxwell se identifica con la ecuación de las ondas. Previamente presentamos un


#### *Paréntesis ondulatorio*

Recordemos que la ecuación de las ondas

$$\nabla^2 \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(\vec{r}, t) = 0$$

es una ecuación diferencial lineal a derivadas parciales de segundo orden en las coordenadas espaciales y en el tiempo. Esta es la ecuación homogénea, aunque claramente se puede escribir una ecuación de ondas inhomogénea con sólo agregar un segundo miembro no trivial. Su linealidad implica la validez del principio de superposición para sus soluciones. Estas soluciones  $\Psi(\vec{r}, t)$  pueden ser funciones escalares o vectoriales. El parámetro  $v$  en la ecuación de las ondas representa la velocidad de propagación. Convenimos entonces en llamar *onda* a toda función  $\Psi(\vec{r}, t)$  que satisfaga la ecuación de las ondas.

Si la función  $\Psi$  es escalar, representa una onda longitudinal (la perturbación caracterizada por  $\Psi$  ocurre en la dirección de propagación), una onda de presión por ejemplo. Por otra parte, si  $\Psi$  es una función vectorial  $\vec{F}(\vec{r}, t)$ , se presentan dos posibilidades: si  $\vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$  se trata de una onda longitudinal,  $\vec{F}_l$ , mientras que si se verifica  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$  representa una onda transversal,  $\vec{F}_t$ . En general se tendrá  $\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}_l + \vec{F}_t$ .

Finalmente recordamos la forma de la solución general de la ecuación de las ondas en una dimensión espacial, llamada solución de D'Alambert 

$$\Psi(x, t) = \frac{1}{2} [f_1(x - vt) + f_2(x + vt)] - \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} g(x') dx'.$$

Para obtener la ecuación de las ondas electromagnéticas partimos de las ecuaciones de Maxwell. Consideramos un medio homogéneo e isotrópico ( $\mu'$ ,  $\epsilon'$  y  $\sigma$  constantes) en ausencia de cargas ( $\rho = 0$ ) y de fuentes de fuerza electromotriz. Tomando el rotor de las ecuaciones de rotor (1.1) y (1.2) y recordando el apéndice poético es inmediato obtener, usando las relaciones constitutivas lineales (1.9, 1.10, 1.11)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\kappa' \kappa''}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon' \mu_0 \mu' \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 4\pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.24)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\kappa' \kappa''}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon' \mu_0 \mu' \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - 4\pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \quad (1.25)$$

es decir, tanto el vector  $\vec{E}$  como el vector  $\vec{H}$  verifican la ecuación general de las ondas modificada por un término adicional que incluye derivadas primeras (término disipativo tipo Fourier) que como vemos es característico de la presencia de conductores: en el coeficiente correspondiente aparece  $\sigma$ .

Si la conductividad es nula ( $\sigma = 0$ ), entonces  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  satisfacen la ecuación homogénea de las ondas con velocidad de propagación

$$v = \left( \frac{\kappa / (\epsilon_0 \epsilon')}{\kappa' \mu_0 \mu' \kappa''} \right)^{1/2}. \quad (1.26)$$

Notemos (ver apéndice sobre unidades) que efectivamente

$$\left[ \frac{\kappa / \epsilon_0}{\kappa' \mu_0 \kappa''} \right] = [v]^2,$$

es decir, las dimensiones en la expresión para la velocidad de propagación  $v$  están correctas, habida cuenta de la adimensionalidad de  $\epsilon'$  y  $\mu'$  (propiedades eléctricas y magnéticas *relativas* del material).

En el vacío, la velocidad  $v$  toma el valor

$$c = \sqrt{\frac{\kappa / \epsilon_0}{\kappa' \mu_0 \kappa''}} \quad (1.27)$$

llamada velocidad de la luz en el vacío. Esta es una constante fundamental cuyo valor es

$$c = 299792458 \frac{m}{seg}.$$

Este valor es «exacto» ya que el metro es actualmente definido como la longitud que recorre la luz en  $1/299792458$  segundos (Ver B. W. Petley, *Nature* 303, 373, 1983). La constante  $c$  juega un papel central en la formulación de la teoría de la relatividad ya que participa de uno de sus postulados básicos que establece que todos los observadores en movimiento relativo uniforme en el espacio vacío, miden el valor  $c$  para la velocidad de la luz.

### 1.3.1. Ondas a lo largo de conductores

Consideremos una línea de dos conductores en la que la inductancia y la capacidad se encuentran distribuidas continuamente. Este sería el análogo al sistema mecánico constituido por una cuerda de goma elástica donde la masa y la elasticidad están distribuidas en forma continua. El número de grados de libertad de una cuerda de este tipo, de longitud infinita, es claramente infinito. Por lo tanto, el sistema posee infinitas oscilaciones o frecuencias propias. La misma situación se presenta en los sistemas eléctricos distribuidos como el referido. Las oscilaciones electromagnéticas de estos sistemas distribuidos son las ondas electromagnéticas a las que estamos dedicando esta sección.

Volvamos entonces a la línea de dos conductores de longitud indefinida y supongamos que una fuente de corriente variable en el tiempo genera en cualquier punto  $O$  un campo eléctrico  $\vec{E}$  [ver figura (1.2)]. Experimentalmente se encuentra que este

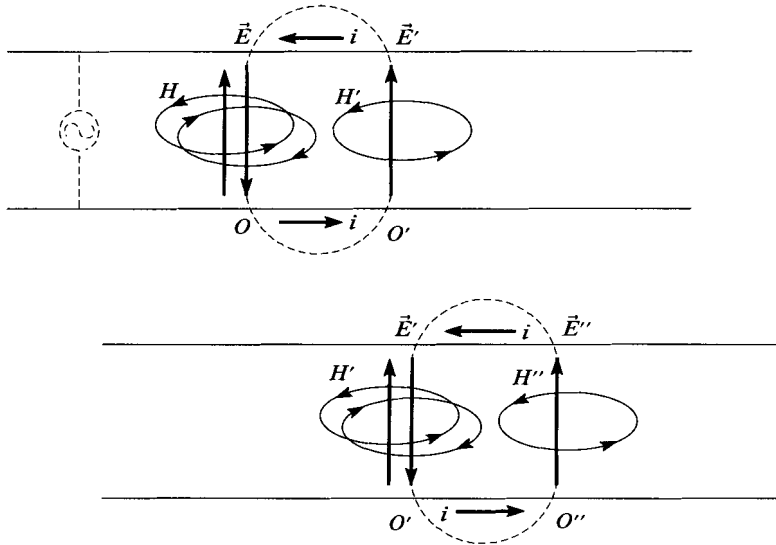


FIGURA 1.2: *Propagación de campos electromagnéticos a lo largo de dos conductores.*

campo se *propaga* a lo largo de la línea. Discutimos entonces el proceso que da lugar a esa propagación. Como vimos al analizar la corriente de desplazamiento, un campo

eléctrico variable en el tiempo, como el producido por la corriente variable en cuestión, produce un campo magnético. Éste está originado en la corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D = \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.28)$$

donde hemos supuesto que nuestro sistema se encuentra en el vacío. Notemos entonces que en el instante en que  $\vec{E}$  crece, su variación temporal es positiva y por lo tanto la dirección de la corriente de desplazamiento coincide con la del campo eléctrico. De allí la dirección indicada para el campo  $\vec{H}$  en la figura (1.2). Teniendo ahora en cuenta la Ley de Faraday, la presencia de este campo magnético, variable en el tiempo por cierto, da lugar a un nuevo campo eléctrico rotacional inducido  $\vec{E}'$ . Éste tendrá el sentido de la corriente inducida. A su vez, este campo eléctrico inducido  $\vec{E}'$  da lugar a una corriente de desplazamiento que origina un campo magnético  $\vec{H}'$ . Es importante percibir que el campo  $\vec{E}'$  en el punto  $O$  es opuesto al campo original  $\vec{E}$  y por lo tanto allí lo anula. Lo mismo ocurre con  $\vec{H}'$  y  $\vec{H}$ . De esta manera, desaparecen los campos en  $O$  y aparecen los nuevos campos  $\vec{E}'$  y  $\vec{H}'$  en el punto vecino  $O'$ . En los instantes posteriores al considerado el fenómeno descrito se repite. Es decir, el campo variable  $\vec{H}'$  genera un campo eléctrico  $\vec{E}''$  que a su vez da lugar al  $\vec{H}''$ . Estos nuevos anulan los campos en  $O'$  apareciendo en el siguiente punto vecino  $O''$ . Es claro además que estos puntos que venimos considerando son infinitamente próximos y por lo tanto los máximos de  $\vec{E}$  y de  $\vec{H}$  coinciden espacialmente y lo mismo ocurre con los puntos donde los campos se anulan. Percibimos entonces la propagación de la onda electromagnética que se lleva a cabo de manera enteramente análoga a la propagación de un pulso mecánico en una cuerda vibrante. Finalmente notemos también que en todo instante los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y el vector velocidad de propagación  $\vec{v}$  definen una terna ortogonal derecha.

Si suponemos que la variación del campo eléctrico es armónica y la propagación se realiza a lo largo del eje  $z$  positivo con la velocidad finita  $v$ , la oscilación de  $\vec{E}$  en un dado punto  $z$  está expresada por

$$E = E_0 \text{ sen } \omega \left( t - \frac{z}{v} \right) \quad (1.29)$$

y consecuentemente, el campo magnético es

$$H = H_0 \text{ sen } \omega \left( t - \frac{z}{v} \right). \quad (1.30)$$

Estas expresiones explicitan la coincidencia de máximos y ceros de los campos, propiedad que se enuncia diciendo que las oscilaciones de los campos eléctrico y magnético se propagan *en fase*. Por supuesto que como en el caso mecánico, la distancia entre dos puntos entre los cuales la diferencia de fase de la onda es de  $2\pi$ , es la longitud de la onda electromagnética  $\lambda = vT$ . Siendo  $T = 2\pi/\omega$  el período de oscilación, inverso de la frecuencia. Recordemos también que el número de onda está definido por  $k = 2\pi/\lambda$ .

En la discusión anterior hemos considerado el caso de conductores ideales de conductividad infinita. En la situación real, ambas amplitudes  $E_0$  y  $H_0$  se irán reduciendo a medida que la onda avanza, debido a las pérdidas por efecto Joule en los conductores.

**Ondas estacionarias**

Cuando se debe tratar el caso de ondas electromagnéticas en líneas de longitud finita, la reflexión en los extremos juega un papel importante. Debido a esta reflexión aparece una onda de retorno que se suma a la onda primitiva, dando lugar a las llamadas *ondas estacionarias*. Estas son similares a las ondas estacionarias en cuerdas vibrantes de longitud finita.

Analizamos las propiedades de las ondas estacionarias y para ello consideramos dos ondas en un punto  $z$ , siendo una la oscilación primitiva

$$E_1 = E_0 \text{ sen}(\omega t - kz)$$

y la otra, reflejada totalmente, podrá representarse por

$$E_2 = E_0 \text{ sen}(\omega t + kz - \phi),$$

donde el signo de  $kz$  cambió, ya que esta onda viaja en el sentido negativo de  $z$ . Ciertamente  $\phi$  mide el retraso de fase entre la onda reflejada y la primitiva en el punto en cuestión. El origen de esta fase es doble. Por un lado la onda reflejada debe recorrer dos veces la distancia desde el punto considerado hasta el extremo de la línea y por otra parte la reflexión misma inducirá eventuales cambios de fase.

La suma de ambas ondas conduce de inmediato a la expresión

$$E = 2 E_0 \cos(kz - \phi/2) \text{ sen}(\omega t - \phi/2),$$

que muestra que la amplitud de las oscilaciones en la línea finita depende de la posición  $z$  a través de

$$E_s = 2 E_0 \cos(kz - \phi/2)$$

debido a la reflexión en el extremo. Consecuentemente, la amplitud de la suma  $E_s$  será máxima en determinados puntos  $z_n$  definidos por

$$kz_n - \phi/2 = 0, \pi, 2\pi, \dots, n\pi$$

separados por la distancia  $\lambda/2$ , llamados puntos antinodales o vientres de la onda estacionaria. Por otra parte, en los puntos que verifican

$$kz_n - \phi/2 = \pi/2, 3\pi/2, \dots, (2n + 1)\pi/2$$

y que son llamados nodos de la onda estacionaria, la amplitud resultante se anula. Obviamente, la distancia entre dos nodos sucesivos es también  $\lambda/2$ .

Es importante destacar que a diferencia del caso de una línea infinita, en una onda electromagnética estacionaria los campos eléctrico y magnético *no* están en fase. La causa de este hecho se debe a la diferencia de fase impuesta a la onda por la reflexión en el extremo. En efecto, para garantizar que siempre  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{v}$  definan una terna derecha, en la onda reflejada uno de los vectores  $\vec{E}$  o  $\vec{H}$  debe cambiar de signo a fin de permitir la inversión del sentido de la velocidad. El cambio de signo de uno de los vectores significa necesariamente un cambio de fase en  $\pi$  en la correspondiente oscilación. Dependiendo de las condiciones del extremo, es decir, de la «pared» reflectora, las leyes de Snell-Fresnel permiten determinar la fase de qué vector,  $\vec{E}$  o  $\vec{H}$ , salta en  $\pi$  en la reflexión.

La exposición anterior muestra que los procesos fundamentales que dan lugar a las ondas electromagnéticas que se propagan entre los conductores de la línea suceden en el medio (vacío en nuestro caso) que los rodea, donde existen los campos. Los conductores son en algún sentido auxiliares y sirvieron de guía para dar la dirección de propagación de la onda. Queda claro entonces, y como surge de la misma esencia de las ecuaciones de Maxwell locales, que las ondas electromagnéticas pueden existir «libres», sin que la presencia de los conductores sea necesaria. Pasamos ahora al estudio más detallado de las ondas electromagnéticas.

### Ondas escalares

En un medio homogéneo y en ausencia de cargas y corrientes, cada componente cartesiana  $\eta(x, y, z; t)$  de los vectores de campo eléctrico y magnético, verifica, de acuerdo con (1.24) y (1.25), la ecuación de ondas homogénea

$$\nabla^2 \eta(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (1.31)$$

En ciertos casos, los fenómenos físicos relacionados con las ondas electromagnéticas no dependen del carácter vectorial de los campos que verifican la ecuación de las ondas. En esta situación se pueden tratar las componentes cartesianas en forma independiente y el análisis de ondas escalares se hace relevante.

En este ámbito, las ondas, solución de la ecuación

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 0, \quad (1.32)$$

tienen dependencia de la forma  $\eta = \eta(\zeta, t)$  y por lo tanto la solución general de la ecuación de las ondas se escribe

$$\eta = \eta_1(\zeta - vt) + \eta_2(\zeta + vt), \quad (1.33)$$

siendo  $\eta_1$  y  $\eta_2$  dos funciones escalares arbitrarias.

### Ondas esféricas

Las soluciones, escalares, que representan ondas esféricas tienen, por simetría, la dependencia funcional  $\eta = \eta(r, t)$ , donde

$$r = |\vec{r}| = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

En términos de la variable  $r$ , la ecuación de las ondas se escribe

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\eta) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\eta) = 0 \quad (1.34)$$

resultando idéntica a la ecuación para las ondas planas (1.32), si  $\zeta$  es reemplazada por  $r$  y la amplitud  $\eta$  por  $r\eta$ . Por lo tanto, a partir de (1.33), la solución general de onda esférica es

$$\eta = \frac{\eta_1(r - vt)}{r} + \frac{\eta_2(r + vt)}{r}, \quad (1.35)$$

donde nuevamente  $\eta_1$  y  $\eta_2$  son dos funciones escalares arbitrarias. Ciertamente, el primer término corresponde a una onda esférica saliente a partir del origen de coordenadas en tanto que el segundo representa a una onda entrante, convergente al origen.

### 1.3.2. Ondas planas

Se llaman *ondas planas* a las soluciones ondulatorias más simples de las ecuaciones de Maxwell. Dependen del tiempo y de una sola coordenada espacial. Son una útil idealización de la realidad, ya que constituyen una muy buena aproximación cuando se analiza la radiación electromagnética muy lejos de la fuente (luz del sol por ejemplo).

Para el estudio de las ondas planas nos restringimos inicialmente, por simplicidad, a un medio lineal, homogéneo e isotropo. Consideremos allí una dirección espacial arbitraria  $\zeta$  caracterizada por el versor

$$\tilde{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$$

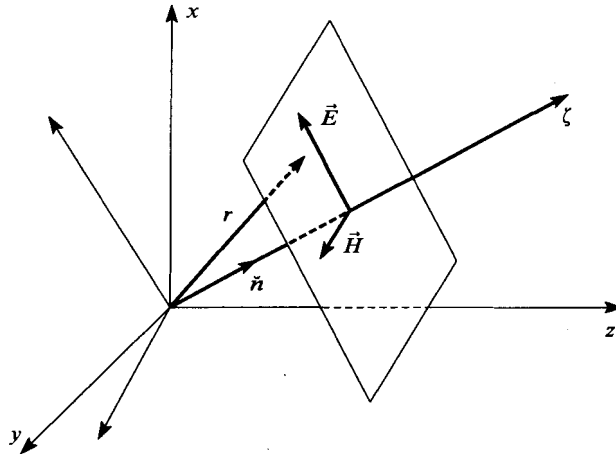


FIGURA 1.3: Caracterización de la dirección  $\zeta$ .

como indica la Figura (1.3), de manera que los campos eléctrico  $\vec{E}$  y magnético  $\vec{H}$  dependen solamente de la distancia  $\zeta$  al origen. En otras palabras, tanto  $\vec{E}$  como  $\vec{H}$  son constantes sobre los planos definidos por  $\zeta = \text{constante}$ , que son los planos normales a  $\tilde{n}$  (definidos por  $(\vec{r} \cdot \tilde{n}) = \text{constante}$ ). Escribimos entonces

$$\vec{E} = \vec{E}(\zeta, t) \quad (1.36)$$

$$\vec{H} = \vec{H}(\zeta, t). \quad (1.37)$$

Notemos además que bajo las condiciones impuestas, el operador gradiente toma la forma

$$\vec{\nabla} = \tilde{n} \frac{\partial}{\partial \zeta},$$

de modo que las ecuaciones de Maxwell pasan a escribirse

$$\check{n} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial \zeta} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.38)$$

$$\check{n} \wedge \frac{\partial \vec{H}}{\partial \zeta} = 4\pi\kappa' \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (1.39)$$

$$\check{n} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.40)$$

$$\check{n} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.41)$$

a partir de las cuales surgen de inmediato las correspondientes ecuaciones de evolución. En particular para  $\vec{E}$  resulta, usando (1.26),

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 4\pi\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.42)$$

llamada *ecuación del telegrafista*, que incluye difusión a partir del término con derivada temporal primera. El campo  $\vec{H}$  verifica una ecuación idéntica.

Pasemos al análisis de las propiedades de las ondas planas. De la ecuación de Maxwell (1.38) es inmediato

$$\check{n} \cdot \left( \check{n} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial \zeta} \right) = 0,$$

es decir,

$$\check{n} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0,$$

que junto a la Ecuación de Maxwell (1.41) da lugar a la condición

$$\check{n} \cdot \left( \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} dt + \frac{\partial \vec{H}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = \check{n} \cdot d\vec{H} = 0. \quad (1.43)$$

Esta condición verificada por el campo magnético  $\vec{H}$  de una onda plana implica que su componente longitudinal  $H_\zeta$  no puede variar ni con respecto a  $\zeta$  ni con respecto a  $t$ . Es claro que podría haber un campo longitudinal *estático* remanente, pero por simplicidad lo elegimos nulo ya que estamos interesados en campos temporalmente variables. En conclusión, el campo magnético  $\vec{H}$  de una onda plana yace en el plano perpendicular a la dirección de propagación  $\check{n}$  como habíamos adelantado.

Análogamente, de las ecuaciones de Maxwell (1.39) y (1.40) surge

$$\check{n} \cdot \left( \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dt + \frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon^r} \vec{E} dt + \frac{\partial \vec{E}}{\partial \zeta} d\zeta \right) = 0, \quad (1.44)$$



es decir,

$$\vec{n} \cdot \left( d\vec{E} + \frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon^r} \vec{E} dt \right) = 0, \quad (1.45)$$

condición que implica que la componente longitudinal del campo eléctrico  $\vec{E}$ , ( $E_\zeta$ ) tiene el comportamiento temporal

$$E_\zeta = E_\zeta(t=0) e^{-t/\tau} \quad (1.46)$$

o en otras palabras, la componente longitudinal  $E_\zeta$  se anula exponencialmente en un medio con conductividad finita ( $\sigma \neq 0$ ). Este resultado corrobora que un conductor no mantiene en su interior un campo eléctrico estático. Por supuesto que si se trata de un medio dieléctrico ( $\sigma = 0$ ), podría haber un campo eléctrico constante. Como en el caso del campo magnético, podemos elegir a este campo constante nulo ya que estamos fundamentalmente interesados en campos temporalmente variables. Concluimos entonces que en una onda plana el campo eléctrico  $\vec{E}$  yace en el plano perpendicular a la dirección de propagación definida por  $\vec{n}$ .

En general entonces: si el campo electromagnético depende del tiempo ( $t$ ) y de una sola coordenada espacial ( $\zeta$ ), queda definido en planos normales a ese eje coordenado. Es decir, las ondas planas son *transversales*.

Consideremos por un momento un medio dieléctrico ( $\sigma = 0$ ). En este caso, la ecuación del telegrafista se reduce a la ecuación de ondas homogénea

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.47)$$

cuya solución, para cada una de las componentes cartesianas de  $\vec{E}$ , tiene la forma correspondiente a una onda escalar

$$E_i = f_i(\zeta - vt) + g_i(\zeta + vt) \quad (1.48)$$

y donde, como anteriormente

$$v = \left( \frac{\kappa/(\epsilon_0 \epsilon^r)}{\kappa' \mu_0 \mu^r \kappa''} \right)^{1/2}$$

es la *velocidad de fase* de la onda. Es decir, la velocidad con que viaja la forma de la perturbación definida por las funciones  $f$  y  $g$ .

Es importante notar que la velocidad de fase, velocidad de la onda electromagnética plana, no depende de la dirección de la coordenada  $\zeta$  y por lo tanto, al ser  $\zeta$  cualquiera, se trata de una propagación con velocidad isotrópica.

Se puede definir, como es usual, el *índice de refracción* del medio donde se propaga la onda a través de

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon^r \mu^r}, \quad (1.49)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

La solución ondulatoria básica que depende de una sola coordenada y del tiempo tiene la forma

$$\vec{E}(\zeta, t) = \vec{E}_0 e^{-i(\omega t \pm k \zeta)}. \quad (1.50)$$

Allí

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.51)$$

es el módulo del *vector de propagación* o *vector de onda* ( $|\vec{k}| = k$ ) que define la dirección de propagación de la onda

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v^2} \vec{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\vec{v}}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} \quad (1.52)$$

y  $\omega$  es la frecuencia (angular) de la onda plana. Como ésta tiene un único valor, la onda se dice *monocromática*.

Por supuesto que al aplicar físicamente este formalismo debemos hacer la convención de que el campo eléctrico físico (y el magnético consecuentemente) es la parte real o la parte imaginaria de la cantidad compleja (1.50). De modo que podemos escribir en general

$$\vec{E}(\zeta, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (1.53)$$

Aquí, al elegir arbitrariamente el signo negativo estamos indicando que la onda plana se propaga en la dirección de los  $\zeta$  positivos.

Es inmediato mostrar que los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{k}$  definen una terna ortogonal derecha. En efecto, a partir de un cálculo sencillo surge que

$$\vec{n} \wedge \frac{\partial \vec{E}}{\partial \zeta} = i\omega \kappa'' \mu_0 \mu' \vec{H} = ik \vec{n} \wedge \vec{E},$$

es decir,

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega \kappa'' \mu_0 \mu'} \vec{k} \wedge \vec{E}. \quad (1.54)$$

Finalmente digamos que cuando la dirección de la amplitud de la onda es constante en el tiempo, la onda plana está linealmente polarizada. Volveremos sobre esta propiedad.

### **Vector de Poynting complejo**

Como hemos visto, la presencia de una dependencia temporal armónica (exponencial de un imaginario puro) provee simplificaciones en el tratamiento formal de las ondas. No debemos olvidar, sin embargo, que los campos verdaderos son la parte real o la parte imaginaria del complejo correspondiente, según se trate de una dependencia tipo *coseno* o tipo *seno*.

Manteniendo la notación compleja para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , surge de inmediato que el vector de Poynting calculado mediante su definición

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi\kappa'} \vec{E} \wedge \vec{H}$$

también será complejo. Ahora bien, este hecho plantea una cierta dificultad, ya que no resulta cierto que la parte real del  $\vec{S}$  así obtenido sea igual al producto vectorial de las partes reales (o las imaginarias) de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  que proveen el vector de Poynting físico. Sin embargo, esta dificultad se torna inmediatamente en una ventaja ya que lo que realmente interesa con referencia al vector de Poynting es su promedio temporal. Efectivamente, al haber variaciones tiempo, lo que tiene sentido es la media en el tiempo del flujo de energía que lleva  $\vec{S}$  y ésta tiene relación con la parte real del producto como muestra el siguiente teorema.

*Teorema:* el promedio temporal del producto escalar de la parte real de dos vectores complejos que varían en el tiempo según  $e^{-i\omega t}$  es igual a la mitad de la parte real del producto de uno de ellos por el complejo conjugado del otro.

$$\overline{(Re \vec{a}) \cdot (Re \vec{b})} = \frac{1}{2} Re (\vec{a} \cdot \vec{b}^*) = \frac{1}{2} Re (\vec{a}^* \cdot \vec{b}), \quad (1.55)$$

donde la línea sobre una magnitud denota promedio temporal. La demostración de este teorema es inmediata y se deja como ejercicio.

Sobre la base de este resultado, adoptamos la definición de *vector de Poynting complejo*

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\kappa'} (\vec{E} \wedge \vec{H}^*). \quad (1.56)$$

Aplicamos este tratamiento a las ondas planas. El vector de Poynting complejo es en este caso

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\kappa'} \frac{1}{\omega\kappa''\mu_0\mu^r} \vec{E} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}^*) = \frac{1}{8\pi\omega\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r} |\vec{E}|^2 \vec{k},$$

donde la última igualdad surge de la ortogonalidad entre  $\vec{E}$  y la dirección de propagación  $\vec{k} = k\hat{n}$ . Usando entonces la definición de vector de onda resulta

$$Re \vec{S}_c = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon_0 \epsilon^r \nu}{\kappa} |\vec{E}|^2 \hat{n} = \bar{u}_{em} \nu \hat{n} = \bar{u}_{em} \vec{v}. \quad (1.57)$$

Aquí se explicitó la definición del valor medio temporal de la densidad volumétrica de energía, para el caso de una onda plana

$$\bar{u}_{em} = \frac{1}{2} Re \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[ \frac{1}{\kappa} \vec{E} \cdot \vec{D}^* + \frac{\kappa''}{\kappa'} \vec{H} \cdot \vec{B}^* \right] \right\} = \frac{1}{8\pi} \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{\kappa} |E_0|^2.$$

Hemos mostrado entonces que  $Re \vec{S}_c$  mide la energía promedio que fluye a través de la unidad de área en la unidad de tiempo transportada por la onda (plana en este caso). Esta aseveración se ve corroborada por un elemental análisis dimensional de la última expresión para  $Re \vec{S}_c$  dada en (1.57)

$$[Re \vec{S}_c] = \frac{[\text{Energía}][\ell]}{[\text{Vol}][t]} = \frac{[\text{Energía}]}{[\text{Area}][t]}.$$

La energía claramente fluye en la dirección de propagación de la onda y lo hace con la misma velocidad con que se propagan los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .

### 1.3.3. Polarización

Como hemos mencionado, una onda plana se dice *linealmente polarizada* cuando las direcciones de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son constantes en el tiempo. Nos interesa ahora la descripción de un estado de polarización general. Para ello analizaremos la superposición de ondas linealmente polarizadas.

Si elegimos al eje  $z$  como dirección de propagación de las ondas, es decir ( $\vec{k} \equiv (0, 0, k_z)$ ), debido a la transversalidad de los campos se tendrá

$$E_x = E_{0x} \cos(k_z z - \omega t + \delta_x) \quad (1.58)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(k_z z - \omega t + \delta_y) \quad (1.59)$$

y consecuentemente

$$H_j = \frac{1}{\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r} (\vec{k} \wedge \vec{E})_j. \quad (1.60)$$

A fin de analizar los diferentes casos a que da lugar la superposición de las ondas mencionadas, es instructivo el estudio de la curva descrita, al transcurrir el tiempo y en un punto dado del espacio, por el extremo del vector  $\vec{E}$  resultante. Esta curva será en general una elipse, aunque puede degenerar en una circunferencia o aun en una recta. En otras palabras, buscamos el locus de los puntos cuyas coordenadas ( $E_x, E_y$ ) están dadas por las ecuaciones (1.58) y (1.59), con una diferencia de fase relativa  $\delta$  dada por

$$\delta = \delta_y - \delta_x. \quad (1.61)$$

La Figura (1.4) representa el comportamiento espacial del vector campo eléctrico, o campo magnético, en un dado instante, para el caso de una onda polarizada elípticamente.

Para obtener la envolvente en cuestión, es necesario eliminar la fase ( $k_z z - \omega t$ ) entre las expresiones anteriores (1.58) y (1.59) y de esa manera proyectar los vectores componentes sobre un plano perpendicular a la dirección de propagación. A partir de aquéllas es inmediato escribir

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \sin \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \sin \delta_x = \cos(k_z z - \omega t) \sin \delta \quad (1.62)$$

y también

$$\frac{E_x}{E_{0x}} \cos \delta_y - \frac{E_y}{E_{0y}} \cos \delta_x = \sin(k_z z - \omega t) \sin \delta \quad (1.63)$$

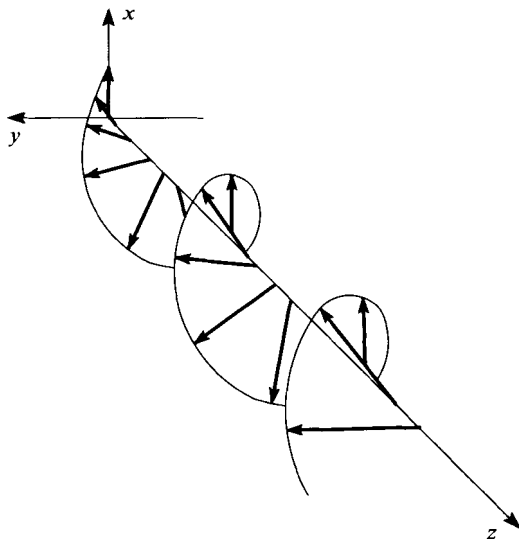


FIGURA 1.4: *Vector eléctrico en una onda elípticamente polarizada.*

de manera que elevando al cuadrado y sumando resulta

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos\delta = \sin^2\delta, \quad (1.64)$$

que es la ecuación de una elipse en el plano  $(E_x, E_y)$  como puede mostrarse de inmediato a partir de comprobar que el determinante de los coeficientes es no negativo

$$\frac{\sin^2\delta}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} \geq 0.$$

La elipse resultante está inscrita en un rectángulo de lados  $2E_{0x}$  y  $2E_{0y}$ , respectivamente. Algunas soluciones gráficas para diferentes valores de la diferencia de fase  $\delta$  se muestran en la figura (1.5).

Se pueden distinguir dos casos de polarización de acuerdo con el sentido en que el extremo del vector campo eléctrico resultante describe la elipse. Estos casos están determinados por el signo de  $\sin\delta$ . En ambos casos se habla de radiación *elípticamente polarizada*. Si un observador mira en la dirección en que llega la onda y ve al vector describir la elipse en el sentido horario, esta luz con polarización elíptica se dice *destrogiro* y corresponde a  $\sin\delta > 0$ . En el caso contrario la radiación posee polarización elíptica *levógira*.

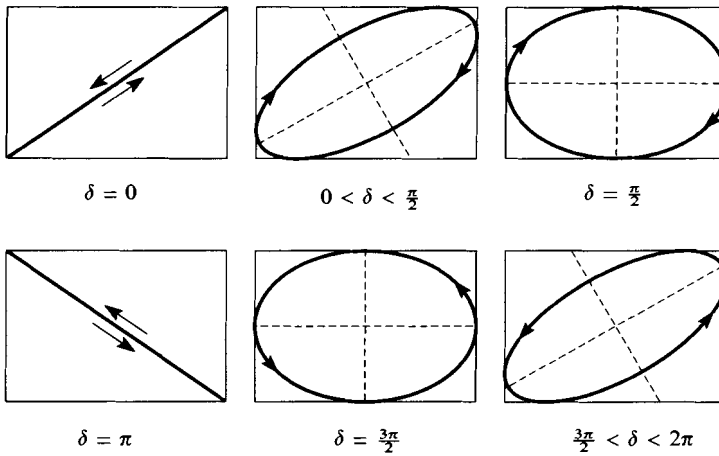


FIGURA 1.5: *Envolvente del extremo del vector eléctrico como función de  $\delta$ .*

Polarización lineal: en el caso particular

$$\delta = m\pi \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

la expresión (1.64) se reduce a

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 \pm 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}} = 0,$$

es decir,

$$\frac{E_y}{E_x} = (-1)^m \frac{E_{0y}}{E_{0x}}.$$

La elipse degenera entonces en un segmento de recta [ver figura (1.5)]. En estos casos la radiación resulta linealmente polarizada y hay un solo tipo de polarización. Notemos que el caso correspondiente a  $m = 0$  coincide con la polarización lineal mencionada cuando describimos a las ondas planas.

Polarización circular: en el caso particular

$$\delta = m\frac{\pi}{2} \quad ; \quad m = \pm 1, \pm 3, \dots$$

y

$$E_{0x} = E_{0y} = E_0$$

la expresión (1.64) se reduce a

$$E_x^2 + E_y^2 = E_0^2,$$

que es obviamente la ecuación de una circunferencia y se tiene entonces radiación *polarizada circularmente*. Nuevamente se presentan dos tipos de polarización circular de acuerdo al signo de  $\delta$ .

La polarización resulta destrógira si

$$\delta = \frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, cuando los campos componentes tienen las expresiones

$$E_x = E_0 \cos(k_z z - \omega t + \delta_x)$$

$$E_y = -E_0 \sin(k_z z - \omega t + \delta_y).$$

Si por el contrario

$$\delta = -\frac{\pi}{2} + 2m\pi \quad ; \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, si el  $\delta$  es negativo, la polarización es levógira y los campos tienen la forma

$$E_x = E_0 \cos(k_z z - \omega t + \delta_x)$$

$$E_y = E_0 \sin(k_z z - \omega t + \delta_y).$$

Estos casos también están representados en la Figura (1.5).

### *Parámetros de Stokes*

Para caracterizar el estado de polarización elíptica de una radiación dada, fueron necesarios tres parámetros independientes: las dos amplitudes  $E_{0x}$ ,  $E_{0y}$  de las ondas linealmente polarizadas sobre planos ortogonales y la diferencia de fase  $\delta$ . Esta caracterización también se puede hacer dando los dos ejes de la elipse envolvente y el ángulo de inclinación  $\psi$ , como muestra la figura (1.6).

Una manera alternativa de describir la radiación polarizada consiste en la introducción de cuatro parámetros llamados de Stokes, asociados con la geometría de la esfera (que en este caso es llamada esfera de Poincaré). Los *parámetros de Stokes* están definidos por

$$s_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2 \tag{1.65}$$

$$s_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2 \tag{1.66}$$

$$s_2 = 2 E_{0x} E_{0y} \cos \delta \quad (1.67)$$

$$s_3 = 2 E_{0x} E_{0y} \sin \delta \quad (1.68)$$

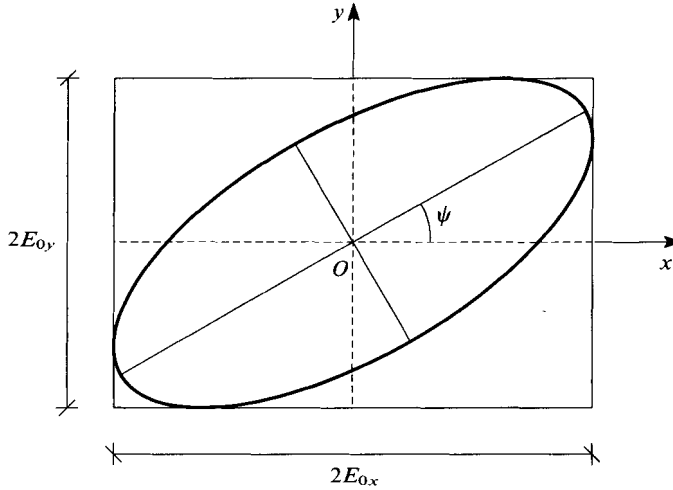


FIGURA 1.6: *Parámetros que caracterizan la polarización elíptica.*

de los cuales sólo tres son independientes ya que verifican el vínculo

$$s_0^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2.$$

El parámetro  $s_0$ , radio de la esfera de Poincaré, mide la intensidad de la onda. Los otros tres parámetros están ligados a la inclinación  $\psi$  de la elipse con respecto al eje  $x$  y con la dirección en que la elipse es recorrida por el extremo del vector eléctrico. Considerando que la terna  $(s_1, s_2, s_3)$  define las coordenadas cartesianas de un punto  $P$  sobre la esfera [ver figura (1.7)], se tiene entonces que

$$s_1 = s_0 \cos 2\chi \cos 2\psi$$

$$s_2 = s_0 \cos 2\chi \sin 2\psi$$

$$s_3 = s_0 \sin 2\chi$$

con

$$\tan \chi = \pm \frac{b}{a}.$$

Aquí el signo determina la dirección de polarización. Si es  $+$ , se trata de polarización destrógrica, y si es  $-$ , levógrica.



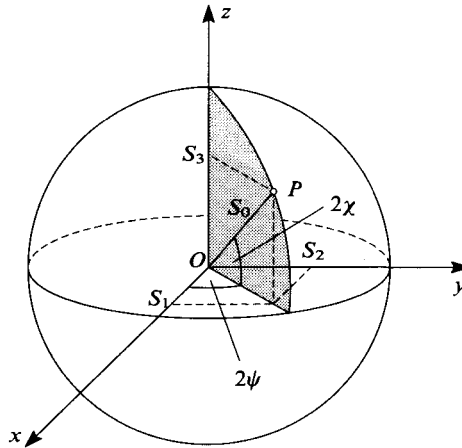


FIGURA 1.7: *Esfera de Poincaré y parámetros de Stokes.*

Las ecuaciones precedentes proveen una manera simple de representar una radiación mediante el punto  $P$  de coordenadas  $(s_1, s_2, s_3)$ . Debido a que el signo del ángulo  $\chi$  define el tipo de polarización, tenemos la siguiente correspondencia:

- Polarización elíptica

$\chi > 0$  destrógira ;  $P$  en el hemisferio norte

$\chi < 0$  levógira ;  $P$  en el hemisferio sur

- Polarización circular

$\chi > 0$  destrógira ;  $E_{0x} = E_{0y}$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 0$  ;  $\delta = \pi/2$ ;

$P$  en el polo norte

$\chi < 0$  levógira ;  $E_{0x} = E_{0y}$  ;  $s_1 = 0$  ;  $s_2 = 0$  ;  $\delta = -\pi/2$ ;

$P$  en el polo sur

- Polarización lineal

$s_3 = 0$  ;  $\delta = m\pi$  ;  $P$  en el ecuador.

En resumen, a cada radiación polarizada de un dado tipo, le corresponde un punto sobre la esfera de Poincaré.

Teniendo presente que la luz es un caso particular de radiación electromagnética, todas las consideraciones anteriores se aplican sin modificaciones al análisis de la luz polarizada.

### 1.3.4. Paquete de ondas: velocidad de grupo

En los desarrollos previos, cada vez que debimos ocuparnos de la dependencia temporal de ondas electromagnéticas las consideramos monocromáticas. Sin embargo, la emisión de una onda monocromática es una idealización teórica. Todas las fuentes electromagnéticas emiten ondas en forma de paquetes que contienen siempre un número inmenso, o infinito, de frecuencias. Esto se debe a que las fuentes físicas no son puntuales, tienen un tamaño finito y emiten durante un tiempo limitado.

La consideración teórica de ondas de una sola frecuencia tiene su justificación en la linealidad de las ecuaciones de Maxwell, la que permite construir cualquier paquete de soluciones por superposición lineal de ondas monocromáticas.

Cuando se trata de ondas propagándose en el vacío, o en medios ideales con respuesta instantánea: índice de refracción constante, el estudio de la evolución temporal de un paquete de ondas pierde interés ya que su composición relativa en frecuencia se mantiene constante en el tiempo. Por el contrario, si las ondas viajan en medios materiales es necesario el análisis particular de cada componente del paquete, ya que los medios materiales son en general dispersivos y disipativos y en consecuencia responden en forma diferente cuando son excitados con ondas de distintas frecuencias. Esto produce en general cambios en el frente de onda (o en la forma del paquete) produciendo fenómenos notables.

En medios materiales en general, la constante dieléctrica y por supuesto el índice de refracción son funciones de la frecuencia; la velocidad de fase, velocidad de propagación de cada frecuencia, cambia con  $\omega$  y esto produce la deformación del paquete al atravesar el medio. Este fenómeno es llamado *dispersión* y los medios que lo exhiben se denominan dispersivos. El origen de esta denominación está ligado al comportamiento de la luz blanca cuando incide sobre un prisma o sobre un medio refractivo cualquiera: la luz emerge de ese medio dispersada, o separada, en rayos de diferentes colores ya que las propiedades refractivas del medio dependen de la longitud de onda de la radiación que lo atraviesa. En estos casos, la velocidad del flujo de energía puede ser muy diferente de la velocidad de fase.

En medios puramente disipativos, la amplitud de una onda sufre una atenuación que en general depende de la frecuencia produciendo también una deformación del frente de ondas.

Los efectos dispersivos pueden ser resumidos en la *relación de dispersión* del medio  $\omega = \omega(\vec{k})$ , que en general es función sólo de  $k$ , módulo del vector de onda  $\vec{k}$ . Esta función es normalmente suave pero puede presentar un comportamiento agudo para ciertas frecuencias dando lugar a una *dispersión anómala*.

Nos interesa analizar con algún detalle el comportamiento de la radiación en un medio dispersivo no disipativo. Un paquete de ondas viajando en este medio puede ser descrito por una superposición de ondas de la forma (ver apéndice sobre transformada de Fourier)

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i[kx - \omega(k)t]} dk, \quad (1.69)$$

donde la amplitud  $A(k)$  es la antitransformada de Fourier de  $\psi$  al tiempo de ingreso en el medio  $t = 0$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx.$$

Ella contiene la información de la forma de la onda incidente y es en general una función concentrada alrededor de un dado  $k_0$ , si  $\psi(x, 0)$  tiene similares características alrededor de  $x_0$ . En efecto, recordemos que la transformada de Fourier de una distribución gaussiana es otra distribución gaussiana de tal manera que sus anchos mitad están en relación inversa. Más precisamente, llamando  $\Delta x$  y  $\Delta k$  a la desviación media cuadrática de  $x$  y  $k$ , respectivamente, se tiene en general

$$\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}.$$

Esta expresión, leída en términos de posición e impulso, juega un papel central en la mecánica cuántica, ligado al principio de incerteza de Heisenberg.

¿Como definir entonces la velocidad del paquete de ondas en el medio dispersivo, si cada componente monocromática se propaga con velocidad diferente? Supongamos un paquete angosto, esto es con  $\Delta k$  pequeño, centrado en  $k_0$ . Luego podemos desarrollar la frecuencia alrededor de  $k_0$

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0 (k - k_0) = \omega_0 + \omega'_0 (k - k_0) \quad (1.70)$$

y obtener para  $\psi(x, t)$

$$\psi(x, t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0 \omega'_0 - \omega_0)t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{i(x - \omega'_0 t)k} dk. \quad (1.71)$$

Parte del segundo miembro de la expresión (1.71) permite reconstruir  $\psi$  al tiempo 0 normal función de la variable  $x' = x - \omega'_0 t$ . Luego

$$\psi(x, t) \approx \psi(x', 0) e^{i(k_0 \omega'_0 - \omega_0)t}.$$

Resulta entonces que, para  $\Delta k$  pequeño, el pulso en  $(x, t)$  se obtiene a partir del pulso en  $(x - \omega'_0 t, 0)$  desde donde se propagó con la *velocidad de grupo*

$$v_g = \omega'_0 = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_0.$$

Esta velocidad es en realidad la velocidad de transporte de energía (siempre en la aproximación de  $\Delta k$  pequeño) ya que mide la velocidad de desplazamiento del pulso como un todo.

Recordemos por otra parte que, en un medio dispersivo, el índice de refracción para cada vector de onda  $k$  se define a partir de la relación de dispersión de manera tal que

$$\omega(k) = \frac{c k}{n(k)}.$$

Luego la *velocidad de fase*  $v_f$  de cada componente monocromática es

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{n(k)}.$$

Aunque en la mayoría de los casos  $n(k) > 1$ , si  $n(k)$  fuera  $< 1$ , resultaría que  $v_f > c$ . Esto, sin embargo, no entra en conflicto con el postulado de la Relatividad que establece que  $c$  es la velocidad máxima, ya que no hay información que se propague con la velocidad  $v_f$ . La velocidad que importa al respecto es

$$v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}.$$

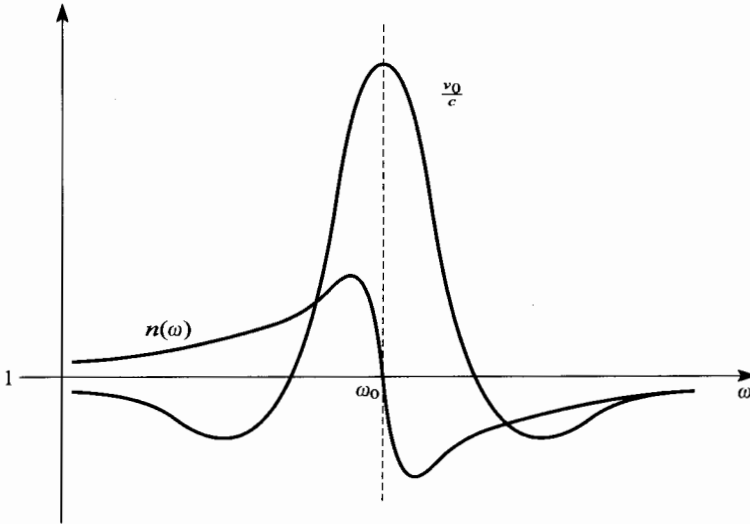


FIGURA 1.8: Velocidad de grupo en la región de dispersión anómala.

En el caso de dispersión normal  $dn/d\omega > 0$  y para medios (normales) en los que  $n > 1$ , resulta que la velocidad de propagación del *flujo de energía* es  $v_g < v_f < c$ . Cuando la dispersión es *anómala*,  $dn/d\omega$  puede ser grande y negativa y en consecuencia  $v_g$  podría resultar  $> c$ . Sin embargo, la aproximación (1.70) no es válida en este caso y la definición que dimos de  $v_g$  pierde sentido. En la figura (1.8) mostramos el comportamiento de  $v_g/c$  en la región de dispersión anómala, donde ejemplificamos una rápida variación de  $dn/d\omega$  con el consecuente comportamiento singular de la velocidad de grupo.

### 1.3.5. Reflexión y refracción de ondas electromagnéticas

Nos interesa analizar el comportamiento de ondas electromagnéticas que inciden sobre la superficie de separación de dos medios diferentes. Es intuitivo pensar que parte de la energía que lleva esa onda incidente se reflejará en la superficie y parte la cruzará viajando en el nuevo medio. La proporción de reflexión y transmisión dependerá de los parámetros característicos de ambos medios: las permitividades dieléctricas y las permeabilidades magnéticas relativas respectivas. Es decir, de los correspondientes índices de refracción.

### a) Condiciones de contorno

Obtendremos las condiciones de contorno que deben verificar los campos eléctrico y magnético cuando se pasa de un medio a otro diferente. La deducción de estas condiciones surgirá de la validez de las ecuaciones de Maxwell, de acuerdo con la exposición que sigue.

#### Componente tangencial del campo $\vec{E}$

Para analizar este caso conviene partir de la ley de Faraday

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\kappa'' \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma}, \quad (1.72)$$

donde la integral de superficie se extiende a un área  $\Sigma$ , limitada por el circuito de integración de la integral curvilínea. Aplicamos la ley a una pequeña superficie  $\Sigma$ , como muestra la figura (1.9) definida por

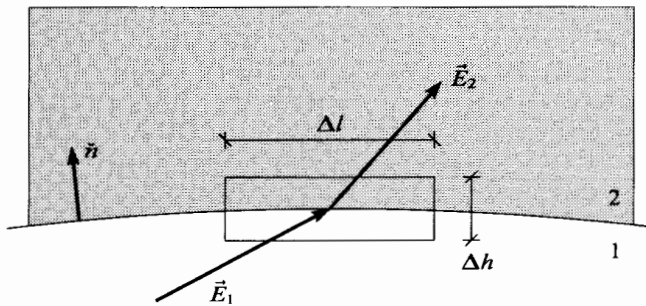


FIGURA 1.9: Geometría para el análisis de la componente tangencial de  $\vec{E}$ .

$$\Sigma = \Delta l \Delta h$$

con  $\Delta h$  tendiendo a cero y con los  $\Delta l$  ubicados a ambos lados de la interfase. Consecuentemente el área  $\Sigma$  tiende a cero. Los campos eléctricos a ambos lados de la separación entre medios son  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , respectivamente. Volviendo a la ley de Faraday aplicada en estas condiciones, observamos que el campo magnético  $\vec{B}$  y su derivada son finitas, ya que suponemos estar involucrados con eventuales distribuciones de cargas y de corrientes también finitas. Por lo tanto, la integral en el miembro derecho de la ecuación (1.72) se anula en nuestro caso. Tenemos entonces

$$\vec{E}_1 \cdot \vec{\Delta l} - \vec{E}_2 \cdot \vec{\Delta l} = 0,$$

resultado que permite concluir que las componentes tangenciales del campo eléctrico se conservan en la frontera. Es decir,

$$E_{\parallel} \text{ continua en la interfase} \quad (1.73)$$

dando validez general al resultado de la electrostática.

### Componente tangencial del campo $\vec{H}$

Partimos ahora de la ley de Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 4\pi\kappa' \int_{\Sigma} \left( \vec{J} + \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\sigma \quad (1.74)$$

y hacemos un análisis similar al del caso eléctrico. La misma figura (1.9) resulta de utilidad si leemos allí  $\vec{H}$  en lugar de  $\vec{E}$ . Por razones análogas al caso anterior, ya que el campo  $\vec{D}$  y su derivada son finitas, el segundo término del miembro derecho de (3.19) se anula cuando  $\Delta h$  tiende a cero. Por otra parte, la densidad de corriente será finita si involucramos solamente distribuciones finitas de cargas y consideramos medios de conductividad finita. Por lo tanto el término de corriente de conducción tampoco contribuye. En resumen resulta

$$\vec{H}_1 \cdot \vec{\Delta\ell} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\Delta\ell} = 0,$$

dando lugar a la condición de contorno

$$H_{\parallel} \text{ continua en la interfase.} \quad (1.75)$$

Es decir, la componente tangencial de la intensidad magnética  $\vec{H}$  se conserva en la frontera cuando los medios tienen conductividad finita.

Tratar el caso límite de un conductor ideal de conductividad infinita puede ser útil, ya que, bajo ciertas circunstancias, puede ser una manera simple de describir situaciones físicas de interés. Entonces, en el caso ideal en que el medio 2, digamos, es un conductor perfecto, la contribución del primer término del miembro derecho de (1.74) conduce a

$$\lim_{\Delta h \rightarrow 0} \int \vec{J} \cdot \vec{\Delta\ell} \Delta h = J_s \Delta\ell,$$

donde  $J_s$  representa a la densidad de corriente superficial por unidad de longitud que fluye en la interfase entre los dos medios. Por lo tanto, la expresión (1.74) aplicada al contorno de integración de lados  $\Delta l$  y  $\Delta h$  de la figura anterior provee el resultado

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = 4\pi\kappa' J_s \Delta\ell. \quad (1.76)$$

En otras palabras, como el segundo medio tiene conductividad infinita, la penetración pelicular (que trataremos posteriormente) debe ser nula y entonces surge una discontinuidad del campo  $\vec{H}$  en la superficie de frontera entre los medios. Esta discontinuidad es medida precisamente por la corriente superficial  $J_s$ . Explicitando la integral (1.76), resulta

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = H_{1\parallel} \Delta\ell = 4\pi\kappa' J_s \Delta\ell,$$

es decir,

$$H_{1\parallel} = 4\pi\kappa' J_s \quad (1.77)$$

para la interfase entre un medio cualquiera y un conductor de conductividad infinita.

*Componente normal del campo  $\vec{D}$* 

El campo  $\vec{D}$  correspondiente a una onda electromagnética, aunque variable en el tiempo, seguirá verificando la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa\rho$$

de modo que, al igual que en el caso electrostático, vale la condición de contorno

$$D_{\perp} \text{ continua en la interfase} \quad (1.78)$$

si en esa interfase no hay cargas libres. Si este no fuera el caso y en la separación entre medios existe una densidad superficial de cargas libres  $\sigma_L$ , la condición de contorno resulta entonces, también como en la situación estática,

$$D_{1\perp} - D_{2\perp} = 4\pi\kappa\sigma_L. \quad (1.79)$$

El subíndice  $\perp$  indica la componente del campo normal a la interfase.

Por supuesto que si uno de los conductores, digamos el 2, es perfecto, la condición de contorno se reducirá a

$$D_{1\perp} = 4\pi\kappa\sigma_L, \quad (1.80)$$

ya que el campo eléctrico en el interior del medio 2 debe ser nulo.

*Componente normal del campo  $\vec{B}$* 

Como el campo de inducción magnética es siempre solenoidal, valen las consideraciones estáticas, o cuasiestáticas: al ser las líneas de  $\vec{B}$  siempre cerradas, la condición de contorno es

$$B_{\perp} \text{ continua en la interfase}, \quad (1.81)$$

es decir, la componente normal del campo magnético  $\vec{B}$  se conserva en la frontera.

***b) Leyes de Snell***

Analizamos en detalle la reflexión y refracción de ondas electromagnéticas en la interfase entre dos dieléctricos.

Suponemos una onda plana viajando en un medio de índice de refracción  $n_1$  (por ejemplo en el vacío:  $n_1 = 1$ ) que incide sobre otro dieléctrico de índice de refracción  $n_2$ , separado del primero por el plano  $z = 0$ . El problema de contorno se resuelve agregando a la onda incidente otras dos ondas planas que representan la onda *reflejada* y la onda *refractada* (o *transmitida*) respectivamente e imponiendo las condiciones de contorno que acabamos de discutir. La geometría del problema está resumida en la figura (1.10).

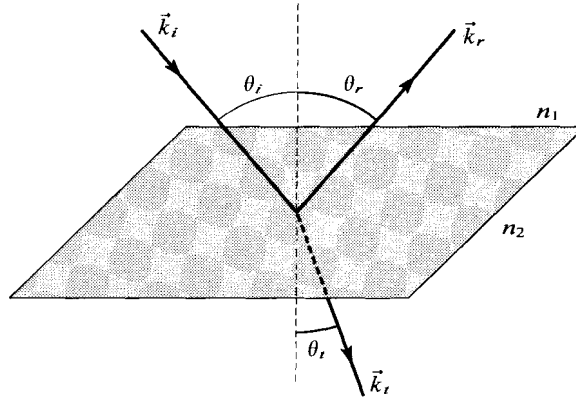


FIGURA 1.10: Geometría para el análisis de las leyes de Snell.

Habiendo restringido nuestro estudio a ondas planas monocromáticas, podemos obviar la escritura de las dependencias temporales de todas las ondas en cuestión ya que la interfase no provoca modificaciones en la frecuencia. Consecuentemente, si  $\vec{k}_i$  es el vector de onda incidente, los campos correspondientes son

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad (1.82)$$

$$\vec{B}_i = \frac{1}{\omega \kappa''} \vec{k}_i \wedge \vec{E}_i. \quad (1.83)$$

El plano de incidencia, digamos  $(x, z)$ , queda definido por el versor  $\hat{z}$  y el vector de onda  $\vec{k}_i$  [ver figura (1.10)].

Las otras dos ondas introducidas para resolver el problema de contorno son: la reflejada, cuya expresión es

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \quad (1.84)$$

$$\vec{B}_r = \frac{1}{\omega \kappa''} \vec{k}_r \wedge \vec{E}_r, \quad (1.85)$$

y la onda transmitida dada por

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (1.86)$$

$$\vec{B}_t = \frac{1}{\omega \kappa''} \vec{k}_t \wedge \vec{E}_t. \quad (1.87)$$

En las expresiones anteriores, los módulos de los vectores de onda están ligados a los correspondientes índices de refracción a través de

$$k_i = k_r = n_1 \frac{\omega}{c} \quad (1.88)$$

$$k_t = n_2 \frac{\omega}{c}. \quad (1.89)$$



Estas expresiones indican claramente que si bien la frecuencia, como dijimos, no cambia al pasar de un medio al otro, la velocidad de propagación y consecuentemente la longitud de onda de la radiación sí lo hacen.

El próximo paso es hacer verificar la continuidad de las componentes tangenciales de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en la interfase. Es claro que al imponer la condición, en  $z = 0$ , a los tres vectores  $\vec{E}_i$ ,  $\vec{E}_r$  y  $\vec{E}_t$  introducidos arriba, la dependencia espacial de ellos, dada por las exponenciales, debe ser idéntica. Consecuentemente, en  $z = 0$  se tiene

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r}|_{z=0} = \vec{k}_r \cdot \vec{r}|_{z=0} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}|_{z=0}. \quad (1.90)$$

La primera igualdad conduce a la condición

$$k_{ix} x = k_{rx} x + k_{ry} y,$$

que al ser válida para todo  $x$  e  $y$ , implica necesariamente que

$$k_{ry} = 0,$$

es decir, el vector de onda  $\vec{k}_r$  yace en el plano de incidencia y además que

$$k_{ix} = k_{rx}. \quad (1.91)$$

Analizando de manera análoga la segunda igualdad en la condición (1.90), surge que  $\vec{k}_t$  también debe pertenecer al plano de incidencia. Se concluye entonces que

$$\vec{k}_i, \vec{k}_r, \vec{k}_t \text{ son coplanares.} \quad (1.92)$$

Más aún, como surge de la figura (1.10), a partir de la igualdad (1.91) se puede escribir

$$k_i \text{ sen } \theta_i = k_r \text{ sen } \theta_r, \quad (1.93)$$

que teniendo en cuenta que  $k_i = k_r$  conduce a

$$\text{sen } \theta_i = \text{sen } \theta_r, \quad (1.94)$$

es decir, el ángulo de incidencia debe ser igual al ángulo de reflexión.

De manera similar, a partir esta vez de la igualdad  $k_{ix} = k_{tx}$ , surge la relación

$$k_i \text{ sen } \theta_i = k_t \text{ sen } \theta_t,$$

que también puede escribirse

$$\frac{\text{sen } \theta_i}{\text{sen } \theta_t} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1.95)$$

En las expresiones (1.92), (1.93) y (1.95) se reconocen la *Leyes de Snell* de la reflexión y la refracción de la luz. Aquí han sido obtenidas para una radiación electromagnética general.

Notemos que las leyes de Snell no garantizan la continuidad de las componentes tangenciales de los campos en la frontera. A fin de imponerlas y obtener las llamadas *relaciones de Fresnel*, debemos analizar en detalle el estado de polarización de esos

campos. Para ello consideramos el caso de polarización general arbitraria como una combinación lineal de ondas planas polarizadas: una perpendicular y otra paralela al plano de incidencia. Las ondas reflejada y transmitida estarán polarizadas de manera similar. La situación geométrica está indicada en la figura (1.10).

Consideramos en primer lugar que  $\vec{E}$  es perpendicular al plano de incidencia (en la dirección  $y$ ). Los campos se reducen a magnitudes escalares y adquieren entonces la forma

$$E_{i_{\perp}} = E_{0_{i_{\perp}}} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad (1.96)$$

$$E_{r_{\perp}} = E_{0_{r_{\perp}}} e^{i\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \quad (1.97)$$

$$E_{t_{\perp}} = E_{0_{t_{\perp}}} e^{i\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (1.98)$$

de manera que la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico impone la condición

$$E_{0_{i_{\perp}}} + E_{0_{r_{\perp}}} = E_{0_{t_{\perp}}}. \quad (1.99)$$

Por otra parte, la condición equivalente para la componente tangencial de  $\vec{H}$  conduce a

$$n_1 (E_{0_{i_{\perp}}} - E_{0_{r_{\perp}}}) \cos \theta_i = n_2 E_{0_{t_{\perp}}} \cos \theta_t, \quad (1.100)$$

donde hemos supuesto implícitamente que  $\mu^r$  del dieléctrico 2 no difiere del valor del vacío, es decir,  $\mu_2^r = 1$ .

A partir de las relaciones (1.99) y (1.100) y usando la ley de Snell (1.95) se obtiene

$$\frac{E_{0_{r_{\perp}}}}{E_{0_{i_{\perp}}}} = -\frac{\text{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)} \quad (1.101)$$

$$\frac{E_{0_{t_{\perp}}}}{E_{0_{i_{\perp}}}} = -2 \frac{\cos \theta_i \text{sen} \theta_t}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t)}, \quad (1.102)$$

expresiones de Fresnel que dan cuenta de la fracción relativa de intensidad de la radiación reflejada y refractada, respectivamente.

Consideramos ahora el segundo caso posible: la polarización de la onda incidente corresponde a un campo  $\vec{E}$  paralelo al plano de incidencia. Las condiciones de contorno conducen a las relaciones

$$n_1 (E_{0_{i_{\parallel}}} + E_{0_{r_{\parallel}}}) = n_2 E_{0_{t_{\parallel}}} \quad (1.103)$$

$$(E_{0_{i_{\parallel}}} - E_{0_{r_{\parallel}}}) \cos \theta_i = E_{0_{t_{\parallel}}} \cos \theta_t \quad (1.104)$$

a partir de las cuales surgen las restantes relaciones de Fresnel

$$\frac{E_{0_{r_{\parallel}}}}{E_{0_{i_{\parallel}}}} = -\frac{\tan(\theta_i - \theta_t)}{\tan(\theta_i + \theta_t)} \quad (1.105)$$

$$\frac{E_{0_{t_{\parallel}}}}{E_{0_{i_{\parallel}}}} = -2 \frac{\cos \theta_i \text{sen} \theta_t}{\text{sen}(\theta_i + \theta_t) \cos(\theta_i + \theta_t)}, \quad (1.106)$$

que proveen también las intensidades relativas de la radiación reflejada y transmitida para este segundo caso.

*Ángulo de Brewster*

La ecuación (1.105) muestra que la reflexión para polarización paralela al plano de incidencia se anula cuando

$$\theta_i + \theta_t = \frac{\pi}{2},$$

que implica

$$\text{sen } \theta_t = \text{cos } \theta_i.$$

Bajo estas condiciones, la ley de Snell (1.95) establece que para un ángulo de incidencia particular, llamado *ángulo de Brewster*  $\theta_B$  que verifica

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1.107)$$

no existe onda reflejada polarizada paralela. En otras palabras, a partir de una onda con polarización arbitraria, que puede ser entendida como la superposición de una onda polarizada paralela y otra polarizada perpendicular, podemos obtener una onda linealmente polarizada con el vector eléctrico perpendicular al plano de incidencia si ella incide sobre la interfase según el ángulo de Brewster.

*Reflexión total*

Supongamos que el índice de refracción del segundo medio es menor que el del medio de donde proviene la radiación. Es decir,  $n_1 > n_2$ . La ley de Snell (1.95) muestra entonces que el ángulo de refracción  $\theta_t$  será siempre mayor que el de incidencia  $\theta_i$ . Por lo tanto, existe un ángulo de incidencia  $\theta_{RT}$ , *ángulo de reflexión total*, definido por

$$\text{sen } \theta_{RT} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (1.108)$$

para el cual  $\theta_t = \pi/2$ . Como en general

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t0} e^{ik_t(x \text{ sen } \theta_t + z \text{ cos } \theta_t)}, \quad (1.109)$$

entonces para  $\theta_t$  no hay onda transmitida al medio 2 ya que se anula la dependencia en  $z$ . Para ángulos de incidencia mayores al ángulo crítico  $\theta_{RT}$ , el  $\text{sen } \theta_t$  resulta mayor a la unidad y en consecuencia el correspondiente  $\text{cos } \theta_t$  resulta imaginario

$$\text{cos } \theta_t = i \left[ \text{sen}^2 \theta_i \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 - 1 \right]$$

y la onda transmitida, como se ve de (1.109), está atenuada exponencialmente como función de  $z$  creciente. Se trata de una onda *evanescente* hacia el interior del segundo medio. Notemos que si este medio es suficientemente angosto, es posible que la onda evanescente no se extinga completamente, dando lugar a radiación detectable en un tercer medio. Este fenómeno es completamente análogo al llamado efecto túnel en mecánica cuántica.

### Presión de las ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas que inciden sobre un cuerpo ejercen sobre él una *presión*. Para entender el origen de esta presión basta considerar una onda que incide normalmente sobre una superficie plana como muestra la figura (1.11). Siendo el

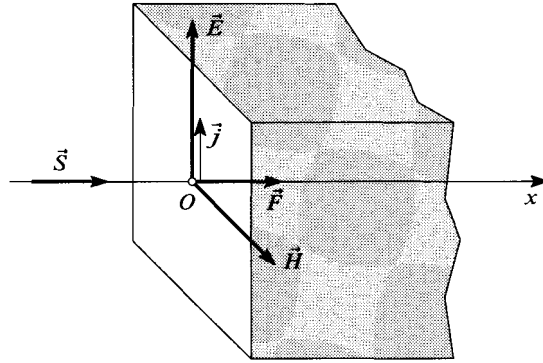


FIGURA 1.11: Origen de la presión de radiación.

campo eléctrico  $\vec{E}$  de la onda paralelo a la superficie del cuerpo, no produce ninguna fuerza de presión. Sin embargo, este campo, variable en el tiempo, da lugar a una densidad de corriente  $\vec{j}$  en el interior del cuerpo. Esta corriente sufre entonces los efectos del campo magnético  $\vec{H}$  de la onda incidente. Es decir, aparece una fuerza  $\vec{F}$  que es perpendicular tanto a  $\vec{j}$  como a  $\vec{H}$ , siendo por lo tanto paralela a la dirección de propagación de la onda incidente. El promedio temporal de esta fuerza por unidad de superficie del cuerpo es precisamente la presión de la onda electromagnética. El valor de esta presión se obtiene de inmediato a partir de las ecuaciones de Maxwell. En efecto, la fuerza sobre la corriente inducida por el campo eléctrico, debida al campo magnético, tiene como intensidad por unidad de volumen

$$f = \kappa'' \mu_0 \mu' j H, \quad (1.110)$$

de modo que la presión resultante será

$$P = \int_0^\infty \bar{f} dx, \quad (1.111)$$

donde  $\bar{f}$  representa al promedio temporal de la fuerza. Recurrimos ahora a las ecuaciones de Maxwell especificadas para ondas planas linealmente polarizadas que se propagan en la dirección  $x$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\kappa'}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon' \frac{\partial E_y}{\partial t} + 4\pi \kappa' j &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \kappa'' \mu_0 \mu' \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \end{aligned}$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\kappa''}{\kappa'} \mu_0 \mu' H_z,$$

la segunda por

$$\frac{1}{4\pi\kappa} \epsilon_0 \epsilon' E_y$$

y sumando los resultados, surge

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\kappa''}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon' \mu_0 \mu' \frac{\partial(E_y H_z)}{\partial t} + f = -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon' E_y^2 + \frac{\kappa''}{\kappa'} \mu_0 \mu' H_z^2 \right).$$

Observamos en primer lugar que la expresión entre paréntesis del segundo miembro es precisamente la densidad volumétrica de energía electromagnética. Por otra parte, debido a que los campos  $E$  y  $H$  corresponden a los de ondas planas (o son analizables en componentes de Fourier), el promedio temporal de la derivada con respecto al tiempo de  $(E_y, H_z)$  se anula. Se concluye entonces que

$$\bar{f} = -\frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_{em}, \quad (1.112)$$

de manera que volviendo a la expresión para la presión (1.111) se obtiene

$$P = -\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}_{em} = \bar{u}_{em}(0) - \bar{u}_{em}(\infty). \quad (1.113)$$

Nos resta entonces determinar el valor de  $\bar{u}_{em}(0)$ , la densidad de energía electromagnética en la superficie del cuerpo sobre el que incide la onda. Si el cuerpo en cuestión es totalmente absorbente, es decir, si su coeficiente de reflexión es cero, entonces sobre su superficie sólo se tendrá la onda incidente y consecuentemente  $\bar{u}_{em}(0)$  se identifica con la densidad volumétrica de energía de esa onda incidente. Si, por el contrario, el cuerpo es perfectamente reflector (coeficiente de reflexión unidad), frente a la superficie se encuentran ambas ondas, la incidente y la reflejada. Por consiguiente  $\bar{u}_{em}(0)$  se corresponde con el doble de la densidad de energía incidente. Ciertamente, en un caso intermedio, caracterizado por un coeficiente de reflexión  $r$ , se tendrá

$$P = (1 + r) \bar{u}_{em}.$$

Si la onda no incide normalmente sobre el cuerpo, aparecerá una componente normal del campo eléctrico sobre la superficie. Ésta dará lugar a una densidad superficial de carga y por consiguiente a una fuerza de origen eléctrico. Esta fuerza extra se opone a la fuerza magnética discutida previamente en el caso de incidencia normal y por lo tanto la presión de las ondas con incidencia oblicua resulta disminuida. El factor que surge es  $\cos \theta$ , donde el ángulo  $\theta$  está definido por las dirección de incidencia y la normal a la superficie.

Digamos finalmente que un cálculo enteramente análogo al que acabamos de realizar podría haber sido llevado a cabo partiendo del tensor de Maxwell, en lugar de hacerlo con la fuerza. Proponemos este análisis como ejercicio.

Un cálculo explícito muestra que la presión de la luz es muy pequeña. En efecto, la presión que provocan los rayos solares (que transportan alrededor de  $1,4 \cdot 10^6$  erg/cm<sup>2</sup>/seg) sobre un reflector perfecto resulta del orden de  $10^{-4}$  dinas/cm<sup>2</sup>. Sin embargo, esta presión es suficiente para provocar que la cola de los cometas, en cualquier punto de la órbita, se posicione radialmente respecto del Sol.

### 1.3.6. Problemas

- Probar que el promedio temporal del producto de las partes reales de dos vectores complejos que dependen del tiempo como  $e^{-i\omega t}$  está dado por la mitad de la parte real del producto de uno por el complejo conjugado del otro. [PP,11,1]
- Una onda electromagnética plana

$$E_y = G \cos \omega(t - z/v)$$

incide sobre un obstáculo y se refleja con la forma

$$E'_y = G \cos \omega(t + z/v).$$

1. Calcular la expresión de la onda estacionaria producida.
  2. Hallar el vector de Poynting  $S$  en función de  $t$  y  $z$ .
  3. Calcular el promedio temporal de  $S$ . [PU,11,11]
- Probar que, para incidencia normal, el coeficiente de reflexión, o porcentaje de luz reflejada por la superficie de separación entre dos dieléctricos, está dada por

$$\frac{(n - 1)^2}{(n + 1)^2},$$

donde  $n$  es el índice de refracción relativo del medio 2 con respecto al medio 1. ¿Cuál es el coeficiente de transmisión? Calcular la cantidad de luz transmitida por una placa de vidrio transparente en aire a incidencia normal, en términos del índice de refracción del vidrio. [PP,11,4]

- Una onda plana es especularmente reflejada por una superficie según un ángulo  $\theta$  respecto de la normal. Hallar la presión de radiación. [PP,11,5]
- Estimar la razón de la resistencia de un cable conductor para corriente alternada de alta frecuencia a su resistencia con corriente continua. El resultado se conoce como la fórmula de resistencia de Rayleigh. [PP,11,6]
- Ondas planas monocromáticas se propagan paralelas al eje  $z$  tanto en dirección positiva como negativa. Los campos en el origen están dados por

$$E_x = A \cos \omega t \quad ; \quad E_y = 0$$

$$H_x = 0 \quad ; \quad H_y = B \cos \omega t.$$

Calcular la intensidad media de la radiación en cada una de las dos direcciones en términos de  $A$ ,  $B$  y las constantes del medio. [PP,11,7]

- Analizar los diferentes casos de polarización en términos de la representación compleja para las ondas.
- Una onda electromagnética plana, polarizada a 45 grados respecto del plano de incidencia, es totalmente reflejada en un prisma al cual entra y sale normalmente a las respectivas caras. Demostrar que la intensidad del rayo emergente es

$$16n^2(1+n)^{-4}I_0,$$

donde  $n$  es el índice de refracción e  $I_0$  la intensidad incidente. Demostrar que el rayo emergente está elípticamente polarizado con una diferencia de fase  $\phi$  dada por

$$\tan\left(\frac{1}{2}\phi\right) = \cos\theta \operatorname{sen}^{-2}\theta (\operatorname{sen}^2\theta - n^{-2})^{1/2},$$

donde  $\theta$  es el ángulo de incidencia en la cara posterior del prisma. No considerar reflexiones múltiples. [SM,13,2]

- Una onda electromagnética plana de longitud de onda  $\lambda$  incide sobre una superficie plana infinita de un dieléctrico de espesor  $a$ . Demostrar que si el rayo está polarizado en el plano de incidencia o normal a él, la intensidad reflejada del rayo está dada por

$$4b^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\delta\right) [(1-b^2)^2 + 4b^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\delta\right)]^{-1} I_0,$$

donde  $b^2$  es la fracción de la intensidad de luz incidente reflejada,  $\delta = 4\pi n a \lambda^{-1} \cos\theta_i$ ,  $\theta_i$  es el ángulo de refracción y  $n$  es el índice de refracción. Incluir reflexiones múltiples y relaciones de fase pero suponer que no hay absorción. [SM,13,3]

- Una onda plana en un medio de permeabilidad  $\mu^r$  y permitividad  $\epsilon^r$  incide normalmente sobre un espejo plano perfectamente conductor. Demostrar que la reflexión es evitada colocando una delgada capa de material de espesor  $d$ , permitividad  $\epsilon'^r$  y conductividad  $\sigma'$ , de un cuarto de longitud de onda si  $\sigma' d \simeq (\epsilon^r/\mu^r)^{1/2}$  y  $\sigma' \gg \omega \epsilon^r$ . [SM,13,17]
- La potencia media radiada por una emisora de radio es de 10 kW. Suponer que esta potencia se distribuye uniformemente sobre la superficie de cualquier semiesfera con la estación de radio en su centro. a) ¿Cuál es el valor del vector de Poynting en los puntos de la superficie de una semiesfera de 10 Km de radio? Considerar que a esta distancia las ondas son planas. b) ¿Cuáles son los valores máximos de los campos eléctrico y magnético en los puntos de esta semiesfera? [PU,11,3]
- El valor medio cuadrático de la densidad de corriente de desplazamiento en una onda plana monocromática de frecuencia  $10^8$  Hz, polarizada linealmente, que se propaga en el espacio libre es  $10^{-5} \text{ Am}^{-2}$ . Obtener los valores de las amplitudes de los campos eléctrico y magnético de la onda. [GP,11,1]
- Demostrar que el promedio temporal de la densidad de energía transportada por una onda plana monocromática, polarizada linealmente, que se propaga en un medio isotrópico no conductor está distribuida igualmente entre los campos eléctrico y magnético. Demostrar que en un medio conductor, la energía promedio para el campo magnético es mayor que para el campo eléctrico. [GP,11,2]

- Un láser es un dispositivo que emite un haz paralelo de luz monocromática. La intensidad puede suponerse constante a través del haz. Si la potencia del láser es de 1 Watt y el haz tiene un diámetro de 1 mm, calcular la máxima amplitud del campo magnético  $\vec{B}$  del haz en el espacio libre. [GP,11,3]
- Dos placas circulares metálicas cercanas, que forman un condensador de placas paralelas, están inicialmente cargadas. Sus centros se conectan internamente mediante un conductor fino de autoinductancia despreciable. Obtener una expresión para el vector de Poynting en la superficie del conductor en cualquier instante subsiguiente y evaluar así el flujo total de energía dentro del mismo. [GP,11,4]
- Calcular la presión de radiación ejercida por una onda electromagnética plana sobre una superficie conductora sobre la que incide perpendicularmente. En la expresión hallada, obtener el límite para el caso de conductividad infinita. [GP,11,13]
- 1. Demostrar que la ecuación de onda en una dimensión

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

tiene la solución general de D'Alambert

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} f(t - x/v) + \frac{1}{2} f(t + x/v) + \frac{v}{2} \int_{t - \frac{x}{v}}^{t + \frac{x}{v}} g(t') dt',$$

donde las condiciones de contorno están especificadas por los valores de  $\psi$  y de  $\partial\psi/\partial x$  en  $x = 0$  para todo tiempo:

$$\psi(0, t) = f(t) \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial x}(0, t) = g(t).$$

2.Cuál es la solución correspondiente a las condiciones iniciales

$$\psi(x, 0) = f(x) \quad ; \quad \frac{\partial\psi}{\partial t}(x, 0) = h(x)$$

[JA,6,7]

- Una onda plana incide normalmente sobre una pantalla perfectamente absorbente.
  1. A partir de la ley de conservación del impulso lineal demostrar que la presión de radiación ejercida sobre la pantalla es igual a la energía del campo por unidad de volumen en la onda.
  2. En las cercanías de la tierra el flujo de energía electromagnética proveniente del Sol es de aproximadamente  $0,14 \text{ Watt/cm}^2$ . Si una nave interplanetaria tuviera una vela de masa  $10^{-4} \text{ g/cm}^2$ , sin otro peso, ¿cuál sería su aceleración máxima debida a la presión de la radiación solar? ¿Cómo se compara este valor con la aceleración debida al viento solar (radiación corpuscular)? [JA,6,10]



- Un paquete de ondas unidimensional aproximadamente monocromático tiene la forma instantánea

$$u(x, 0) = f(x) e^{ik_0 x},$$

siendo  $f(x)$  la modulación. Para cada una de las diferentes formas  $f(x)$  abajo indicadas, calcular el espectro de número de onda  $|A(k)|^2$  del paquete; dibujar  $|u(x, 0)|^2$  y  $|A(k)|^2$ ; evaluar explícitamente las desviaciones medias cuadráticas  $\Delta x$  y  $\Delta k$  definidas en términos de las intensidades  $|u(x, 0)|^2$  y  $|A(k)|^2$  y probar la desigualdad  $\Delta k \Delta x \geq 1/2$ .

$$f(x) = N e^{-\frac{\alpha|x|}{2}} \quad (a)$$

$$f(x) = N e^{-\frac{\alpha^2 x^2}{4}} \quad (b)$$

$$f(x) = \begin{cases} N(1 - \alpha|x|) & \text{para } \alpha|x| < 1 \\ 0 & \text{para } \alpha|x| > 1 \end{cases} \quad (c)$$

$$f(x) = \begin{cases} N & \text{para } |x| < a \\ 0 & \text{para } |x| > a \end{cases} \quad (d)$$

[JA,7,1]

- Una onda plana incide sobre interfases sucesivas en forma de tres capas. Los índices de refracción de los tres medios no permeables son  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ . El espesor de la capa intermedia es  $d$ . Calcular los coeficientes de transmisión y reflexión y dibujar su comportamiento como función de la frecuencia para  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 3$  y para  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 1$ . [JA,7,2]
- Una onda electromagnética plana, linealmente polarizada, de frecuencia angular  $\omega$  incide normalmente, desde el espacio libre, en la superficie plana de un medio no permeable de conductividad  $\sigma$  y constante dieléctrica  $\epsilon'$ .
  1. Calcular la amplitud y la fase de la onda reflejada relativa a la onda incidente para  $\sigma$  y  $\epsilon'$  arbitrarios.
  2. Discutir el caso límite de un conductor muy bueno y el de uno muy malo y demostrar que para un buen conductor el coeficiente de reflexión es aproximadamente

$$R \simeq 1 - 2 \frac{\omega}{c} \delta,$$

donde  $\delta$  es la longitud de penetración pelicular. [JA,7,4]

- La diferencia de fase de las componentes rectangulares del vector campo eléctrico de una onda plana elípticamente polarizada es de  $30^\circ$ . Dibujar las elipses definidas por  $\vec{E}$  y por  $\vec{B}$  para el caso en que una amplitud es el doble de la otra. [MH,5,3]

- Se denomina *impedancia*  $\eta$  de una onda plana a la relación  $|\vec{E}|/|\vec{H}|$ .

1. Mostrar que

$$\eta = \frac{\mu}{n} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

2. Mostrar que, para un medio magnético, los coeficientes de transmisión y de reflexión resultan

$$T = \frac{\eta_1}{\eta_2} \left( \frac{2\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^2$$

$$R = \left( \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \right)^2$$

Notar que no se produce reflexión cuando las impedancias de onda de los dos medios son iguales, aun cuando  $\epsilon_1^r \neq \epsilon_2^r$ ,  $\mu_1^r \neq \mu_2^r$  y en consecuencia  $n_1 \neq n_2$ . [MH,6,2]

- El *camino óptico* recorrido por un rayo luminoso entre dos puntos  $P$  y  $Q$  se define por la integral de línea

$$L = \int_P^Q n ds,$$

donde  $n$  es el índice de refracción que en general será función de la posición. El Principio de Fermat establece que la trayectoria seguida por la luz es aquella que da lugar a la anulación de la variación de  $L$ , es decir,  $\delta L = 0$  (ver el Apéndice con elementos del análisis funcional, del capítulo siguiente, puede ayudar). Considerar un rayo de luz que se origina en  $P$  ubicado en un medio de índice de refracción  $n_1$  y viaja hasta  $Q$  en otro medio de índice  $n_2$ , siendo el plano  $(x, y)$  el que separa ambos medios. Suponer que la trayectoria verdadera pasa por el origen de coordenadas. Demostrar que si la trayectoria variada pasa por el punto  $(\delta x, \delta y, 0)$  en lugar de hacerlo por el origen, entonces la aplicación del Principio de Fermat da lugar a la ley de Snell. [MH,6,5]

- 1. Una onda electromagnética incide desde parafina en aire, según el ángulo de reflexión total. Una segunda superficie de separación aire-parafina está separada una distancia  $d$  de la primera interfase. Calcular el coeficiente de transmisión total en función de  $d$  y hacer el gráfico respectivo.
- 2. Buscar (y leer) artículos sobre ondas evanescentes escritos por J. Agudín (*Physical Review*, por ejemplo).

#### 1.4. ECUACIONES DE MAXWELL EN CONDUCTORES

La corriente de desplazamiento en conductores es despreciable cuando se la compara con la corriente de conducción. ¿Por qué?

Para simplificar el tratamiento conducente a la respuesta, consideramos medios lineales, donde valen las relaciones constitutivas (1.9) y (1.11) y suponemos una variación temporal armónica del campo  $\vec{E}$  en el tiempo con frecuencia  $\omega$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.114)$$

Esto no significa pérdida de generalidad ya que, como hemos indicado en reiteradas oportunidades, en cualquier caso más complicado se puede recurrir al principio de superposición para obtener cualquier otra forma de dependencia. Bajo estas hipótesis es inmediato que

$$\left| \frac{\vec{J}}{\frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}} \right| = \frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon_r} \frac{1}{\omega} = \frac{1}{\tau\omega}. \quad (1.115)$$

El valor del parámetro  $\tau$ , tiempo característico de cada conductor, es típicamente del orden

$$\tau \simeq 10^{-19} \text{ seg}$$

de manera que *incluso* para frecuencias en el rango del ultravioleta

$$\omega \simeq 10^{16} \text{ seg}^{-1}$$

se verifica que

$$j_D < \frac{j}{100}.$$

Concluimos entonces que en problemas electromagnéticos con conductores, a frecuencias normales (digamos  $\omega \sim 10^8 \text{ seg}^{-1}$ ), la contribución de la corriente de desplazamiento

$$\vec{J}_D = \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

puede ser seguramente despreciada.

En consecuencia, las ecuaciones de Maxwell en medios conductores se reducen a

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.116)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa' \vec{J} \quad (1.117)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (1.118)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.119)$$

de manera que en medios (caso muy general) donde valgan las relaciones constitutivas lineales (1.10) y (1.11) surge de inmediato

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \mu_0 \mu_r \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) = -4\pi\kappa' \kappa'' \mu_0 \mu_r \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}. \quad (1.120)$$

El Apéndice Poético nos lleva a escribir entonces

$$\nabla^2 \vec{E} = 4 \pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.121)$$

O en términos del vector densidad de corriente

$$\nabla^2 \vec{j} = 4 \pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}. \quad (1.122)$$

Concluimos así que en los procesos no estacionarios en conductores, tanto el campo eléctrico como la densidad de corriente están gobernados por procesos de *difusión*, es decir, regidos por la ecuación de Fourier.

### ***Aplicación: efecto pelicular***

Para presentar alguno de los fenómenos descritos por las ecuaciones (1.121) o (1.122), estudiamos el siguiente problema: Determinación de la distribución de corriente en un conductor plano, semi-infinito en  $z \geq 0$ , siendo el espacio  $z < 0$  dieléctrico. Para fijar ideas consideramos la corriente

$$\vec{j} = j_x(z, t) \vec{i}$$

Como  $\vec{j}$  no es función de la coordenada  $x$ , queda garantizado que  $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ . La ecuación de Fourier correspondiente resulta

$$\frac{\partial^2 j_x(z, t)}{\partial z^2} = 4 \pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \frac{\partial j_x(z, t)}{\partial t}.$$

Usamos la hipótesis de régimen armónico

$$j_x(z, t) = j_0(z) e^{-i\omega t}$$

y definimos

$$\gamma^2 = -i\omega 4 \pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma,$$

que podemos escribir por conveniencia

$$\gamma = \frac{1 - i}{\delta},$$

donde  $\delta$  está definido por

$$\delta = \sqrt{2} (4 \pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu' \sigma \omega)^{-1/2}. \quad (1.123)$$

Con esta notación, resulta

$$\frac{\partial^2 j_0(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 j_0(z) = 0$$

cuya solución general es

$$j_0(z) = M e^{-\gamma z} + N e^{+\gamma z}.$$

Ahora bien, como para  $z \rightarrow \infty$  la corriente  $\vec{j}$  no puede crecer sin límite, se debe imponer  $N = 0$ , con lo cual la solución de interés es

$$J_0(z) = M e^{-\gamma z}$$

de manera que la corriente resulta finalmente

$$J_x(z, t) = M e^{-\frac{z}{\delta}} e^{\frac{iz}{\delta}} e^{-i\omega t}. \quad (1.124)$$

Analicemos el resultado: allí aparece un exponente imaginario que tiene como único efecto la modificación de la fase y está ligado a un proceso reactivo (en realidad, inductivo ya que la corriente de desplazamiento es despreciable). Aparece también un exponente real. Éste juega un papel muy importante, ya que introduce un factor de atenuación. En efecto, la corriente es máxima para  $z = 0$  y decrece a partir de allí en forma exponencial hacia el interior del conductor. Este fenómeno tiene dependencia con la frecuencia a través del  $\delta$ , que es el parámetro que lo controla. Por ello, este parámetro es llamado *longitud de penetración*. De su expresión explícita surge el comportamiento esquematizado en la figura (1.12).

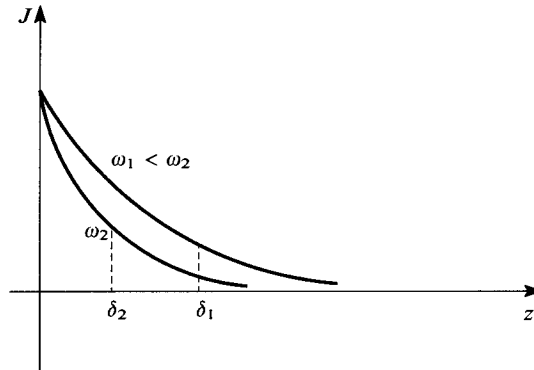


FIGURA 1.12: Longitud de penetración como función de la frecuencia.

Si ahora tratásemos en detalle el caso de un conductor cilíndrico de radio  $a$ , digamos, el resultado que obtendríamos es

$$j \sim e^{-\frac{(a-r)}{\delta}} e^{i\frac{(a-r)}{\delta}}$$

cuya dependencia espacial está indicada en la figura (1.13). En otras palabras, a altas frecuencias la corriente fluye distribuida fundamentalmente sobre la superficie del conductor. Esto justifica el uso de conductores huecos, hecho que tecnológicamente representa un ahorro sustancial de materiales caros como el cobre.

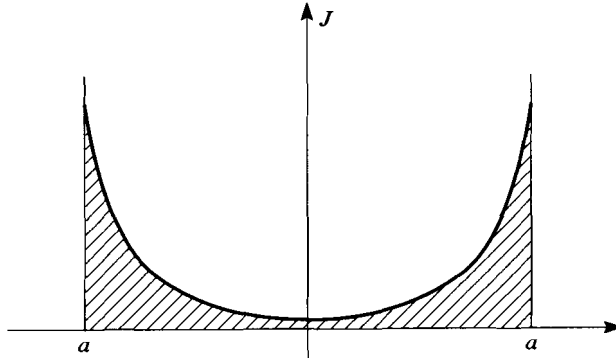


FIGURA 1.13: Densidad de corriente en un conductor cilíndrico de radio  $a$ .

#### 1.4.1. Ondas en medios conductores

Estudiamos ahora el comportamiento de ondas electromagnéticas planas en un medio caracterizado por los parámetros  $\epsilon^r$ ,  $\mu^r$  y  $\sigma$ . Consecuentemente, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ , con dependencia espacial en una única coordenada  $\zeta$ , verifican las ecuaciones

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 4\pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu^r \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (1.125)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - 4\pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu^r \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \quad (1.126)$$

que, como en el caso de dieléctricos, implican campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  transversales a la dirección de propagación de la perturbación electromagnética.

La suposición de dependencia armónica con el tiempo conduce a la ecuación

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \zeta^2} = - \left( \frac{\omega^2}{v^2} + i\omega 4\pi \kappa' \kappa'' \mu_0 \mu^r \sigma \right) \vec{E} = -K^2 \vec{E}, \quad (1.127)$$

donde aparece definido el *vector de onda complejo*

$$K = \alpha + i\beta = \sqrt{k^2 + i\omega \frac{4\pi \kappa \sigma}{\epsilon_0 \epsilon^r v^2}} = k \sqrt{1 + i \frac{4\pi \kappa \sigma}{\epsilon_0 \epsilon^r \omega}}. \quad (1.128)$$

Consecuentemente, las soluciones para  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  adquieren la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\beta \zeta} e^{i(\alpha \zeta - \omega t)} \quad (1.129)$$

y

$$\vec{H} = \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \mu^r \omega} K \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{E} \quad (1.130)$$

respectivamente. Aquí  $\vec{k}/k$  es un versor en la dirección de propagación de la onda que se realiza a lo largo de la coordenada  $\zeta$ .

A partir de las expresiones anteriores podemos concluir que, como consecuencia de que el medio tiene una conductividad finita, la onda electromagnética sufre un amortiguamiento exponencial. Además, los campos eléctrico y magnético no se propagan en fase.

En términos de la discusión precedente, estudiamos en primer lugar el caso de un *buen* conductor, es decir, cuando vale la relación

$$\frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon^r\omega} \ll 1$$

o en otras palabras, nos restringimos a frecuencias no muy altas, digamos menores que las ópticas. En este caso podemos escribir

$$K = k \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon^r\omega}} = (1+i) \sqrt{2\pi\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r\sigma\omega}. \quad (1.131)$$

La situación física que consideramos es la de una onda plana viajando en un dieléctrico ( $\sigma = 0$ ) que incide normalmente sobre la superficie del conductor de conductividad  $\sigma$ . Los campos en el conductor son entonces

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-(\sqrt{2\pi\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r\sigma\omega})\zeta} e^{i[(\sqrt{2\pi\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r\sigma\omega}\zeta - \omega)t]} \quad (1.132)$$

$$\vec{H} = \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi\kappa'\sigma}{\kappa''\mu_0\mu^r\omega}} \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{E}, \quad (1.133)$$

donde hemos elegido medir a  $\zeta$  a partir de la superficie de separación entre medios y la dirección de propagación de la onda apuntando hacia el interior del conductor y perpendicular a su superficie.

Recordamos ahora la definición de *longitud de penetración pelicular* dada en la ecuación (1.123)

$$\delta = (2\pi\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r\sigma\omega)^{-1/2}.$$

A la distancia  $\delta$  los campos se ven disminuidos a  $1/e$  del valor que poseen en la superficie del conductor. Mencionemos como ejemplo que para el cobre  $\delta$  vale 0,85 cm a 60 ciclos/seg y  $0,7 \cdot 10^{-3}$  cm a 100 Megaciclos/seg.

Resulta instructivo también considerar el problema en el caso de un *mal* conductor, o equivalentemente, un conductor frente a una onda de altísima frecuencia, es decir, cuando vale la aproximación

$$\frac{4\pi\kappa\sigma}{\epsilon_0\epsilon^r\omega} \gg 1.$$

En este caso se tiene

$$K \simeq k + i2\pi\sigma \sqrt{\frac{\kappa\kappa'\kappa''\mu_0\mu^r}{\epsilon_0\epsilon^r}}. \quad (1.134)$$

Esta expresión implica que

$$\operatorname{Re} K \gg \operatorname{Im} K.$$

El medio entonces resulta (casi) transparente para la onda electromagnética y la atenuación casi inexistente. Notemos además que esta atenuación es independiente de la frecuencia excepto por pequeñas variaciones debidas a la eventual dependencia en  $\omega$  de  $\epsilon'$  y de  $\mu'$ . Este es el caso de cualquier metal frente a rayos  $X$  que corresponden a frecuencias del orden de  $10^{17}$  o  $10^{18}$  ciclos/seg.

### a) Modelo de Drude

Sobre la base de las siguientes hipótesis:

- existen  $n_0$  electrones por unidad de volumen del conductor, libres de moverse bajo la acción de un campo aplicado
- los electrones están sujetos a una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad de los mismos («fuerza viscosa»), debida a las colisiones entre ellos,

se puede construir un modelo simple para la conducción eléctrica llamado modelo de Drude.

A partir de las hipótesis de partida, la ecuación de movimiento para los electrones es

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}(\vec{r}, t) - m g \dot{\vec{r}}, \quad (1.135)$$

donde  $g$  representa la constante de amortiguamiento.

Al tratarse de campos ligados a ondas electromagnéticas, estamos considerando oscilaciones rápidas. Por lo tanto, los desplazamientos electrónicos provocados por los campos serán mucho menores que la longitud de onda  $\lambda$  de la radiación. Podemos escribir entonces

$$m \ddot{\vec{r}} + m g \dot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad (1.136)$$

donde  $\vec{E}_0$  representa al campo en la posición promedio del electrón. Proponemos ahora para la primera integral de movimiento, la velocidad, la forma

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \vec{v}_0 e^{-i\omega t}$$

de manera que la solución del estado estacionario resulta

$$\vec{v} = \frac{e}{m(g - i\omega)} \vec{E}_0 e^{-i\omega t}. \quad (1.137)$$

Recordando que la densidad de corriente está ligada a la velocidad de los portadores a través de

$$\vec{j} = n_0 e \vec{v}$$

el modelo provee para la «conductividad» la expresión

$$\sigma = \frac{n_0 e^2}{m \sqrt{g^2 + \omega^2}} e^{i\theta} \quad (1.138)$$



con

$$\tan \theta = \frac{\omega}{g}. \quad (1.139)$$

Analicemos este resultado para el caso específico del cobre. En este metal un sólo electrón por átomo participa de la conducción y se tiene

$$n_0 = 8 \cdot 10^{10} \frac{\text{electrones}}{\text{cm}^3}.$$

Recordando que  $\sigma \approx 5 \cdot 10^{17} \text{ 1/seg}$ , resulta que la constante de amortiguamiento del modelo es del orden de

$$g \approx 3 \cdot 10^{13} \frac{\text{colisiones}}{\text{seg}}.$$

Por lo tanto, para frecuencias típicas de la región de microondas ( $\omega \approx 10^{10}$  ciclos/seg, la «conductividad» del cobre es prácticamente real (una verdadera conductividad) e independiente de la frecuencia. Además los vectores  $\vec{j}$  y  $\vec{E}$  están en fase. Por el contrario, para la región de frecuencias mayores tales como las del infrarrojo y el visible, la conductividad es una función de la frecuencia ( $\sigma = \sigma(\omega)$ ), también cualitativamente bien descrita por el modelo de Drude.

### **b) Plasma tenue**

El modelo de Drude que acabamos de introducir nos sirve también para realizar un análisis cualitativo de un plasma tenue frente a una onda electromagnética. Un plasma tenue es un gas de partículas cargadas, globalmente neutro y de baja densidad. Este es el caso, por ejemplo, de la ionosfera, si no se toma en consideración el campo magnético terrestre. En este caso la densidad de electrones  $n_0$  es tan pequeña como para que se presenten muy pocas colisiones. En consecuencia, podemos despreciar el amortiguamiento en primera aproximación. También dejaremos de lado efectos del campo magnético de la onda. Del modelo de Drude (1.138), surge entonces

$$\sigma_{\text{plasma}} \approx i \frac{n_0 e^2}{m \omega},$$

es decir, un número imaginario puro. Por lo tanto, en el plasma tenue la densidad de corriente  $\vec{j}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  están desfasados en  $\pi/2$ . En consecuencia  $\sigma_{\text{plasma}}$  no es una verdadera conductividad ya que no está ligada a pérdidas resistivas.

Por otra parte, el vector de onda complejo (1.128) resulta

$$K^2 \approx k^2 \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right) \quad (1.140)$$

con la frecuencia de plasma  $\omega_p$  definida por

$$\omega_p^2 = \frac{4 \pi \kappa n_0 e^2}{m \epsilon_0 \epsilon^r} \quad (1.141)$$

que tiene valores del orden de  $\omega_p \approx 6 \cdot 10^{10} - 6 \cdot 10^{12}$  ciclos/seg.

Recordando finalmente la relación entre vector de onda e índice de refracción  $k = \frac{\omega}{v_0} n$ , surge

$$n^2 \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1.142)$$

de manera que, si la frecuencia de la onda electromagnética es mayor que la frecuencia de plasma ( $\omega > \omega_p$ ), el índice de refracción del plasma es real. En este caso la propagación es normal y la onda «perfora» la ionosfera como se indica esquemáticamente en la figura (1.14). Por el contrario, si la frecuencia de la radiación es menor que la

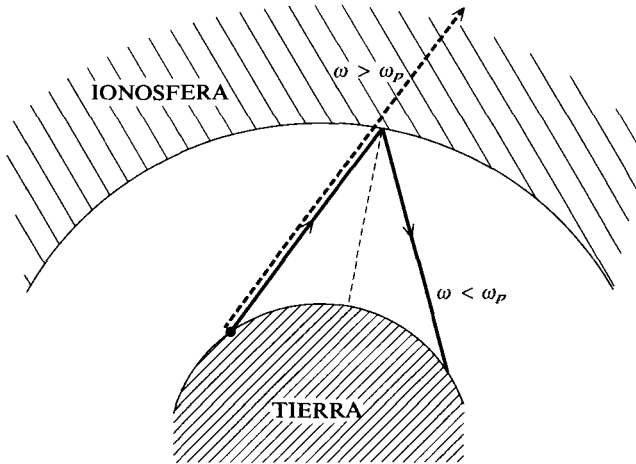


FIGURA 1.14: Comportamiento de la radiación en un plasma tenue.

del plasma ( $\omega < \omega_p$ ), entonces el índice de refracción es imaginario puro y se produce reflexión de las ondas en la ionosfera. Existe así una atenuación en el plasma caracterizada por una longitud pelicular  $\delta_p \sim c/\omega_p$ .

#### 1.4.2. Problemas

- Demostrar que puede producirse un fenómeno de resonancia cerca de una longitud de onda de aproximadamente 212 m para ondas de radio propagándose en una atmósfera de electrones y en el campo magnético de la Tierra. Una importante absorción selectiva se observa en esta región. Suponer que el campo magnético de la tierra es  $B_0 = 0.5 \cdot 10^{-4}$  weber/metro<sup>2</sup>. [ST,V,23]
- Una onda de radio se propaga en una atmósfera ionizada. Calcular y discutir la velocidad de grupo como función de la frecuencia suponiendo que el número de onda  $k$  verifica la expresión

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\frac{4\pi\kappa n_0 e^2}{m \epsilon_0 \epsilon^r}}{\omega^2 \mp \frac{e \kappa' B_0}{m} \omega}$$

que surge de un modelo realista. Aquí  $B_0$  es el campo magnético terrestre. La concentración de electrones en ciertas regiones de la ionosfera es de 1.012 electrones/m<sup>3</sup>. [ST,V,24]

- Deducir el valor de la conductividad de un medio de permitividad relativa  $\epsilon^r = 5$  si, cuando se propaga una onda plana monocromática de frecuencia  $10^8$  Hz, la magnitud de las densidades de corriente de desplazamiento y de conducción en el mismo son iguales ¿Cuál es la atenuación, por unidad de longitud, de la amplitud de una onda plana de frecuencia  $10^6$  Hz cuando se propaga en tal medio? La permeabilidad relativa del medio es  $\mu^r = 1$ . [GP,11,5]
- La conductividad eléctrica del agua de mar es del orden de  $4 (\Omega \text{ m})^{-1}$ . ¿Cuál es la longitud de penetración pelicular para ondas de radio de baja frecuencia (longitud de onda  $\lambda = 3000$  m)? [GP,11,8]
- Estudiar el efecto pelicular en tubos de sección circular, para determinar la resistencia y la inductancia correspondientes (ver capítulo 8 de «Bessel Functions for Engineers», N. W. McLachlan, Oxford at the Clarendon Press, 1955).
- A alturas mayores a 50 Km sobre la superficie de la Tierra, en la ionosfera, las moléculas de gas en la atmósfera están ionizadas por acción de los rayos ultravioleta provenientes del Sol. Si la densidad de electrones libres por unidad de volumen es  $n_0$ , determinar la permitividad eléctrica de la ionosfera para ondas de frecuencia  $\nu$ . (Los campos magnéticos en la ionosfera debidos al movimiento de las cargas pueden no ser tenidos en cuenta al calcular la permitividad relativa.) [GP,11,9]
- Explicar por qué la permitividad eléctrica relativa del vapor de agua comienza a disminuir a una frecuencia menor que la frecuencia a la cual comienza a disminuir la del gas de nitrógeno. [GP,11,11]
- Demostrar que si un material tiene una permeabilidad magnética relativa mayor que la unidad, entonces no habrá reflexión para un cierto ángulo de incidencia, cuando una onda plana incide con su campo eléctrico paralelo a la superficie del material. [GP,11,12]

### 1.5. ONDAS EN DIELECTRICOS ISÓTROPAS

Estudiamos el comportamiento de un medio material dieléctrico, eléctricamente neutro ( $\rho_L = 0$ ) y no magnético ( $\mu^r = 1$ ) frente a la excitación provocada por una onda electromagnética. En el medio se verifica la relación general

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi \kappa \vec{P}, \quad (1.143)$$

que incluye al *vector polarización*  $\vec{P}$  de manera que las ecuaciones de Maxwell resultan

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (1.144)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\kappa'}{\kappa} \left( \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \kappa \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) \quad (1.145)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (1.146)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (1.147)$$

Como consecuencia, la onda electromagnética en el interior del material verifica la ecuación

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -4\pi\kappa' \kappa'' \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (1.148)$$

Estamos entonces en presencia de un término de fuente debido a las cargas de polarización del dieléctrico. Este término es el responsable de diversos efectos ópticos como la dispersión, la absorción, la doble refracción, la actividad óptica, etc.

A los efectos del análisis propuesto conviene introducir un modelo elemental para un dieléctrico simple e isótropo consistente de un medio con electrones ligados a los átomos en forma permanente y sin direcciones preferenciales. Cada uno de estos electrones puede sufrir pequeños desplazamientos alrededor de la posición de equilibrio de valor promedio  $\vec{r}$ . Como consecuencia de estos desplazamientos de las cargas  $-e$ , surge una polarización macroscópica promedio

$$\vec{P} = -n_0 e \vec{r}, \quad (1.149)$$

donde  $n_0$  representa a la densidad volumétrica de electrones.

Nos proponemos desarrollar este modelo mecánico sencillo de la polarización del dieléctrico para poder entender el origen físico del *índice de refracción*. Suponiendo por un momento un campo eléctrico externo estático, la ecuación de equilibrio de fuerzas para cada electrón se escribe

$$-e \vec{E} = \eta \vec{r} \quad (1.150)$$

con  $\eta$  siendo la constante elástica de la fuerza restauradora de los electrones a la posición de equilibrio (ley de Hooke). Consecuentemente, a partir de (1.149) se tiene para la polarización estática

$$\vec{P} = \frac{n_0 e^2}{\eta} \vec{E}, \quad (1.151)$$

resultado elemental de la electrostática.

Consideremos ahora el caso de un campo eléctrico variable en el tiempo, el correspondiente a una onda electromagnética que incide sobre el material. Los electrones pueden pensarse entonces como osciladores armónicos clásicos amortiguados y por lo tanto su ecuación de movimiento es

$$m \ddot{\vec{r}} + m \gamma \dot{\vec{r}} + \eta \vec{r} = -e \vec{E}, \quad (1.152)$$

donde  $\gamma > 0$  es la constante de amortiguamiento cuyo origen se debe a las colisiones entre átomos o la desexcitación a través de átomos vecinos. Los efectos de la componente magnética de la onda fueron despreciados.

Para resolver esta ecuación y obtener el valor de  $\vec{r}$  que permita expresar la polarización producida por la oscilación forzada, es conveniente suponer una dependencia temporal armónica para el campo  $\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_\omega e^{-i\omega t}.$$

Como consecuencia, los electrones se mueven con la misma frecuencia que la excitación

$$\vec{r} = \vec{r}_\omega e^{-i\omega t}$$

de manera que la ecuación (1.152) resulta

$$(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + \eta) \vec{r}_\omega = -e \vec{E}_\omega.$$

Es inmediato obtener ahora la polarización como función de la frecuencia, usando la relación (1.149)

$$\vec{P}_\omega = \frac{n_0 e^2}{(-m\omega^2 - i\omega m\gamma + \eta)} \vec{E}_\omega. \quad (1.153)$$

De esta expresión se desprende que en general el vector polarización  $\vec{P}$  toma valores complejos. Más aún, la fase de  $\vec{P}$  no coincide con la fase del vector  $\vec{E}$ . Es decir, hay un desfase entre la excitación y la respuesta del medio, medida por la polarización. Es importante destacar que el vector polarización  $\vec{P}$  adquiere necesariamente una dependencia con la frecuencia. Sólo a frecuencia cero se recupera la relación estática (1.151).

Podemos ahora intentar mejorar el modelo simple de dieléctrico que venimos estudiando, reemplazando al campo original  $\vec{E}$  por un campo efectivo  $\vec{E}_{ef}$  que incluya la contribución de la polarización del medio a través del campo ligado a una cavidad esférica. Es decir, reemplazar

$$\vec{E} \rightarrow \vec{E}_{ef} = \vec{E} + \frac{1}{3} \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \vec{P}$$

de modo que la relación (1.153) se corrige

$$\vec{P}_\omega = \frac{n_0 e^2 / m}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \vec{E}_\omega, \quad (1.154)$$

donde se ha introducido la frecuencia de resonancia efectiva de los electrones,  $\omega_0$ , definida por

$$\omega_0 = \left( \frac{\eta}{m} - \frac{4\pi\kappa n_0 e^2}{3\epsilon_0 m} \right)^{1/2} \quad (1.155)$$

que está relacionada con el fenómeno de dispersión anómala. Podrían existir varias frecuencias de absorción en el medio, en cuyo caso habría que generalizar este tratamiento, sumando en (1.154) sobre  $\omega_{0,i}$  y sobre las correspondientes  $\gamma_i$ .

Notemos que bajo las presentes condiciones modelísticas del medio material, la ecuación de onda para el campo eléctrico en su interior resulta

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{E}_\omega &= - \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \left[ 1 + \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \frac{n_0 e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \right] \vec{E}_\omega \\ &= -K^2 \vec{E}_\omega. \end{aligned} \quad (1.156)$$

Para resolver esta ecuación proponemos la solución

$$\vec{E}_\omega = \vec{E}_0 e^{iK\vec{r}\cdot\vec{z}}, \quad (1.157)$$

donde el vector de onda  $K$  es en general complejo. La dirección de propagación está dada por  $\hat{n}$ . Por lo tanto podemos escribir

$$K = K_R + i K_I \quad (1.158)$$

de manera que la solución completa para  $\vec{E}$  resulta

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-K_I \zeta} e^{i(K_R \zeta - \omega t)} \quad (1.159)$$

incluyendo un exponencial decreciente que da cuenta de la absorción eventual de la onda electromagnética en el medio, medida por el *coeficiente de absorción*  $K_I$ . Notemos además que al ser  $K_R \neq k = \omega/c$ , aparecen contribuciones a la fase, dependientes de la frecuencia. Por lo tanto, si en el medio en cuestión se propaga una señal definida por un paquete de onda, se debe esperar su disminución en magnitud debido a la absorción y además una deformación por la aparición de desfases entre las componentes.

Recordando ahora la relación entre vector de onda e índice de refracción ( $K = (\omega/c) \nu$ ), surge de inmediato el índice de refracción complejo dependiente de la frecuencia

$$\nu(\omega) = \left[ 1 + \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \frac{n_0 e^2}{m} \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \right]^{1/2} = \nu_R(\omega) + i \nu_I(\omega), \quad (1.160)$$

donde la parte imaginaria  $\nu_I$  es llamada *coeficiente de extinción*. Notemos que en el límite de absorción nula ( $\gamma = 0$ ),  $\nu(\omega)$  coincide con el índice de refracción usual  $n$ .

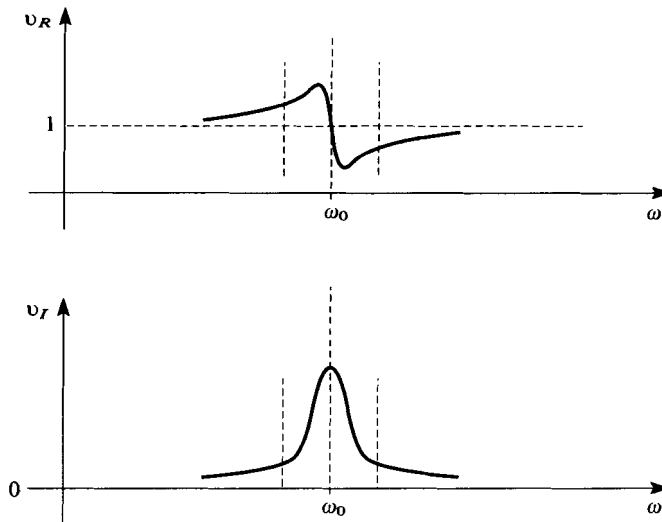


FIGURA 1.15: Parte real y parte imaginaria del índice de refracción en función de la frecuencia.

El comportamiento con la frecuencia de las partes real e imaginaria del índice de refracción está indicado en la figura (1.15), donde resulta clara la presencia de la dispersión anómala alrededor de la frecuencia de resonancia efectiva  $\omega_0$ .

### 1.5.1. Dispersión de la permitividad dieléctrica

Como vimos, las ecuaciones de Maxwell son incompletas mientras no se establecen las *relaciones constitutivas*, características del medio donde ocurren los fenómenos y que involucran a los vectores  $\vec{E}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ . Cuando los campos mencionados se refieren a los de ondas electromagnéticas y en particular a altas frecuencias, las relaciones constitutivas pueden diferenciarse sustancialmente de las del caso estático.

En primer lugar encontramos que la relación instantánea entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  (1.9) y la correspondiente entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  (1.10) deja de ser cierta en general. En efecto, los vectores  $\vec{D}(t)$  y  $\vec{B}(t)$  pueden muy bien depender de los valores de  $\vec{E}(t)$  y  $\vec{H}(t)$ , respectivamente, en todos los instantes previos a  $t$ . Este hecho expresa simplemente que el establecimiento de la polarización eléctrica o de la magnetización en la materia no es instantánea ni puede persistir sin cambios cuando el campo electromagnético varía temporalmente. En esta sección nos referiremos en particular al caso eléctrico.

Comencemos recordando que la relación general entre el momento dipolar por unidad de volumen medido por el vector polarización  $\vec{P}$  y los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi \kappa \vec{P} \quad (1.161)$$

es absolutamente general y mantiene su validez aun en el caso de campos con dependencia temporal no trivial, es decir, cuando hay dispersión. Supondremos además que la relación entre el vector desplazamiento  $\vec{D}$  y el vector intensidad de campo eléctrico  $\vec{E}$  es lineal. Entonces, la relación causal (e independiente del origen del tiempo) más general entre el vector  $\vec{D}(t)$  en el instante  $t$  y el campo vectorial  $\vec{E}(\tau)$  dado para todos los tiempos  $\tau$  anteriores a  $t$  puede ser escrita como la integral

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \epsilon_0 \int_0^\infty f(\tau) \vec{E}(t - \tau) d\tau, \quad (1.162)$$

donde el primer término, proporcional a  $\vec{E}(t)$ , fue separado sólo por conveniencia. En esta expresión  $f(\tau)$  representa una función del tiempo que contiene también la dependencia con las propiedades del medio material en cuestión. Esta función  $f(\tau)$ , para medios pasivos, debe ser finita para todo valor de  $\tau$  incluido  $\tau = 0$ . A fin de garantizar esta propiedad, es que separamos explícitamente  $\vec{E}(t)$  de manera de no incluir una función delta en su definición. Además  $f(\tau)$  debe tender a cero para  $\tau \rightarrow \infty$ ; esta condición tiene su correlato físico, ya que la función  $f(\tau)$  es apreciable sólo para tiempos del orden del tiempo de relajación, característico del material.

La ecuación anterior (1.162), por analogía con la electrostática, puede ser escrita formalmente como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon}^r \vec{E}, \quad (1.163)$$

donde  $\hat{\epsilon}^r$  representa al operador integral definido en (1.162).

Como es habitual en los análisis de problemas temporales, consideramos dependencias armónicas en el tiempo

$$e^{-i\omega t}.$$

Bajo estas condiciones, la ecuación (1.162) se escribe

$$\vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon^r(\omega) \vec{E}(\omega), \quad (1.164)$$

donde se ha definido

$$\epsilon^r(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (1.165)$$

A partir de esta expresión para campos periódicos, podemos pensar en la permitividad dieléctrica (el coeficiente de proporcionalidad entre los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ ) como en una función de la frecuencia, conteniendo además la información del medio material.

La dependencia de la función  $\epsilon^r(\omega)$  con la frecuencia es lo que se denomina *ley de dispersión* del medio. Esta función  $\epsilon^r(\omega)$  es en general compleja, es decir,

$$\epsilon^r(\omega) = \epsilon_R^r(\omega) + i \epsilon_I^r(\omega) \quad (1.166)$$

con la condición

$$\epsilon^r(-\omega) = [\epsilon^r(\omega)]^* \quad (1.167)$$

como surge de la definición (1.165), siempre que  $\omega$  sea real. Esta propiedad, en términos de las partes real ( $R$ ) e imaginaria ( $I$ ), conduce a las llamadas relaciones de cruce

$$\begin{aligned} \epsilon_R^r(-\omega) &= \epsilon_R^r(\omega) \\ \epsilon_I^r(-\omega) &= -\epsilon_I^r(\omega). \end{aligned} \quad (1.168)$$

Es claro que el límite de frecuencia cero de la función  $\epsilon^r(\omega)$  debe coincidir con la constante dieléctrica de la electrostática

$$\epsilon^r(0) = \epsilon^r.$$

Los desarrollos perturbativos en serie de la frecuencia  $\omega$  tanto de la parte real como de la parte imaginaria de  $\epsilon^r(\omega)$  (1.166) deberán, de acuerdo a la paridad dada por las relaciones de cruce (1.168), comenzar con  $\epsilon^r$ , en el caso de la parte real y de un término lineal en  $\omega$  para la parte imaginaria.

En el límite opuesto de frecuencia grande ( $\omega \rightarrow \infty$ ) la función  $\epsilon^r(\omega)$  tiende al valor del vacío ( $\epsilon_{\text{vacío}}^r = 1$ ), ya que si el campo cambia con suficiente rapidez, el proceso de polarización, que es el responsable en última instancia de la distinción entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , no tendrá tiempo de ocurrir. La «indecisión» de la polarización hace que los efectos promedien a cero. A partir del modelo simple de dieléctrico que introdujimos anteriormente y que condujo a la ecuación (1.154), surge entonces para  $\omega \gg \omega_0$ ,

$$\vec{P} = -\frac{n_0 e^2}{m \omega^2} \vec{E},$$

de donde podemos leer

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \epsilon^r(\omega) = 1 - \frac{n_0 e^2}{m \omega^2}, \quad (1.169)$$

expresión que tiene validez para el ultravioleta lejano en el caso de elementos livianos y para el rango de rayos X en el caso de elementos pesados.



**Propiedades de  $\epsilon^r(\omega)$** 

Utilizamos los métodos de la teoría de funciones de variable compleja para estudiar las propiedades generales de la permitividad dieléctrica como función de la frecuencia. A ese fin es conveniente extender el análisis a valores complejos de la frecuencia, es decir, considerar

$$\omega = \omega_R + i \omega_I \quad (1.170)$$

y estudiar entonces la función  $\epsilon^r(\omega)$  en el semiplano superior del plano complejo  $\omega$  donde está bien definida de acuerdo a (1.165). En efecto, de las propiedades exigidas para la función  $f(\tau)$  surge de inmediato que la función  $\epsilon^r(\omega)$  es uniforme y regular en todo el semiplano superior de  $\omega$  ya que el integrando de (1.165) incluye el exponencial

$$e^{i\omega\tau} = e^{i\omega_R\tau} e^{-\omega_I\tau}$$

que tiende a cero cuando  $\omega_I > 0$ , ya que para garantizar la causalidad debe ser  $\tau > 0$ . Por esta razón la integral se extiende sólo entre 0 e  $\infty$  y no entre  $-\infty$  y  $+\infty$ .

Por otra parte, también a partir de (1.165), resulta que para  $\omega$  complejo

$$\epsilon^r(-\omega^*) = [\epsilon^r(\omega)]^*, \quad (1.171)$$

propiedad que para valores de  $\omega$  imaginarios da lugar a

$$\epsilon^r(i\omega_I) = [\epsilon^r(i\omega_I)]^*, \quad (1.172)$$

o en otras palabras, la función  $\epsilon^r(\omega)$  es real en el eje imaginario del plano  $\omega$ . Esta propiedad, o mejor la previa, garantiza a partir de la relación (1.163) que el vector  $\vec{D}$  asume valores reales para valores reales de  $\vec{E}$ . Además, consideraciones termodinámicas referidas a la absorción de las ondas electromagnéticas en un dieléctrico muestran que debe cumplirse

$$Im[\epsilon^r(\omega)] > 0 ; \text{ para } \omega \text{ real } > 0$$

de manera que junto a las propiedades discutidas arriba se puede concluir que

$$Im[\epsilon^r(\omega)] \gtrless 0 ; \text{ para } \omega = \omega_R \gtrless 0.$$

Es decir, que  $Im[\epsilon^r(\omega)]$  sólo puede anularse en el eje real para  $\omega = 0$ .

En resumen, la función  $\epsilon^r(\omega)$  es real solamente sobre el eje imaginario del plano  $\omega$ , donde decrece monótonamente desde el valor estático  $\epsilon^r$  hasta el valor 1 para  $\omega \rightarrow \infty$ , de manera que no tiene ceros en el semiplano superior de  $\omega$ .

Usaremos ahora las propiedades mencionadas de la función  $\epsilon^r(\omega)$ , para obtener relaciones entre su parte real y su parte imaginaria. Para ello fijamos un valor real  $\omega_0$  de  $\omega$  e integramos la función

$$\frac{[\epsilon^r(\omega) - 1]}{(\omega - \omega_0)}$$

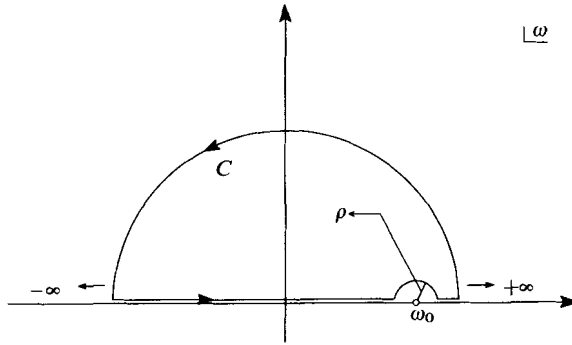


FIGURA 1.16: Contorno de integración para la permitividad dieléctrica.

en el contorno de la figura (1.16). Como establecimos que  $\epsilon^r(\omega) \rightarrow 1$  para  $\omega \rightarrow \infty$ , la integral en cuestión converge. Más aún, debido a que no hay polos circundados por el circuito de integración, la integral se anula. Además, debido a que la integral en el semicírculo es cero, podemos escribir

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\omega_0 - \rho} \frac{[\epsilon^r(\omega) - 1]}{(\omega - \omega_0)} d\omega + \int_{\omega_0 + \rho}^{+\infty} \frac{[\epsilon^r(\omega) - 1]}{(\omega - \omega_0)} d\omega \right\} - i\pi [\epsilon^r(\omega_0) - 1] = 0 \quad (1.173)$$

o, en forma más compacta, como la integral en valor principal

$$\mathcal{V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\epsilon^r(\omega) - 1]}{(\omega - \omega_0)} d\omega - i\pi [\epsilon^r(\omega_0) - 1] = 0.$$

Finalmente, tomando parte real y parte imaginaria en esta última expresión resultan las llamadas *relaciones de Kramers-Krönig*

$$\epsilon_R^r(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} \mathcal{V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon_I^r(x)}{(x - \omega)} dx \quad (1.174)$$

$$\epsilon_I^r(\omega) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{V} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\epsilon_R^r(x) - 1]}{(x - \omega)} dx. \quad (1.175)$$

Ellas muestran que las partes real e imaginaria de la permitividad dieléctrica son transformadas de Hilbert una de la otra. Estas relaciones surgieron de la regularidad de la función  $\epsilon^r(\omega)$  en el semiplano superior de  $\omega$ , es decir, son consecuencia directa de la *causalidad*. Es importante destacar que el resultado obtenido es consecuencia de un tratamiento muy general basado en el teorema de Titchmarsh que está analizado en el correspondiente Apéndice por causalidad.

*Apéndice por causalidad*

Consideramos un sistema lineal arbitrario que produce una señal de respuesta  $G(t)$  inducida por una señal de entrada  $A(t)$ . En general la respuesta tendrá la forma

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(t, t') A(t') dt', \quad (1.176)$$

donde  $F(t, t')$  es la *función de respuesta*. Como ejemplo de esta relación recordemos la expresión (1.162) que relaciona los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ .

Si el sistema en cuestión es invariante temporal, sus parámetros característicos no dependen del tiempo y su función de respuesta será sólo función de  $(t - t')$ . Es decir, se reemplaza  $F(t, t')$  por  $F(t - t')$ . Además, el sistema es *causal* si verifica la condición

$$F(t - t') = 0 \quad \text{si } t < t', \quad (1.177)$$

que establece que la respuesta en un dado tiempo cualquiera puede depender sólo de la parte de la entrada correspondiente a tiempos anteriores, es decir, la parte que ha sido efectivamente recibida.

Si hacemos ahora un análisis de Fourier de  $A(t)$ ,  $F(t)$  y  $G(t)$  y llamamos  $a(\omega)$ ,  $f(\omega)$  y  $g(\omega)$  a las respectivas transformadas

$$A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} a(\omega) d\omega ; \text{ etc.},$$

tendremos entonces, a partir del teorema de convolución, que

$$g(\omega) = f(\omega) \cdot a(\omega). \quad (1.178)$$

Además, si la función  $A(t)$  se anula para  $t < 0$ , la función  $G(t)$  también tendrá ese comportamiento. Bajo esas condiciones se puede aplicar el teorema de Titchmarsh a  $a$  y  $g$ , siempre que  $A(t)$  sea de cuadrado integrable y que  $F(t)$  esté acotada para todo valor de  $t$ .

Hagamos entonces un pequeño paréntesis sobre el *teorema de Titchmarsh* («The Theory of Fourier Integrals», E. C. Titchmarsh, Clarendon Press, Oxford, 1948, Teorema 95):

*Si  $a(\omega)$  es la transformada de Fourier de una función  $A(t)$  que se anula para todo  $t < 0$  y si la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(\omega)|^2 d\omega$$

*está acotada; entonces existe una función analítica  $\tilde{a}(u + iv)$  de la variable compleja  $(u + iv)$  que tiene las siguientes propiedades:*

1.  $\lim_{v \rightarrow 0^+} \tilde{a}(u + i v) = a(u)$ ; siendo el límite en media.
2. La función  $\tilde{a}(u + i v)$  no tiene singularidades para  $v > 0$ .
3. La integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{a}(u + i v)|^2 du$$

está acotada para todo valor de  $v > 0$ .

Volviendo a nuestro análisis del sistema lineal, concluimos que  $a(\omega)$  y  $g(\omega) = f(\omega) \cdot a(\omega)$  no tienen singularidades en el semiplano superior ( $\text{Im } \omega > 0$ ). Además, como  $a(\omega)$  es suficientemente arbitraria, deducimos que  $f(\omega)$  tampoco tiene singularidades en ese semiplano.

Consideremos ahora la integral

$$\int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)} d\omega$$

en un contorno como el indicado en la figura (1.16) y la propiedad (J. S. Toll, *Physical Review* 104, 1760, (1956)) que establece que si la función  $F(t)$  está acotada para todo  $t$ , entonces su transformada de Fourier  $f(\omega)$  está acotada para todo  $\text{Im } \omega > 0$ . Como consecuencia, la integral sobre el semicírculo en el infinito  $\circ$  se anula o puede forzarse su anulación incluyendo otro factor  $(\omega - \omega_1)$  en el denominador del integrando (con la correspondiente deformación del contorno alrededor del punto  $\omega_1$ ). Este último es el llamado proceso de sustracción en la teoría de las relaciones de dispersión. Suponiendo, para simplificar, que no hacen falta sustracciones, el Teorema de Cauchy provee entonces el resultado

$$\int_C \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)} d\omega = 0 = \mathcal{V}\mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega)}{(\omega - \omega_0)} d\omega - i \pi f(\omega),$$

de donde, tomando las partes real e imaginaria, surgen las relaciones de dispersión del tipo de Kramers-Krönig. En otras palabras, estas relaciones son una consecuencia directa, vía el teorema de Titchmarsh, de las condiciones de causalidad.

## 1.5.2. Problemas

- El agua pura tiene una constante dieléctrica de 80 para campos eléctricos estáticos, en tanto que su índice de refracción para la luz visible es 1,33. Calcular la razón de la constante dieléctrica estática a la correspondiente a esta frecuencia y explicar cualitativamente la causa de esta diferencia. [PU,11,6]
- Un haz de luz monocromática polarizado linealmente y dirigido a lo largo del semieje  $y$  positivo está representado por

$$E_z = G \cos \omega(t - y/c).$$

Un átomo muy pesado, situado en el origen, puede polarizarse por el desplazamiento de un solo electrón una distancia  $r$  desde el núcleo. El movimiento del electrón obedece la ecuación

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + k \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}.$$

1. Deducir una expresión para el movimiento del electrón debido a la luz polarizada.
  2. Hallar el momento dipolar oscilante del átomo, suponiendo  $k$  despreciable, y obtener una expresión en coordenadas esféricas de la energía emitida por el átomo.
  3. Obtener el valor de  $k$  en la ecuación diferencial, suponiendo que la única pérdida de energía se debe a la radiación secundaria (difusión) por el átomo.
  4. Si se difunde luz ordinaria a lo largo del semieje  $x$  positivo ¿aparece polarizada? [PU,11,18]
- En la parte superior de la atmósfera la luz solar es difundida por átomos y moléculas. La luz ordinaria puede considerarse como un conjunto de impulsos que tienen lugar en instantes distribuidos al azar, cuyas direcciones de polarización son también al azar, aunque perpendiculares a la de propagación. Para la luz, que se propaga paralelamente al eje  $y$ , cada impulso contiene un largo tren de ondas cuyas componentes  $x$  y  $z$  están dadas por

$$E_x = G_x \cos \omega(t - y/c) \quad y \quad E_z = G_z \cos \omega(t - y/c),$$

donde  $G^2 = G_x^2 + G_z^2$ .

1. Si luz solar paralela al eje  $y$  incide sobre el átomo del problema anterior, describir el estado de polarización (si existe) de la luz difundida a lo largo del eje  $x$  positivo.
  2. Determinar la dependencia con la frecuencia de la luz difundida y establecer qué colores predominan en esta luz si  $\omega_0$  corresponde a las frecuencias del ultravioleta. ¿Coinciden estas deducciones con las observaciones de la luz difundida por el cielo? [PU,11,19]
- Demostrar que cuando una onda electromagnética plana incide normalmente sobre la superficie plana de separación de dos dieléctricos distintos, el ritmo con el cual la energía abandona la superficie mediante los haces refractado y reflejado es igual al ritmo con que la energía incide sobre la superficie. [PU,11,25]
  - Un medio no conductor de extensión infinita es isotrópico pero su permitividad eléctrica  $\epsilon^r$  es una función de la posición. Demostrar primero que el vector de campo eléctrico satisface la ecuación

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = -\vec{\nabla} \left( \vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} \epsilon^r}{\epsilon^r} \right),$$

donde el tiempo entra sólo a través del factor exponencial  $e^{-i\omega t}$ . Se supone ahora que el cambio espacial de  $\epsilon^r$  en distancias del orden de la longitud de onda es pequeño, de manera que  $|\vec{\nabla} \epsilon^r| \lambda \ll 1$ . Demostrar que el miembro de la derecha puede despreciarse y que la propagación está determinada aproximadamente por

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0,$$

donde  $\eta$  es una componente rectangular de  $\vec{E}$  o de  $\vec{H}$  y  $k$  es una función de variación lenta con la posición. Luego, si

$$\eta = \eta_0 e^{i\phi} \quad ; \quad \phi = -\omega t + k_0 S$$

con  $\phi$  una fase,  $k_0 = \omega/c$  y  $S$  una función de la posición, demostrar que la función de fase  $S$  está determinada por la ecuación

$$(\nabla S)^2 + \frac{1}{ik_0} \nabla^2 S = \epsilon^r,$$

donde

$$(\nabla S)^2 = \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2.$$

Tener en cuenta que  $S$  es en general compleja, aunque  $\epsilon^r$  es real y que la amplitud de la onda es también una función de posición de variación lenta. [ST,V,10]

## 1.6. ECUACIÓN DE ONDAS INHOMOGÉNEA

Nos interesa analizar las ecuaciones de Maxwell con fuentes externas a fin de estudiar los procesos de radiación de ondas electromagnéticas. El tratamiento del problema se hace particularmente simple si se introducen los llamados *potenciales electromagnéticos*.

### 1.6.1. Potenciales electromagnéticos

Consideramos las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes  $(\rho, \vec{j})$ . Es decir, cuando existen densidades de carga generales  $\rho(\vec{r}, t)$  y densidades de corriente generales  $\vec{j}(\vec{r}, t)$ . Sabemos que cuando se presentan variaciones temporales de fuentes y campos, se satisface en particular la ley de Faraday que implica que

$$\vec{E} \neq -\vec{\nabla} \Phi.$$

Por otra parte, el carácter solenoidal del campo magnético  $\vec{B}$ , permite, recordando el Apéndice poético, escribir (siempre que la topología del espacio sea suficientemente simple)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \quad (1.179)$$

es decir, escribir a  $\vec{B}$  como el rotor de un vector  $\vec{A}$  que se llama *potencial vector*. En consecuencia, la ley de Faraday se escribe

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \vec{\nabla} \wedge \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.180)$$

o también, recordando nuevamente el Apéndice poético,

$$\left[ \vec{E} + \kappa'' \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\vec{\nabla}\Phi \quad (1.181)$$

con  $\Phi$  una función escalar: el *potencial escalar*.

En principio entonces, los campos eléctrico y magnético quedan determinados por las ecuaciones

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - \kappa'' \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad (1.182)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}. \quad (1.183)$$

Resulta por lo tanto, como lo establece el teorema contenido en el Apéndice sobre la definición de un campo vectorial, que existe una arbitrariedad en la caracterización del potencial vector  $\vec{A}$ . En efecto, resta dar su divergencia. La libertad de elección de la divergencia del vector  $\vec{A}$  está directamente ligada a, o si se quiere, es la fuente de, la *simetría de gauge* del electromagnetismo. Es importante destacar que esta simetría está en la base de la comprensión actual de las interacciones fundamentales de la Naturaleza. Por ello, volveremos a ocuparnos de esta simetría, en lo inmediato y también cuando tratemos en detalle los aspectos formales y estructurales de la teoría electromagnética.

Retomamos ahora las ecuaciones de Maxwell en presencia de fuentes, que escribimos en términos de los potenciales escalar y vector. Tenemos así

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = 4\pi \kappa' \mu_0 \mu^r \vec{j} - \frac{\epsilon_0 \epsilon^r \mu_0 \mu^r \kappa'}{\kappa} \left[ \vec{\nabla} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \kappa'' \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} \right] \quad (1.184)$$

$$\nabla^2 \Phi + \kappa'' \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{4\pi \kappa}{\epsilon_0 \epsilon^r} \rho \quad (1.185)$$

similares a las ecuaciones de onda generales para  $\vec{E}$  y para  $\vec{H}$ .

El próximo objetivo es desacoplar estas ecuaciones aprovechando la mencionada arbitrariedad en el valor de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ . Digamos, en conexión con la discusión previa, que fijar el valor de la divergencia del potencial vector se denomina *fijar el gauge*.

La simetría de gauge mencionada surge de la invarianza del problema magnético frente a cualquier transformación de  $\vec{A}$  del tipo

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \quad (1.186)$$

siendo  $\psi$  cualquier función escalar. A partir de las ecuaciones de Maxwell arriba, es evidente que para garantizar también la invarianza del sector eléctrico debemos operar una transformación del potencial escalar de la forma

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \kappa'' \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (1.187)$$

que debe realizarse en forma simultánea con la anterior para  $\vec{A}$ .

En otras palabras, al realizar transformaciones de gauge (1.186) y (1.187), si bien se termina con potenciales electromagnéticos diferentes, éstos representan a los *mismos*

campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Insistimos entonces en que la representación de los campos eléctricos y magnéticos en términos de los potenciales  $\Phi$  y  $\vec{A}$ , pone de manifiesto la *simetría de gauge* del electromagnetismo. La descripción se hace entonces haciendo uso de una familia de potenciales que difieren entre sí por una transformación de gauge. La elección de miembros particulares de esa familia es precisamente el fijado del gauge.

Pasamos revista ahora a las elecciones de gauge usuales.

### ***Gauge de Coulomb***

Corresponde a la elección

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0, \quad (1.188)$$

que conduce de inmediato, a partir de (1.185), a la ecuación de Poisson para el potencial escalar

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 \epsilon^r} \rho.$$

Esta ecuación tiene como solución, en el caso sin fronteras, a la bien conocida forma del potencial electrostático instantáneo

$$\Phi(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon^r} \int \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dr'.$$

Esta es la razón del nombre del gauge. Por otro lado, el potencial vector  $\vec{A}$  satisface una ecuación de onda inhomogénea.

La contribución al campo  $\vec{E}$  que proviene del potencial escalar  $\Phi$  obtenido arriba, ciertamente se comporta como  $1/r^2$  para  $r$  suficientemente grande. Por otra parte, los campos de radiación están definidos precisamente por el comportamiento  $1/r$ . Consecuentemente, para el cálculo de campos en el régimen de radiación, se puede imponer la condición

$$\Phi = 0, \quad (1.189)$$

que junto a la definición del gauge de Coulomb (1.188) determinan el llamado *gauge de radiación*. En este gauge, la relación campos-potenciales es entonces

$$\vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}.$$

Finalmente mencionamos que el gauge de Coulomb y el más restringido gauge de radiación son conocidos también en la literatura con el nombre de *gauge transversal*, por obvias razones.



**Gauge de Lorentz**

Surge de la elección

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{\epsilon_0 \epsilon^r \mu_0 \mu^r \kappa'}{\kappa} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (1.190)$$

que tiene la forma de una ecuación de continuidad y que permite que las ecuaciones (1.184) y (1.185) se desacoplen dando lugar a

$$\nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi \kappa' \mu_0 \mu^r \vec{j} \quad (1.191)$$

$$\nabla^2 \Phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{4\pi \kappa}{\epsilon_0 \epsilon^r} \rho, \quad (1.192)$$

es decir, tanto el potencial escalar  $\Phi(\vec{r}, t)$  como el potencial vector  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  satisfacen la ecuación de las ondas inhomogénea con  $\rho$  y  $\vec{j}$  como fuentes respectivas y con

$$v = \sqrt{\frac{\kappa}{\epsilon_0 \epsilon^r \mu_0 \mu^r \kappa' \kappa''}}$$

la velocidad de propagación.

Debemos notar que aun cuando ha sido fijado el gauge, el de Lorentz en este caso, resta una arbitrariedad en la determinación de los potenciales. En efecto,  $\Phi$  y  $\vec{A}$  continuarán a satisfacer la condición de fijado de gauge de Lorentz si se hace una nueva transformación de gauge definida esta vez por una función escalar  $\psi$  particular que satisfaga

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0. \quad (1.193)$$

Esta simetría de gauge parcial remanente está emparentada con la llamada simetría de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST), de fundamental importancia en la teoría cuántica de campos contemporánea.

**1.6.2. Función de Green del D'Alambertiano**

Por razones de simplicidad restringimos el estudio de las ecuaciones para los potenciales al espacio vacío, es decir, cuando

$$\epsilon^r = \mu^r = 1,$$

de manera que tendremos (ver Apéndice sobre sistemas de unidades)

$$\frac{\kappa' \mu_0 \kappa''}{\kappa / \epsilon_0} = \frac{1}{c^2}$$

y por lo tanto, en las ecuaciones anteriores (1.191) y (1.192), la velocidad  $v$  es reemplazada por  $c$ .

Vamos a hacer un tratamiento simetrizado de ambas ecuaciones, introduciendo notación tetravectorial. Es decir, consideramos al tiempo como una cuarta coordenada y definimos el tetravector  $x_\mu$ ,  $\mu = 1, 2, 3, 4$  mediante

$$x_\mu \equiv (x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z; x_4 = i c t), \quad (1.194)$$

cuya caracterización más precisa en términos de sus propiedades de transformación se discute en la sección dedicada a la Teoría de la Relatividad. De manera análoga, definimos el tetravector potencial

$$A_\mu \equiv (\kappa'' c \vec{A}; A_4 = i \Phi) \quad (1.195)$$

y el tetravector fuente (o corriente)

$$J_\mu \equiv (\vec{J}; J_4 = i c \rho). \quad (1.196)$$

A partir de estas definiciones, las ecuaciones para  $\vec{A}$  y para  $\Phi$  pueden escribirse en forma conjunta como

$$\nabla^2 A_\mu + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_4^2} = -\frac{4 \pi \kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu. \quad (1.197)$$

Definiendo además el operador D'Alambertiano

$$\square^2 \equiv \nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}. \quad (1.198)$$

podemos escribir finalmente la ecuación para el tetravector potencial electromagnético en el gauge de Lorentz

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4 \pi \kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu; \quad \mu = 1, 2, 3, 4 \quad (1.199)$$

que se reconoce como una ecuación de Poisson en el espacio tetradimensional (1.194), llamado *espacio de Minkowski*.

Es tradicional introducir la coordenada  $x_0$  mediante

$$x_0 = c t, \quad (1.200)$$

de manera que  $x_4 = i x_0$  y el tetravector posición queda definido alternativamente por

$$x_\mu \equiv (x_1; x_2; x_3; i x_0). \quad (1.201)$$

Consecuentemente el operador D'Alambertiano resulta

$$\square^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_0^2}. \quad (1.202)$$

Para atacar la solución del problema electromagnético definido por la ecuación (1.199) utilizamos el método de Green. Para ello calculamos la *función de Green* del D'Alambertiano, es decir, la solución  $g(x, x')$  de

$$\square^2 g(x, x') = -4 \pi \delta^4(x - x') \quad (1.203)$$

con las adecuadas condiciones de contorno y donde

$$\delta^4(x) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_0).$$

Para continuar es conveniente introducir el tetravector de onda, mediante

$$k_\mu \equiv (k_1; k_2; k_3; ik_0); \quad k_0 = c\omega, \quad (1.204)$$

de modo que las transformadas de Fourier se escriben

$$\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik \cdot (x - x')} d^4k \quad (1.205)$$

y

$$g(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(k) e^{ik \cdot (x - x')} d^4k, \quad (1.206)$$

donde

$$k \cdot x \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0 \quad (1.207)$$

define el producto escalar de los tetravectores.

Volviendo a la ecuación (1.203) con estas transformadas, es inmediato obtener la función de Green en el espacio transformado  $k$

$$\mathcal{G}(k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k \cdot k'}, \quad (1.208)$$

de manera que la función de Green que requerimos está dada por

$$g(x, x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ik \cdot (x - x')}}{k \cdot k} d^4k. \quad (1.209)$$

Calculamos ahora la integral teniendo en cuenta que

$$a \cdot b = \vec{a} \cdot \vec{b} - a_0 b_0$$

y podemos escribir

$$g(x, x') = \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')} d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ik_0(x_0 - x'_0)}}{k^2 - k_0^2} dk_0.$$

Teniendo presente que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{k^2 - k_0^2} d^3k = 2\pi^2 \frac{e^{\pm ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|},$$

donde el doble signo surge de la manera de regularizar la singularidad provocada por los ceros del denominador del integrando, mediante la prescripción de reemplazar  $k_0$  por  $k_0 \pm i0$ . Debido a este doble signo, existen dos soluciones para la función de Green, las llamadas función de Green *avanzada* ( $g^A$ ) y función de Green *retardada* ( $g^R$ ) respectivamente.

$$g^A(x, x') = \frac{1}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_0[(x_0 - x'_0) + |\vec{r} - \vec{r}'|]} dk_0 \quad (1.210)$$

$$g^R(x, x') = \frac{1}{2\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik_0[(x_0 - x'_0) - |\vec{r} - \vec{r}'|]} dk_0. \quad (1.211)$$

Recordando ahora la definición de la función delta escribimos finalmente

$$g^A(x, x') = \frac{\delta[|\vec{r} - \vec{r}'| + (x_0 - x'_0)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.212)$$

$$g^R(x, x') = \frac{\delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - (x_0 - x'_0)]}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.213)$$

Conocidas las funciones de Green del D'Alambertiano, las correspondientes soluciones de la ecuación de onda inhomogénea son inmediatas vía el teorema de convolución, es decir,

$$A_\mu^A = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^A \quad (1.214)$$

$$A_\mu^R = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^R. \quad (1.215)$$

Nos interesa en particular la solución retardada, que define consecuentemente el *potencial retardado*

$$A_\mu^R(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} \int \frac{d^3 r'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \int J_\mu(\vec{r}', t') \delta[|\vec{r} - \vec{r}'| - c(t - t')] d(ct'), \quad (1.216)$$

que recordando la propiedad

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

se escribe finalmente

$$A_\mu^R(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} \int d^3 r' \frac{J_\mu(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.217)$$

expresión conocida en la literatura con el nombre de teorema de los potenciales retardados.

Resulta instructivo reescribir el resultado anterior en términos del potencial vector y el potencial escalar, respectivamente, es decir,

$$\vec{A}^R(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \int d^3 r' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.218)$$

$$\Phi^R(\vec{r}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.219)$$

donde queda claro entonces que los potenciales en un dado punto campo  $\vec{r}$  y en un dado instante de tiempo  $t$  dependen de la correspondiente distribución de las fuentes en el punto fuente  $\vec{r}'$  y en el instante *anterior*  $t' = t - |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ . De aquí el nombre de potenciales retardados y también la presencia explícita de la causalidad. En efecto, la información recibida en un punto dado y en un instante dado, corresponde a la situación de las fuentes en un instante previo. El retraso está medido por el tiempo que tarda la onda electromagnética, que viaja a la velocidad  $c$ , en recorrer la distancia que separa la fuente del punto campo. Estos hechos están esquematizados en la figura (1.17)

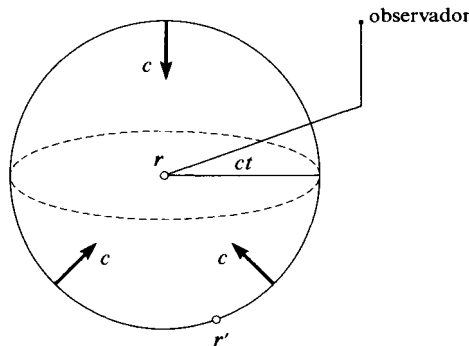


FIGURA 1.17: *Esfera colectora de información causal.*

### **Ley de Biot-Savart**

Para ver el teorema de los potenciales retardados en acción, estudiaremos la generalización de la ley de Biot-Savart. Esta generalización da cuenta del campo magnético de una corriente lineal en el caso no estacionario, es decir, cuando esa corriente depende del tiempo de manera arbitraria.

Comenzamos entonces recordando el caso estacionario. A partir de la expresión general

$$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi\kappa'\mu_0\mu^r\vec{j}$$

se tiene la solución para el campo  $\vec{B}$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa'\mu_0\mu^r \vec{\nabla}_r \wedge \int \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad (1.220)$$

que en el caso particular de una corriente lineal estacionaria [ver fig. (1.18)] da lugar a

$$\vec{B}(\vec{r}) = \kappa'\mu_0\mu^r I \vec{\nabla}_r \wedge \oint \frac{d\vec{\ell}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

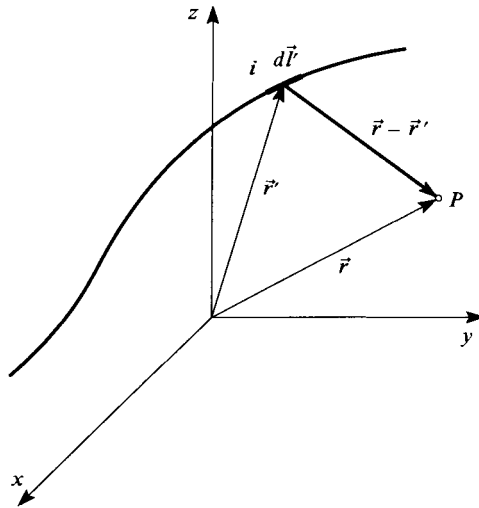


FIGURA 1.18: Geometría para la ley de Biot-Savart.

Recordando que

$$\nabla \wedge (f \vec{A}) = f \nabla \wedge \vec{A} - \vec{A} \wedge \nabla f$$

resulta de inmediato la bien conocida ley de Biot-Savart

$$d\vec{B} = \kappa' \mu_0 \mu' I \frac{d\vec{\ell}' \wedge (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.221)$$

Analicemos ahora el caso no estacionario, es decir, cuando

$$I = I(t).$$

En este caso debemos resolver el problema utilizando el potencial vector retardado, de manera que se tiene

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \mu' \oint \nabla \wedge \left[ \frac{I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{\ell}' \right]$$

o en forma más explícita

$$d\vec{B}(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \mu' \left\{ -\frac{I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial r} \left[ I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \right] \right\} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \wedge d\vec{\ell}',$$

pero teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial}{\partial x} [f(t - \frac{x}{c})] = -\frac{1}{c} f' \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [f(t - \frac{x}{c})] = f' \left( t - \frac{x}{c} \right)$$

surge

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial x} f$$

de modo que el campo magnético resulta

$$d\vec{B}(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \mu^r \left\{ \frac{I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \left[ I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \right] \right\} d\vec{\ell}' \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (1.222)$$

expresión que podemos denominar ley de Biot-Savart generalizada y que incluye dos términos: el campo de inducción y el campo de radiación. Es decir,

$$d\vec{B} = d\vec{B}_i + d\vec{B}_r, \quad (1.223)$$

con

$$d\vec{B}_i(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \mu^r \frac{I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\vec{\ell}' \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.224)$$

y

$$d\vec{B}_r(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \mu^r \frac{1}{c|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t} \left[ I(t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \right] d\vec{\ell}' \wedge \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (1.225)$$

respectivamente.

En ambas expresiones aparece, como deberíamos esperar, el retardo impuesto por la causalidad. Además, la contribución que hemos llamado de radiación es claramente la dominante a grandes distancias, ya que tiene la dependencia espacial característica de la forma  $1/r$ . A partir de este análisis de un ejemplo particular podemos concluir en general que, cuando se está en presencia de corrientes (de fuentes) variables en el tiempo, es necesario estudiar la *radiación* de campos electromagnéticos que ellas provocan.

### 1.6.3. Campos de radiación

En la presente sección vamos a analizar las características del campo electromagnético radiado por fuentes localizadas. Como remarcamos en secciones previas, podemos restringirnos, sin pérdida de generalidad, a variaciones temporales armónicas. Consideramos entonces al sistema de cargas y corrientes localizadas

$$\begin{cases} \rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r}) e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (1.226)$$

como fuentes de los campos. Al final del cálculo habrá que tomar parte real o imaginaria para recuperar los campos reales.

El potencial vector, en el gauge de Lorentz, está dado por

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \kappa' \mu_0 \int dt' \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}', t')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right), \quad (1.227)$$

de donde la parte espacial resulta

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa' \mu_0 \int d\vec{r}' \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} e^{ik|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (1.228)$$

Conocido  $\vec{A}$ , es posible determinar los campos si se tiene en cuenta que  $\vec{j} = 0$  fuera de la localización de las fuentes

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

$$\vec{E} = i\kappa'' \frac{c}{k} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}.$$

En lo que sigue, nos restringiremos al estudio de las propiedades generales de los campos radiados, cuando las fuentes están localizadas en regiones muy pequeñas comparadas con la longitud de onda. Si llamamos

$d$ : *dimensión de las fuentes*

$\lambda$ : *longitud de la onda radiada*

$r$ : *distancia de las fuentes al punto de observación*

y consideraremos situaciones en las que

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg d,$$

se pueden distinguir entonces tres regiones:

i) *zona cercana o estática:*  $d \ll r \ll \lambda$

ii) *zona intermedia o de inducción:*  $d \ll r \sim \lambda$

iii) *zona lejana o de radiación:*  $d \ll \lambda \ll r$ .

En las regiones cercana y lejana el comportamiento de los campos es el siguiente:

i) *zona cercana*

- características de campos estáticos
- poseen componentes radiales (modos longitudinales)
- presentan variación con la distancia dependiente de la estructura de la fuente



iii) *zona lejana*

- los campos son transversales al radio vector que une las fuentes con la posición del punto de observación (modos transversales)
- el comportamiento del tipo  $1/r$ .

Vamos a analizar globalmente la situación  $r \gg d$ . En estas condiciones podemos aproximar

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - \vec{r} \cdot \vec{r}'$$

y entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}' \frac{e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'}}{\left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right)} \vec{J}(\vec{r}'), \quad (1.229)$$

donde  $V'$  es el volumen ocupado por las fuentes. Explotemos ahora la condición  $\lambda \gg d$ . Luego

$$e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'} \approx 1 - ik\vec{r} \cdot \vec{r}' - \frac{k^2(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2}{2} + \dots$$

será rápidamente convergente, pues  $kr' = \frac{2\pi r'}{\lambda} \ll 1$  y por supuesto también

$$\frac{e^{-ik\vec{r} \cdot \vec{r}'}}{\left(1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}\right)} \approx 1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right) (\vec{r} \cdot \vec{r}') + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2\right) (\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 + \dots$$

Entonces

$$\vec{A}(\vec{r}) = \kappa' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') \sum_{m=0}^{\infty} C_m (\vec{r} \cdot \vec{r}')^m, \quad (1.230)$$

donde

$$C_m = \frac{(-ik)^m}{m!} \left(1 + \frac{a_1}{ikr} + \dots + \frac{a_m}{(ikr)^m}\right),$$

siendo los  $a_i$  números enteros. Finalmente podemos escribir

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{A}_m(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \kappa' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}')^m, \quad (1.231)$$

de donde podemos obtener la dependencia en  $r$  de los campos.

Veamos el comportamiento de las componentes  $\vec{A}_m(\vec{r})$  en las zonas estática y de radiación:

i) *zona cercana:  $\lambda \gg r$* 

En este caso el término dominante de  $C_m$  es

$$\left(\frac{a_m}{(ikr)^m}\right)$$

y entonces la componente  $m$ -ésima del campo en esta zona es

$$\vec{A}_m^i(\vec{r}) \approx \kappa' \mu_0 \frac{a_m}{m!} \frac{1}{r^{m+1}} \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}')^m \quad (1.232)$$

independiente del número de onda  $k$ . En consecuencia, cuando reincorporamos el término  $e^{-i\omega t}$  y al no existir fase dependiente de  $r$ , resultará una dependencia espacio-temporal que no es de tipo ondulatorio. Por esto se dice que en esta zona los campos son cuasi-estáticos o de inducción.

ii) *zona lejana*:  $\lambda \ll r$

El término dominante es el primero y da lugar a

$$\vec{A}_m^{(ii)}(\vec{r}) \approx \kappa' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(-ik)^m}{m!} \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}')^m, \quad (1.233)$$

que al incluir la dependencia temporal mostrará el comportamiento de onda esférica saliente típica de los campos de radiación, cuya amplitud decrece como  $1/r$ . Veremos inmediatamente que los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  en la zona de radiación son transversales al radio vector  $\vec{r}$ .

A continuación vamos a componer la serie completa para obtener la forma general de los campos. Recordemos que

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{A}_m(\vec{r})$$

corresponde en realidad a un desarrollo multipolar, en el cual  $\vec{A}_0(\vec{r})$  es la contribución *dipolar eléctrica*. En efecto

$$\vec{p} = \int_{V'} d\vec{r}' \vec{r}' \rho(\vec{r}'),$$

pero de acuerdo a la ecuación de continuidad  $i\omega\rho = \vec{\nabla} \cdot \vec{J}$  y teniendo en cuenta que

$$\int_{V'} d\vec{r}' \vec{r}' (\vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}')) = - \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}')$$

resulta

$$i\omega\vec{p} = \int_{V'} d\vec{r}' \vec{J}(\vec{r}').$$

Finalmente

$$\vec{A}_0(\vec{r}) = \vec{A}_{DE}(\vec{r}) = -i\kappa' \mu_0 c k \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}.$$

Un poco más de álgebra permite obtener la contribución dipolar eléctrica a los campos magnético y eléctrico.

$$\vec{B} = \kappa' \mu_0 c k^2 (\vec{r} \wedge \vec{p}) \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{E} = \kappa' \kappa'' \mu_0 c^2 \left[ k^2 (\vec{r} \wedge \vec{p}) \wedge \vec{r} \frac{e^{ikr}}{r} + (3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right].$$

Vemos, de estas expresiones, que  $\vec{B}$  es transversal al radio vector  $\vec{r}$  para cualquier distancia a la fuente, mientras que  $\vec{E}$  tiene componentes paralela y perpendicular al radio vector. Sin embargo, en la

iii) *zona lejana o de radiación*,  $d \ll \lambda \ll r$

$$\vec{B} = \kappa' \mu_0 c k^2 (\vec{r} \wedge \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\vec{E} = \kappa'' c \vec{B} \wedge \vec{r} \quad (1.234)$$

son ambos transversales al radio vector. Por último, en la

i) *zona cercana*,  $kr \ll 1$

$$\vec{B} = i \kappa' \mu_0 c k (\vec{r} \wedge \vec{p}) \frac{1}{r^2}$$

$$\vec{E} = \kappa' \kappa'' \mu_0 c^2 (3\vec{r}(\vec{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}) \frac{1}{r^3}.$$

En este caso, notamos que (aparte de la oscilación armónica no indicada) el campo eléctrico es el de un dipolo de momento dipolar  $\vec{p}$ . El campo magnético posee un factor  $(kr) \ll 1$  con respecto al campo eléctrico, de donde resulta que la zona cercana es dominada por el campo eléctrico. Por último, notemos que  $\vec{B} \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow 0$  correspondiendo al caso estático.

### ***Cálculo de la potencia radiada***

El promedio temporal de la potencia radiada a través de un ángulo sólido  $d\Omega$ , definido por la dirección  $\vec{r}$ , se puede calcular a partir del conocimiento del vector de Poynting complejo. En efecto,

$$d\bar{P} = \text{Re} \left\{ \vec{S}_c \right\} \cdot \vec{r} r^2 d\Omega,$$

donde

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi \kappa' \mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}^*.$$

Consideramos el caso especial en que la fuente es un dipolo y elegimos el sistema de coordenadas como se indica en la figura (1.19). En este caso, usando las expresiones obtenidas en (1.234) y la identidad

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) \quad (1.235)$$

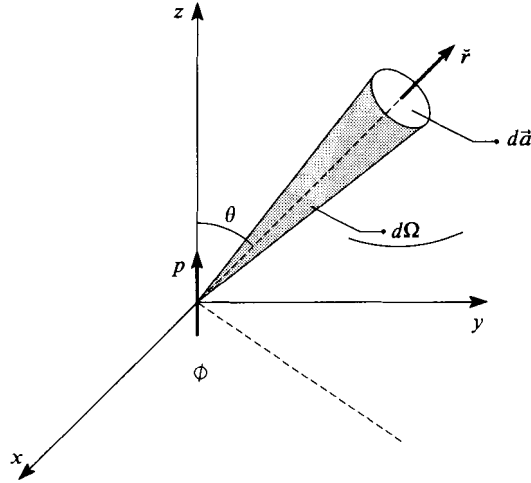


FIGURA 1.19: Geometría en la radiación de un dipolo.

resulta

$$d\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\kappa'\mu_0} \left[ \vec{B} \cdot \vec{B}^* - (\vec{B} \cdot \vec{n})(\vec{B}^* \cdot \vec{n}) \right] r^2 d\Omega,$$

de manera que la distribución angular de la potencia media radiada es

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi} \kappa' c^2 k^4 p^2 \sin^2 \theta, \quad (1.236)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección del dipolo y la definida por  $\vec{n}$ . En esta expresión para la potencia observamos las siguientes características:

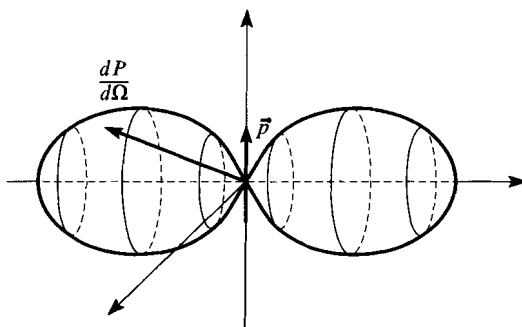
- Variación con  $k^4$ , es decir, con la cuarta potencia de la frecuencia.
- Dependencia angular con el  $\sin^2 \theta$ , implicando que la radiación es máxima en la dirección perpendicular al dipolo y se anula precisamente en la dirección de  $\vec{p}$ .
- El promedio temporal de la potencia total radiada es

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \kappa' c^2 k^4 p^2. \quad (1.237)$$

Usualmente, para dar una idea directa de la distribución angular de la potencia, se dibuja

$$D(\theta, \phi) = \frac{d\bar{P}/d\Omega}{\bar{P}} = \frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta \quad (1.238)$$

en coordenadas polares, gráfica que se conoce con el nombre de *lóbulo de radiación*. En la figura (1.20) damos, como ejemplo, el lóbulo de radiación para el caso del dipolo eléctrico.

FIGURA 1.20: *Lóbulo de radiación de un dipolo eléctrico.*

En esta figura el vector  $(\overline{OA})$  mide la fracción de la potencia total radiada en la dirección  $(\theta, \varphi)$ . Notemos que el momento dipolar eléctrico es uniforme en  $\varphi$ , de modo que solo hay variación con  $\theta$ .

Para concluir esta sección, vamos a comentar brevemente el origen de la radiación dipolar magnética y de la cuadrupolar eléctrica. La contribución siguiente al término dipolar eléctrico que estudiamos previamente es

$$\vec{A}_1(\vec{r}) = \kappa' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \left( \frac{1}{r} - ik \right) \int_V d\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') (\vec{r} \cdot \vec{r}').$$

La relación (1.235) permite separar entonces  $(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j}$  en una parte simétrica en  $\vec{j}$  y  $\vec{r}'$  y una antisimétrica de la siguiente manera

$$(\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} = \frac{1}{2} \left( (\vec{r} \cdot \vec{r}') \vec{j} + (\vec{r} \cdot \vec{j}) \vec{r}' \right) + \frac{1}{2} (\vec{r}' \wedge \vec{j}) \wedge \vec{r}.$$

El primer término, simétrico, está asociado a la radiación cuadrupolar eléctrica, y el segundo, antisimétrico, a la dipolar magnética.

Este tipo de radiaciones juegan un papel relevante en las transiciones nucleares, donde las dimensiones de la fuente son del orden de la *fermi*. Como las longitudes de onda características de los rayos  $\gamma$  nucleares son de aproximadamente  $10^{-12}$  cm, el parámetro de control de la serie multipolar,  $ka$ , es del orden de  $1/10$  y por lo tanto, términos superiores al dipolar eléctrico comienzan a ser importantes.

### Antenas

Los dipolos eléctrico y magnético son ejemplos de radiadores de ondas electromagnéticas, cuyas dimensiones son pequeñas comparadas con la longitud de onda de la radiación. Desde un punto de vista práctico, son también de mucho interés los sistemas radiantes constituidos por corrientes variables en hilos conductores largos, de sección despreciable frente a las longitudes de onda involucradas. Estos sistemas son ejemplos de una *antena*, nombre con el que se designa a todo equipamiento proyectado para transmitir o recibir ondas, de radio en particular.

Si las corrientes que fluyen en la antena son conocidas, el problema a resolver es relativamente sencillo. Sin embargo, si estamos interesados en la determinación de las corrientes provocadas por campos dados, la situación se torna muy compleja.

La idea central para obtener la distribución de potencia radiada por una antena de longitud  $L$ , cuyo conductor constitutivo transporta una dada corriente variable, digamos  $I(z)e^{i\omega t}$ , es considerar cada elemento  $dz$  como un dipolo eléctrico elemental de momento

$$\vec{p} = I(z)e^{i\omega t} dz \frac{\vec{k}}{\omega}.$$

Con esta expresión es inmediato determinar, por integración directa, el potencial vector  $\vec{A}(\vec{r})$  en la zona de radiación, el que tendrá ciertamente la dirección  $z$ . Este resultado es un ejemplo típico del fenómeno de interferencia, ya que se superponen amplitudes componentes con sus respectivas fases, que recorrieron diferentes distancias hasta el punto de observación.

Un cálculo elemental provee la expresión para la distribución angular de potencia, que resulta

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{I^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos\left(\frac{kL}{2} \cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\text{sen}\theta} \right|^2, \quad (1.239)$$

donde el ángulo  $\theta$  determina la dirección de observación  $\vec{r}$  con respecto al eje de la antena. Como el vector eléctrico debe ser normal a  $\vec{r}$ , resulta que la radiación está polarizada en el plano  $(z, r)$ .

Observemos finalmente que la distribución angular depende del producto  $kL$ , de modo que en el régimen de ondas largas (grandes longitudes de onda) definido por  $d \ll \lambda$ , ella se comporta como en el caso de la radiación de un dipolo.

Los casos particulares  $kL = \pi$  y  $kL = 2\pi$ , definen las llamadas antena de media onda y antena de onda completa, ya que su longitud corresponde a media o a una oscilación completa de la corriente a lo largo del hilo conductor.

Comentamos finalmente que la aproximación dipolar para el análisis de elementos radiantes tuvo gran importancia en el diseño de las primeras antenas de radio. En la actualidad, el diseño asistido y el control de excitación por medio de ordenadores permite la realización de antenas muy complejas que provean el lóbulo de radiación que convenga en cada caso particular.

#### 1.6.4. Problemas

- Identificar los términos que definen las zonas de radiación, de inducción y estática en la expresión exacta del campo eléctrico escrita en la aproximación dipolar eléctrica.
- Analizar las contribuciones dipolar magnética y cuadrupolar eléctrica del desarrollo multipolar de radiación.

1. A partir del potencial vectorial obtener  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .
  2. Identificar en cada uno de ellos la contribución correspondiente a la zona de radiación y calcular la distribución angular de la potencia radiada en ambos casos.
  3. Por integración obtener la potencia total en los dos casos.
- Calcular el promedio temporal de la potencia total radiada por un dipolo de baja frecuencia. [PU,11,13]
  - Hallar el potencial vectorial  $\vec{A}$  entre los cilindros de una larga línea conductora coaxial.
    1. para corrientes continuas,
    2. para oscilaciones sinusoidales de baja frecuencia. [PU,11,14]
  - Una cierta emisora de radio tiene una potencia de 50 kW y frecuencia de 10 MHz. Si su antena puede considerarse como un dipolo de longitud  $L = \lambda/2$ , ¿qué intensidad eficaz ha de producir? [PU,11,17]
  - Un ejemplo de radiador isotrópico de ondas escalares es una fuente puntual (idealizada) de ondas acústicas, o una esfera pulsante. Probar la plausibilidad de que una antena electromagnética isotrópica, esto es, un sistema de corrientes que irradia energía uniformemente en todas direcciones, es imposible (ver H. F. Mathis, Proc. IRE 39, 970 (1951).) [EY,13,8]
  - Un globo esférico lleva una carga  $Q$  distribuida uniformemente sobre su superficie. El globo pulsa con frecuencia  $\omega$  y amplitud  $A$ , de manera que su radio  $r$  está dado por

$$r = r_0 + A \text{sen}(\omega t).$$

Calcular la tasa de radiación de energía electromagnética. [EY,13,9]

- Una corriente

$$I = I_0 \text{sen}(\omega t) \text{sen}(2\pi z/d)$$

fluye en el eje  $z$  entre  $z = 0$  y  $z = d$ . Hallar una buena aproximación para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en los siguientes tres casos:

1.  $\lambda > 10^4 d$  ;  $r > 10^4 \lambda$ ;
2.  $\lambda = d$  ;  $r > 10^4 \lambda$ , y
3.  $d < r < 2d$  ;  $\lambda > 10^4 d$ ,

donde  $r$  es la distancia al punto campo, y  $\lambda = 2\pi c/\omega$ . [EY,13,10]

- Demostrar que los términos importantes del desarrollo multipolar sistemático coinciden con el desarrollo en serie de Taylor. [EY,13,14]
- Una espira circular conductora que transporta una corriente  $I = I_0 \cos \omega t$  constituye un dipolo magnético oscilante; determinar los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  y la potencia total radiada.

- Determinar la eficiencia relativa como fuentes de radiación electromagnética de un dipolo eléctrico de 2 metros de longitud comparado con un dipolo magnético del mismo diámetro a la frecuencia de 1 MHz.
- Mostrar que una distribución de carga con simetría esférica que oscila radialmente no radiará.
- Se requiere que un transmisor dipolar de media onda ubicado en el centro de una ciudad provea señales a automóviles que circulan dentro de un radio de 10 Km. Si la amplitud de campo eléctrico mínima requerida es de  $0,02 \text{ V/m}$ , ¿cuál debe ser la potencia media que debe entregar el transmisor? ¿Por qué la frecuencia elegida podría estar alrededor de los 100 MHz? [GP,13,1]
- Una antena está compuesta por cuatro dipolos verticales de media onda, separados entre sí por una longitud de onda en la dirección este-oeste. Calcular y dibujar el diagrama polar horizontal del dispositivo cuando los dipolos están alimentados con corrientes iguales y en fase. [GP,13,3]
- Si una estación comercial de radio que transmite con una longitud de onda de 500 m no desea tender un cable aéreo de 250 m de largo para formar una antena dipolo de media onda, ¿qué podría hacer para construir un sistema de radiación eficiente? [GP,13,4]
- Radiación cuadrupolar eléctrica se produce cuando las corrientes en dos dipolos muy pequeños, ubicados muy cerca uno del otro, oscilan con una diferencia de fase de  $180^\circ$ . Demostrar que el campo eléctrico de radiación producido es proporcional al cubo de la frecuencia angular. [GP,13,5]
- Una antena lineal delgada de longitud  $d$  es excitada de tal modo que la corriente sinusoidal hace una longitud de onda completa de oscilación.
  1. Calcular exactamente la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y dibujar la distribución angular de la radiación.
  2. Determinar la potencia total radiada y encontrar un valor numérico para la resistencia de radiación. [JA,9,4]
- Tratar la antena lineal del problema anterior por el método de desarrollo multipolar, válido para longitudes de onda largas.
  1. Calcular los momentos multipolares (dipolo eléctrico, dipolo magnético y cuadrupolo eléctrico).
  2. Comparar la distribución angular para el multipolo de menor orden no nulo, con la distribución exacta obtenida en el problema anterior.
  3. Determinar la potencia total radiada para el multipolo de menor orden y la correspondiente resistencia de radiación. [JA,9,5]
- La *directividad* de una antena se define como la relación entre el valor máximo de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido y la potencia promedio radiada por unidad de ángulo sólido. Mostrar que la directividad de un dipolo simple es 1,5 mientras que la de una antena de media onda es 1,64. [MH,8,13]



- Dos cargas de valores  $+q$  y  $-q$  están separadas una distancia  $d$  y rotan con velocidad angular constante  $\omega$  alrededor de un eje perpendicular a la línea que las une y que pasa por su punto medio. Discutir la radiación emitida en el plano de rotación y a lo largo del eje de rotación. [MH,8,22]

## 1.7. APÉNDICE PREPARATORIO

### 1.7.1. Campos cuasiestacionarios

Al estudiar las corrientes eléctricas y los campos magnéticos que ellas producen, interesa determinar la energía configuracional del sistema. Cuando las fuentes se mueven, surgen nuevos fenómenos que deben ser tenidos en cuenta. En efecto, al mover un circuito frente a otro, aparecen fenómenos de *inducción electromagnética*: la presencia del *tiempo* con carácter de protagonista produce el acoplamiento de la electricidad con el magnetismo. En otras palabras, las variaciones temporales, al jugar un papel central, requieren la unificación de estos fenómenos, dando lugar al *electromagnetismo*.

En el análisis de la electrostática y de la corriente continua, la única relación entre magnetismo y electricidad surge de la observación de que toda corriente eléctrica da lugar a un campo magnético. Las ecuaciones que verifican los campos en estas condiciones son:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (1.240)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa\rho \quad (1.241)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa'\vec{j} \quad (1.242)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.243)$$

y están claramente desacopladas, aunque se podría hablar de una conexión indirecta a través de la ecuación de continuidad.

Por otra parte, la dependencia temporal de los fenómenos evidencia con claridad manifestaciones del acoplamiento:

- Campos magnéticos variables en el tiempo dan lugar a campos eléctricos no electrostáticos: ley de inducción de Faraday.
- Campos eléctricos no estacionarios dan lugar a campos magnéticos: corriente de desplazamiento de Maxwell.

Para analizar con un poco más de detalle estos hechos experimentales nos restringiremos por el momento al caso de campos cuasiestacionarios. En esta categoría caben los campos que varían en el tiempo tan lentamente como para que se pueda despreciar el fenómeno de radiación. Estos campos, aun variables temporalmente, tienen una dependencia espacial del tipo  $1/r^2$ .

En esta discusión de situaciones no estáticas, es importante la definición del sistema de referencia donde se definen los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . Las magnitudes físicas que aparecen en las ecuaciones de Maxwell deben estar referidas a un dado sistema de referencia, aunque ciertamente existe una infinitud de sistemas apropiados para las definiciones

correspondientes. Estos son los llamados *sistemas inerciales*, donde las ecuaciones son válidas. La conexión entre cantidades definidas en diferentes sistemas de este tipo es uno de los objetivos de la teoría de la relatividad restringida (o especial), que tratamos en el próximo capítulo. En lo que sigue supondremos que todas las magnitudes físicas están definidas en un único de tales sistemas inerciales.

### 1.7.2. Ley de inducción de Faraday

La esencia de esta ley es la aparición de campos  $\vec{E}$  no conservativos producto de la presencia de campos  $\vec{B}$  variables en el tiempo.

*Experimento:* Consideremos un circuito eléctrico de resistencia  $R$ , por el que circula una corriente  $I$  debida a la presencia de una fuente de fuerza electromotriz  $\mathcal{E}_{ex}$ . La ley de Ohm provee la ecuación del circuito

$$I R = \mathcal{E}_{ex}. \quad (1.244)$$

Con el circuito concatena el flujo magnético

$$\Phi = \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A}, \quad (1.245)$$

donde  $\Sigma$  es una superficie limitada por el circuito. Si por alguna razón el flujo magnético varía en el tiempo, es decir,

$$\Phi = \Phi(t)$$

la ecuación del circuito se modifica a

$$I R - \mathcal{E}_{ex} = -\kappa'' \frac{d\Phi}{dt}. \quad (1.246)$$

Es decir, aparece una fuerza electromotriz adicional llamada *fuerza electromotriz inducida*

$$\mathcal{E}_i = -\kappa'' \frac{d\Phi}{dt}, \quad (1.247)$$

expresión que constituye la ley de inducción de Faraday e incluye la ley de Lenz, que garantiza la conservación de la energía a través del signo menos.

Es claro que las variaciones del flujo magnético pueden provenir de cambios temporales de un campo magnético externo o de cambios en el circuito mismo (deformaciones, movimientos, cambios en la corriente que circula...).

A fin de avanzar con el análisis formal, es conveniente introducir un campo eléctrico equivalente  $\vec{E}'$  claramente rotacional ( $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}' \neq 0$ ), mediante

$$\mathcal{E}_i = - \int_C \vec{E}' \cdot d\vec{l}$$

de manera que la ecuación del circuito con  $\Phi$  variable se escribe

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = I R - \mathcal{E}_{ex}$$

implicando que a lo largo del circuito se puede detectar un campo eléctrico no conservativo  $\vec{E}'$  que cumple la relación

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\kappa'' \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Restringimos ahora nuestro análisis al caso de circuitos en reposo. El caso general de cuerpos en movimiento necesita ser enmarcado, para su discusión correcta, dentro de la teoría de la relatividad. En consecuencia, no aparecerán los términos convectivos a que daría lugar ese movimiento y tenemos entonces

$$\oint_C \vec{E}' \cdot d\vec{l} = -\kappa'' \int_{\Sigma} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}. \quad (1.248)$$

El *gran* paso adelante dado por Maxwell fue considerar que  $C$  no es necesariamente un circuito físico material, sino que puede ser pensado meramente como un circuito de integración. De esa manera surge, usando el teorema de Stokes, la versión local de la ley de inducción de Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.249)$$

que es, en realidad, una de las ecuaciones de Maxwell.

### 1.7.3. Corriente de desplazamiento de Maxwell

Recordamos que la ley de Ampère

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa' \vec{j} \quad (1.250)$$

es válida sólo para corrientes estacionarias ( $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$ ). La inducción electromagnética puede dar lugar a corrientes  $\vec{j}$  no estacionarias de manera que resulta imprescindible completar la ley de Ampère. Esta tarea la concretó Maxwell al introducir la *corriente de desplazamiento*.

A la ley general para las corrientes: ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.251)$$

Maxwell se propuso convertirla en una ecuación de divergencia nula, escribiendo

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \vec{j} + 4\pi\kappa \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0,$$

en la que se puede identificar la corriente de desplazamiento, cuya densidad está dada por

$$\vec{j}_D = 4\pi\kappa \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.252)$$

De esta manera se concreta la extensión

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \vec{j}_D,$$

que da lugar a lo que pasa a llamarse Ley de Ampère-Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa' \left( \vec{j} + \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right). \quad (1.253)$$

Esta ley implica que no sólo las corrientes de conducción generan campos magnéticos rotacionales, sino que ellos surgen también de la presencia de campos eléctricos (de desplazamiento si se quiere) variables en el tiempo.

#### 1.7.4. Fuerza de Lorentz

La importancia intrínseca del conocimiento de los campos eléctricos y magnéticos reside finalmente en la posibilidad de determinar las acciones (las fuerzas) que ellos imprimen sobre cargas (y sobre corrientes: cargas en movimiento). Por esta razón, es imprescindible dotar a la teoría electromagnética de una prescripción para esas acciones. Efectivamente, los campos actúan sobre las cargas a través de la llamada Fuerza de Lorentz, definida por

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \kappa' \vec{v} \wedge \vec{B}), \quad (1.254)$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad con la que se mueve la carga  $q$ . De la expresión de la fuerza, es claro que el primer término es en algún sentido la extensión a campos variables en el tiempo de la definición del campo  $\vec{E}$ , como fuerza por unidad de carga. La segunda contribución a la fuerza surge a partir de la ley de Biot-Savart

$$d\vec{F} = \kappa' I d\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$

que brinda la fuerza sobre un elemento de corriente  $I d\vec{\ell}$  ejercida por un campo magnético. En efecto, la hipótesis de Lorentz fue tratar a la corriente como el movimiento de partículas cargadas individuales y escribir formalmente

$$I d\vec{\ell} = dq \frac{d\vec{\ell}}{dt} = dq \vec{v},$$

de donde resulta claro el término magnético de la expresión de la fuerza (1.254).

### 1.8. APÉNDICE SOBRE EL TENSOR DE MAXWELL

La noción de campo de fuerzas para referirse a las interacciones electrostáticas es una imagen simplificatoria, que permite interpretar a ese campo como el responsable de la acción a distancia entre cargas. Una descripción en términos de acción a distancia es igualmente válida cuando se trata de fenómenos puramente estáticos. Sin embargo, Maxwell intentó dotar de una mayor realidad física al concepto de campo de

fuerzas, aun en la electrostática. Para ello formuló la teoría de manera que el campo fuese el responsable directo de las propiedades mecánicas de los sistemas de cargas interactuantes.

Siguiendo a Maxwell, mostraremos que es posible calcular la fuerza eléctrica sobre un volumen que contenga una dada distribución de cargas sobre la base de una teoría de campos pura. La fuerza quedará determinada por el campo electrostático sobre la superficie que limita a ese volumen.

Así como una carga puntual  $q$  en presencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$  experimenta una fuerza dada por

$$\vec{F} = q \vec{E}, \quad (1.255)$$

la fuerza actuante sobre una distribución de carga de densidad  $\rho_2$  contenida en un volumen  $V_2$  debida a la presencia de un campo  $\vec{E}_1$  es

$$\vec{F}_2 = \int_{V_2} \rho_2 \vec{E}_1 dV. \quad (1.256)$$

Notemos que sobre cada elemento de carga  $\rho_2 dv$  actúan además las fuerzas electrostáticas debidas al campo  $\vec{E}_2$ , creado por las restantes cargas de la propia distribución  $\rho_2$ . Sin embargo, estas fuerzas por ser «internas» se cancelan, es decir,

$$\int_{V_2} \rho_2 \vec{E}_2 dV = 0. \quad (1.257)$$

Por lo tanto, podemos escribir en lugar de (1.256) la forma general

$$\vec{F} = \int_V \rho \vec{E} dV, \quad (1.258)$$

donde está claro que

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \quad (1.259)$$

es el campo electrostático total. En otras palabras, podemos suprimir los índices 1 y 2 y eliminar la distinción entre punto fuente y punto campo. Dejamos de lado el problema de la singularidad del propio campo en el punto donde está ubicada la carga. A esta dificultad se la puede tratar de forma análoga al caso de la autoenergía de una carga.

El integrando de la expresión (1.258) puede ser interpretado como la fuerza por unidad de volumen o densidad volumétrica de fuerza ejercida por el campo. El próximo paso es transformar esa expresión en una integral de superficie de una magnitud que dependa sólo del campo electrostático y esté definida sobre la superficie que limita al volumen en cuestión. Usando entonces la ecuación de Maxwell (1.3), escrita para el campo  $\vec{E}$ , resulta para la componente  $i$  de la fuerza

$$F_i = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} E_i dV, \quad (1.260)$$

que puede a su vez escribirse como

$$F_i = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \int_V \vec{\nabla} \cdot (E_i \vec{E}) dV - \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \int_V \vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_i dV. \quad (1.261)$$

En el primer término del miembro derecho usamos el Teorema de Gauss-Ostrogradsky y resulta

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot (E_i \vec{E}) dV = \int_{\Sigma} E_i \vec{E} \cdot d\vec{a}.$$

Para elaborar el segundo término recordamos que el campo electrostático es conservativo ( $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$ ), de manera que

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}$$

con lo cual es inmediato que el integrando de ese segundo término puede expresarse como

$$\sum_{j=1}^3 E_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} \equiv E_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} E^2,$$

de manera que usando nuevamente el Teorema de Gauss-Ostrogradsky se tiene

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{\nabla} E_i dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial x_i} E^2 dV = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} E^2 da_i.$$

Estamos entonces en condiciones de escribir, en lugar de la expresión (1.260),

$$F_i = \sum_{j=1}^3 \int_{\Sigma} T_{ij} da_j, \quad (1.262)$$

donde se introdujeron las componentes  $T_{ij}$  del *tensor de esfuerzos de Maxwell*

$$T_{ij} = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \left[ E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij} \right] \quad (1.263)$$

$$= \frac{1}{4\pi\kappa} \left[ E_i D_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \vec{E} \cdot \vec{D} \right], \quad (1.264)$$

que es un tensor de segundo rango, simétrico ( $T_{ij} = T_{ji}$ ). Notemos que la segunda expresión para  $T_{ij}$  surge de considerar válida la relación constitutiva lineal (1.9). Por lo tanto, tenemos que la componente  $i$ -ésima de la fuerza transmitida a través de un elemento de área  $d\vec{a}$  está dada por:

$$dF_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} da_j = \sum_{j=1}^3 T_{ij} n_j da. \quad (1.265)$$

Debido a que el tensor de Maxwell es simétrico, puede ser diagonalizado por medio de una transformación de similitud para determinar así sus ejes principales. En tales condiciones, el número de componentes independientes se reduce a tres. En efecto, resolviendo el determinante secular

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0$$

se obtienen los valores principales del tensor:

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \frac{E^2}{2} \tag{1.266}$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 = -\frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \frac{E^2}{2}. \tag{1.267}$$

La presencia de dos autovalores degenerados muestra que existe un eje de simetría para el tensor. El eje principal, correspondiente al primer autovalor, resulta paralelo al campo electrostático  $\vec{E}$ . Las componentes de la fuerza transmitida (ecuación (1.265)) según los ejes principales son:

$$dF^{(1)} = \lambda_1(E) da^{(1)} \tag{1.268}$$

$$dF^{(2)} = dF^{(3)} = \lambda_2(E) da^{(2)}. \tag{1.269}$$

Este resultado implica que el campo eléctrico transmite una tensión  $\lambda_1$  paralela a su dirección y simultáneamente contracciones  $\lambda_2 = \lambda_3$  en el plano transversal al mismo.

**Ejemplo.** Consideremos un campo electrostático uniforme en la dirección  $x$  como muestra la figura (1.21)

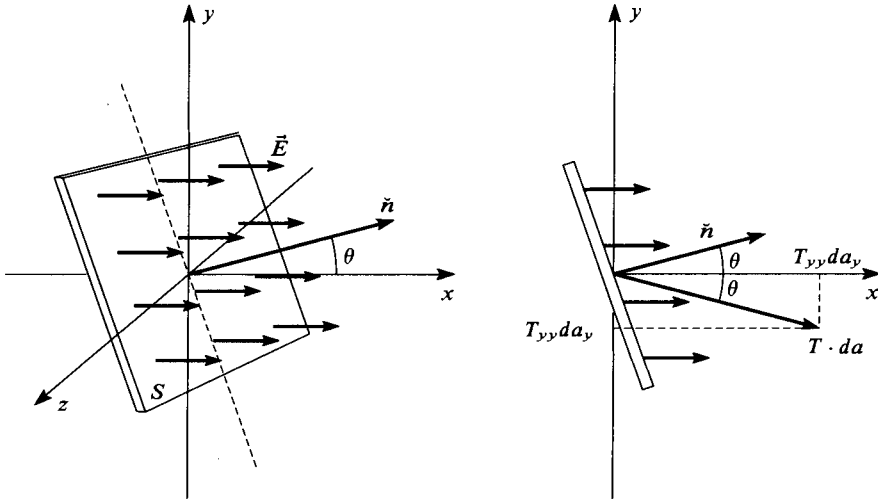


FIGURA 1.21: *Tensor de Maxwell para un campo uniforme.*

La fuerza a través de la superficie  $S$  tiene componentes no nulas en las direcciones  $x$  e  $y$ :

$$\begin{aligned}dF_x &\propto E^2 \cos\theta \, da \\dF_y &\propto -E^2 \sin\theta \, da,\end{aligned}$$

de modo que la fuerza resultante forma un ángulo  $\theta$  con la dirección del campo. Este resultado es general: el campo eléctrico  $\vec{E}$  es bisector del ángulo entre la normal a la superficie y la resultante del esfuerzo. En resumen, un campo eléctrico paralelo a la superficie produce una presión contra la misma, mientras que si su sentido coincide con el de la normal, produce una presión «negativa».

Una discusión similar, en términos del correspondiente tensor de Maxwell, puede llevarse a cabo en relación con las fuerzas ligadas al campo magnético.

### 1.9. APÉNDICE: DEFINICIÓN DE UN CAMPO VECTORIAL

Seguimos de cerca a Panofsky-Phillips ([PP], página 2)

Un *campo vectorial* es un objeto físico definido en cada punto del espacio a través de tres cantidades, las componentes del correspondiente vector. Como tal, tiene las propiedades de transformación correctas frente a un cambio de coordenadas.

Desarrollamos a continuación la prueba del teorema que establece que: todo campo vectorial inmerso en un espacio tridimensional cuyas fuentes se anulan en el infinito queda definido en forma unívoca dando su rotor y su divergencia en todos los puntos del espacio.

Consideremos el campo vectorial tridimensional  $\vec{V}(x, y, z)$  que verifica

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = e \quad (1.270)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{a}. \quad (1.271)$$

Recordando el Apéndice poético resulta claro que por consistencia se debe cumplir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = 0. \quad (1.272)$$

Mostraremos que la solución general de las ecuaciones (1.270) y (1.271) puede escribirse como

$$\vec{V} = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla} \wedge \vec{A}, \quad (1.273)$$

donde

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (1.274)$$

y

$$\vec{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\vec{a}(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (1.275)$$

En estas expresiones, las variables no primadas se refieren al punto campo, en tanto que las primadas especifican al punto fuente. De inmediato se obtiene entonces

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \nabla^2 \phi + \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = -\nabla^2 \phi$$



o, específicamente,

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= -\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \left\{ \int \frac{e(x', y', z')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int e(x', y', z') \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV',\end{aligned}\quad (1.276)$$

donde la última igualdad surge porque el operador laplaciano actúa sobre las coordenadas del punto campo. Recordando ahora que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}) \quad (1.277)$$

resulta finalmente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = e(x, y, z), \quad (1.278)$$

es decir, se satisface la relación (1.270).

De manera similar y recordando nuevamente el Apéndice poético, se obtiene

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \wedge \vec{v} &= -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \phi + \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int \vec{a} \nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'.\end{aligned}\quad (1.279)$$

Consideremos la primera integral en esta última ecuación. Teniendo en cuenta que

$$\vec{\nabla} f(x, y, z; x', y', z') = -\vec{\nabla}' f(x, y, z; x', y', z')$$

se puede escribir

$$\vec{I}_1 = \int (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV' = \int (\vec{a} \cdot \vec{\nabla}') \vec{\nabla}' \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV',$$

es decir, con los operadores actuando sobre las variables de integración. Integrando ahora por partes resulta

$$I_{1,j} = \int \vec{\nabla}' \cdot \left\{ \vec{a} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right\} dV' - \int (\vec{\nabla}' \cdot \vec{a}) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) dV'.$$

Aquí la segunda integral se anula debido a la condición (1.272). La primera tampoco contribuye si  $\vec{a}$  está espacialmente acotado, ya que es transformable en una integral de superficie vía el teorema de Gauss-Ostrogradsky. Por lo tanto, se concluye que  $\vec{I}_1 = 0$ .

Finalmente, volviendo a la ecuación (1.279) vemos que la segunda integral, la única que contribuye, conduce a la verificación de la relación (1.271), debido a la propiedad (1.277).

Se ha probado entonces que si se dan la densidad de fuente escalar  $e(x, y, z)$  y la densidad de circulación axial-vectorial  $\vec{a}(x, y, z)$  de un campo vectorial  $\vec{V}$  (es decir, si se dan su divergencia y su rotor) en todos los puntos del espacio, entonces la solución para ese campo  $\vec{V}(x, y, z)$  se puede obtener a partir de un *potencial escalar*  $\phi(x, y, z)$  y de un *potencial (axial-) vectorial*  $\vec{A}(x, y, z)$  como integrales de las densidades respectivas. Se demuestra fácilmente que estas soluciones son únicas si las fuentes están acotadas espacialmente, es decir, si no hay fuentes en el infinito.

## 1.10. APÉNDICE SOBRE LA TRANSFORMADA DE FOURIER

Toda función  $f(x)$  que posee sólo un número finito de discontinuidades en el intervalo  $-L < x < +L$ , que es seccionalmente continua allí tiene derivadas laterales y se define como el promedio de sus límites  $f(x_0 + 0)$  y  $f(x_0 - 0)$  en cada punto de discontinuidad  $x_0$ . Bajo estas condiciones, la función admite un desarrollo en serie de funciones trigonométricas o alternativamente en serie de exponenciales complejas de la forma

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i \frac{n\pi x}{L}}, \quad (1.280)$$

donde los coeficientes están dados por

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(u) e^{i \frac{n\pi u}{L}} du. \quad (1.281)$$

De modo que en forma compacta se puede escribir

$$f(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-L}^{+L} f(u) e^{-i \frac{n\pi(x-u)}{L}} du. \quad (1.282)$$

La representación en serie de  $f(x)$  no puede extenderse fuera del intervalo  $(-L, +L)$ , al resto del eje  $x$ , a menos que la función sea periódica con periodo  $2L$ , ya que la suma de la serie posee esa periodicidad.

Si la función  $f(x)$  no es periódica, el intervalo de desarrollo puede ser extendido a  $-\infty < x < +\infty$  tomando el límite adecuado de  $L \rightarrow \infty$  para obtener la representación

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{iku} du. \quad (1.283)$$

A partir de esta expresión se pueden introducir las llamadas *transformadas de Fourier*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{-ikx} dk \quad (1.284)$$

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad (1.285)$$

que conectan la representación espacial o de configuración  $x$  con la representación en número de onda  $k$ . De manera enteramente similar, se pueden escribir las transformaciones que conectan las representaciones temporal y en frecuencia

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (1.286)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i\omega t} dt \quad (1.287)$$

de modo que  $A(\omega)$  representa el espectro de frecuencia de la señal.

### 1.11. APÉNDICE DELTA DE DIRAC

La «función» *delta de Dirac* está definida por las condiciones

$$\delta(x - x_0) = 0 \quad ; \quad \text{si } x \neq x_0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (1.288)$$

Este objeto no puede ser una función ordinaria, ya que es cero en todo el eje real excepto en un punto, el  $x_0$ , donde debe ser infinitamente grande. Se trata en realidad de una *distribución*, aunque puede pensarse también como el límite de una familia de funciones ordinarias adecuadamente elegidas de modo que sus miembros sean integrables y diverjan en el límite  $x \rightarrow x_0$ . Como ejemplo mencionamos la familia caracterizada por el parámetro  $a$

$$g(x; a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2a^2}}}{a},$$

que se comporta como la delta de Dirac en el límite en que el parámetro  $a$  tiende a infinito.

Como consecuencia de la definición (1.288), se tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (1.289)$$

La definición anterior puede ser extendida de inmediato a tres dimensiones. En ese caso se puede escribir

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) = 0 \quad ; \quad \text{si } \vec{r} \neq \vec{r}_0 \quad (1.290)$$

con

$$\int_{\text{todo el espacio}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = 1 \quad (1.291)$$

$$\int_{\text{todo el espacio}} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d^3r = f(\vec{r}_0). \quad (1.292)$$

Recordando ahora que

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = 0 \quad ; \quad \text{para } r > 0$$

$$\int_{\text{todo el espacio}} \nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) d^3r = -4\pi$$

es inmediato hacer la identificación

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$$

o de manera más general

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \right) = -4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (1.293)$$

Este resultado muestra que la delta de Dirac puede representar la densidad de carga correspondiente a una carga puntual. Esta observación es de fundamental importancia en la obtención de soluciones de las ecuaciones de la electrostática y del electromagnetismo por el método de la función de Green.

Finalmente, digamos que la delta de Dirac puede ser vista también como la transformada de Fourier (ver Apéndice precedente) de la unidad. Es decir,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} dk \quad (1.294)$$

como resulta evidente de la definición. La relación recíproca

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{ikx} dx = 1 \quad (1.295)$$

sigue también de inmediato de la propiedad (1.289).

## 1.12. APÉNDICE SOBRE SISTEMAS DE UNIDADES

Los entes con los que opera la física son llamados genéricamente *observables*. Se dice que dos observables ( $A$ ) y ( $B$ ) son *comparables* entre sí cuando existe una definición operacional y universal de la razón:

$$\frac{(A)}{(B)} = n, \quad (1.296)$$

donde  $n$  es un número. Un conjunto de observables ( $A_1$ ); ( $A_2$ );  $\dots$  comparables entre sí dos a dos, son *cantidades* de una misma *magnitud* física.

Si se adopta para cada magnitud una cantidad determinada  $(A_0) \equiv U_A$  que llamamos *unidad*, formando los cocientes

$$\frac{(A_1)}{U_A} = A_1 \quad ; \quad \frac{(A_2)}{U_A} = A_2 \quad ; \quad \text{etc.}, \quad (1.297)$$

a cada cantidad  $(A)$  de la magnitud en cuestión se le puede hacer corresponder un número que se llama *medida* de la cantidad  $(A)$ , con la unidad  $U_A$ . Si se cambia la unidad y se toma ahora  $U'_A$  se tendrá:

$$\frac{(A)}{U'_A} = A' \quad (1.298)$$

de modo que

$$\frac{A}{A'} = \frac{U'_A}{U_A}. \quad (1.299)$$

Es decir, el cociente de las medidas de una misma cantidad es igual a la inversa de la razón entre las unidades.

En general los hechos físicos relacionan cantidades en tanto que las ecuaciones físicas relacionan medidas de las cantidades que en ellas intervienen. Al pasar de una relación de proporcionalidad entre magnitudes físicas a la ecuación entre medidas, es preciso introducir un factor de proporcionalidad  $K$ , es decir, se pasa de

$$(y) \sim (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n} \quad ; \quad (\text{entre cantidades}) \quad (1.300)$$

a la ecuación

$$(y) = K x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \quad ; \quad (\text{entre medidas}). \quad (1.301)$$

El valor de  $K$  dependerá en general de las unidades que se utilicen.

Siempre se trabaja con sistemas de unidades coherentes que son aquellos en que desaparecen los coeficientes parásitos. Es decir, las unidades se toman de acuerdo a coeficientes numéricos adoptados convencionalmente para suprimir las constantes universales superfluas (cantidades que relacionan más de dos magnitudes). Quedará un sistema incoherente en cuanto se imponga una unidad arbitraria. Puede suceder que aparezcan más magnitudes sin unidad determinada, que ecuaciones que las relacionen con las primarias. En ese caso se podrán elegir arbitrariamente las unidades que hagan falta.

### a) Dimensiones

Las dimensiones de una magnitud están relacionadas con las unidades arbitrarias elegidas y la constituyen los exponentes a que aparecen elevadas las magnitudes que conforman la base del sistema de unidades con que se trabaja. En general, la dimensión de una magnitud  $A$  se nota  $[A]$ . La ventaja primera de este concepto reside en el hecho de que en toda ecuación entre magnitudes físicas, las dimensiones a ambos lados del signo igual deben ser las mismas: la ecuación debe ser dimensionalmente homogénea. Se tiene, por lo tanto, una herramienta elemental para controlar ecuaciones físicas.

### b) Sistemas de unidades electromagnéticas

Para el tratamiento de los sistemas de unidades electromagnéticas se puede partir de las 3 leyes de fuerza del campo electromagnético, es decir: Coulomb de la electrostática, Coulomb de la magnetostática y ley de Lorentz; o bien de las ecuaciones de Maxwell (1.1)-(1.4) que obedecen los campos electromagnéticos.

Aquí utilizamos la segunda posibilidad, por obvias razones de coherencia con el enfoque teórico que hemos elegido.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell que interesan a nuestro análisis

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa\rho \quad (1.302)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\kappa' \left( \vec{J} + \frac{1}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad (1.303)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.304)$$

Con las unidades de la mecánica se pueden medir las longitudes y también los tiempos. En consecuencia, se presenta el problema de fijar unidades para la carga  $q$ , los cuatro campos y las tres constantes  $\kappa$ ,  $\kappa'$  y  $\kappa''$ .

Ahora bien, el sistema de ecuaciones anterior debe completarse con las relaciones constitutivas

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon^r \vec{E} \quad (1.305)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu^r \vec{H}, \quad (1.306)$$

las que permiten reescribir las ecuaciones de Maxwell en términos de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  solamente:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \rho \quad (1.307)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 4\pi\kappa' \mu_0 \left( \vec{J} + \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (1.308)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.309)$$

donde hemos eliminado las constantes relativas  $\epsilon^r$  y  $\mu^r$ , ya que son números adimensionales.

Desde el punto de vista dimensional, contamos con tres ecuaciones y seis incógnitas, ya que  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  aparecen en compañía de  $\kappa$  y  $\kappa'$ , respectivamente. En principio entonces, se podrían fijar tres unidades arbitrarias, que equivalen a tres números puros y tres dimensiones. Sin embargo, el siguiente análisis muestra que las constantes no son realmente independientes. En efecto, de la ecuación (1.307), se tiene para las dimensiones

$$[E] = \left[ \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right] \frac{[q]}{[l]^2}, \quad (1.310)$$

mientras que de (1.308) surge

$$[B] = [\kappa' \mu_0] \frac{[q]}{[l][l]} \tag{1.311}$$

de modo que, llevando a la tercera ecuación (1.309), resulta

$$\frac{\left[ \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right]}{[\kappa' \mu_0] [\kappa'']} = \frac{[l]^2}{[l]^2} \tag{1.312}$$

Es decir, esa particular relación de las constantes tiene dimensión de velocidad al cuadrado. El análisis de los datos experimentales en términos de las ecuaciones de Maxwell o, si se quiere, en términos de su combinación en la forma de ecuación de las ondas, muestra que la relación entre constantes vale

$$\frac{\left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} \right)}{(\kappa' \mu_0) \kappa''} = c^2, \tag{1.313}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Esta ecuación fija un vínculo entre las tres constantes, de manera que, por ejemplo,  $\kappa''$  queda determinada por  $\kappa$  y  $\kappa'$ . Restan entonces dos constantes arbitrarias a fijar. Notemos además que, debido a las relaciones (1.305) y (1.306) que incorporan las dimensiones de los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{H}$ , es necesario fijar además y en forma independiente los valores de  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ . La elección particular de este conjunto de constantes determina los diferentes sistemas de unidades electromagnéticas.

Las tablas 1.1 y 1.2 resumen los valores de las constantes en los sistemas de unidades usuales.

TABLA 1.1. *Valores de  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\kappa$  y  $\kappa'$  en los sistemas de unidades cgs*

	cgs ee	cgs em	cgs Gauss
$\epsilon_0$	1	1	1
$\mu_0$	1	1	1
$\kappa$	1	$c^2$ ; $[l]^2[t]^{-2}$	1
$\kappa'$	$1/c^2$ ; $[l]^{-2}[t]^2$	1	$1/c$ ; $[l]^{-1}[t]$

Notemos que los sistemas de tipo cgs son esencialmente mecánicos, en el sentido que las dimensiones de la carga eléctrica quedan fijadas por las de longitud, tiempo y masa. Además, en estos sistemas, los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  se miden con las mismas unidades. Lo mismo sucede con los vectores  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$ . Más aún, en el sistema Gauss, los cuatro vectores tienen la misma dimensión.

TABLA 1.2. Valores de  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$ ,  $\kappa$  y  $\kappa'$  en el Sistema MKS Racionalizado

$\epsilon_0$	$\left(\frac{10^7}{4\pi c^2}\right) \frac{\text{Coulomb}^2 \text{seg}^2}{\text{Kg m}^3}; [M]^{-1}[L]^{-3}[t]^2[Q]^2$
$\mu_0$	$4\pi 10^{-7} \frac{\text{Kg m}}{\text{Coulomb}^2}; [M][L][Q]^{-2}$
$\kappa$	$\frac{1}{4\pi}$
$\kappa'$	$\frac{1}{4\pi}$

El sistema *MKS*, también llamado *MKSQ*, utiliza a la carga eléctrica medida en Coulomb, como una unidad con dimensión propia, además de las que provienen de la mecánica.

Observamos que en la tabla incluimos al sistema *MKS* racionalizado en el que tanto  $\kappa$  como  $\kappa'$  están ligados al número irracional  $4\pi$  para evitar la aparición tan frecuente de ese factor en las ecuaciones del electromagnetismo. Este proceso de racionalización puede ser usado también en conexión con los sistemas de tipo cgs. Recordemos a propósito que la racionalización del sistema de Gauss da lugar al llamado sistema cgs de Heaviside-Lorentz.

### 1.13. APÉNDICE POÉTICO

Homenaje al autor Enrique Loedel Palumbo (1901-1962), ¿físico o poeta?

Esto el Papa exclamó al firmar la bula  
con que furioso excomulgó a Lutero:  
La *divergencia* de un *rotor* es nula  
y el *rotor* de un *gradiente* es siempre cero.

El gran fraile alemán invocó a Dios  
y exclamó con su habitual vehemencia:  
El *rotor* de un *rotor* más *nabla dos*  
da el *gradiente* de toda *divergencia*.



## Capítulo 2

# ASPECTOS FORMALES

### 2.1. INVARIANZA RELATIVISTA

#### 2.1.1. Introducción

El espacio y el tiempo conforman el escenario donde se desarrollan los fenómenos físicos. Para ubicarnos en este escenario, se requiere un sistema de coordenadas. De todos los posibles, la experiencia sugiere la elección de los llamados *sistemas de coordenadas inerciales*, que poseen la siguiente propiedad:

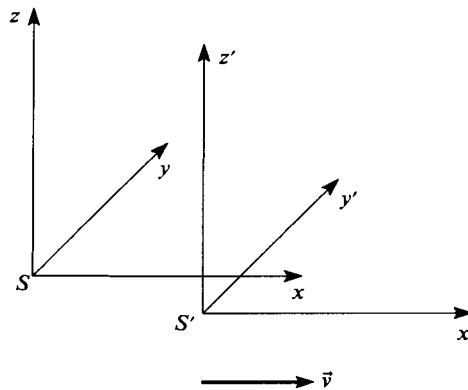
Las leyes que describen un dado fenómeno mecánico son las mismas en todos los sistemas de coordenadas inerciales. En consecuencia, todos los sistemas de coordenadas en movimiento rectilíneo uniforme con respecto a uno inercial deben ser, ellos mismos, sistemas inerciales.

En otras palabras, para todos los sistemas de referencia inerciales las leyes dinámicas de la mecánica tienen la misma forma: las leyes del movimiento son *covariantes*.

Si suponemos dos sistemas de coordenadas inerciales en movimiento relativo uno con respecto al otro, con el eje  $x$  común, como se indica en la figura (2.1), las transformaciones de Galileo que relacionan los fenómenos en ambos sistemas:

$$x' = x - vt \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad z' = z \quad ; \quad t' = t \quad (2.1)$$

están diseñadas precisamente para dejar covariante la segunda ley de Newton. La propiedad de covarianza de las leyes de la mecánica conduce en forma natural a la imposibilidad de detectar, por cualquier medio mecánico, el movimiento absoluto en el espacio. Esta propiedad constituye el *principio de relatividad*.

FIGURA 2.1: *Movimiento relativo de sistemas de coordenadas.*

Es natural preguntarse ahora si las transformaciones de Galileo dejan también covariantes a las leyes del electromagnetismo. La respuesta es negativa. Como ya hemos visto, las ecuaciones de Maxwell conducen a la ecuación de las ondas para los campos eléctrico  $\square^2 \vec{E} = 0$  y magnético  $\square^2 \vec{H} = 0$ . Este hecho implica que en el vacío los campos electromagnéticos se propagan con la velocidad  $c$  en todas las direcciones del espacio. Pero una onda que viaja, digamos en la dirección del eje  $x$  en el sistema  $S$  con velocidad  $c$ , debería moverse en el eje  $x'$  del sistema  $S'$  con velocidad  $c - v$  para estar de acuerdo con las transformaciones de Galileo (*ley de adición de las velocidades*). Esto implica que en este sistema  $S'$ , la onda tendría velocidades diferentes en distintas direcciones. Luego las ecuaciones del electromagnetismo en el vacío serían válidas sólo en un sistema privilegiado. Este sistema hipotético particular es el históricamente llamado *sistema del éter*.

### 2.1.2. Experimento clave

En su momento surgió entonces, como desafío ineludible, el problema de la detección experimental del éter. La famosa experiencia de Michelson y Morley, basada en técnicas de interferometría óptica, fue diseñada precisamente con ese objetivo.

Un esquema simplificado de este experimento se muestra en la figura (2.2). La idea del mismo es la siguiente: luz de longitud de onda  $\lambda$ , proveniente de la fuente  $S$  es dividida por el espejo  $M_1$ , semiplatedado, en dos haces. Ambos haces se mueven en caminos perpendiculares y son reflejados a su vez por los espejos  $M_2$  y  $M_3$ . Los haces finalmente se recombinan en el punto de observación, donde existe una diferencia de fase entre ellos, debida al tiempo que necesita la luz para recorrer el espacio entre el espejo  $M_1$  y  $M_3$ , ida y vuelta. Suponiendo que la Tierra se mueve con velocidad  $v$ , paralela a  $M_1 M_3$ , respecto del éter, resulta

$$t = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} = \frac{2lc}{c^2 - v^2}. \quad (2.2)$$

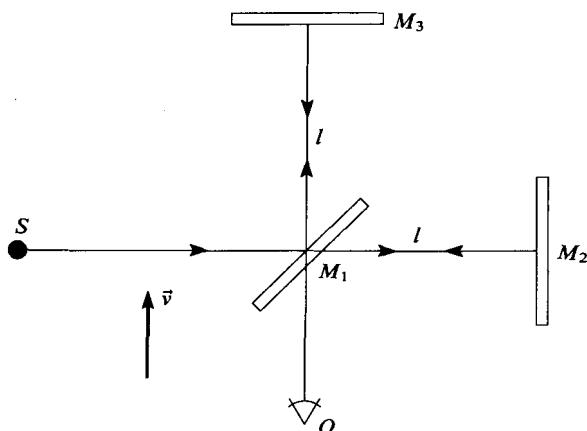


FIGURA 2.2: Esquema del experimento de Michelson-Morley.

Por otra parte, el tiempo  $t'$  empleado por el haz en recorrer el espacio entre  $M_1$  y  $M_2$ , ida y vuelta, teniendo en cuenta que la luz no va y vuelve por el mismo camino, es (ver figura (2.3)).

$$t' = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}}. \quad (2.3)$$

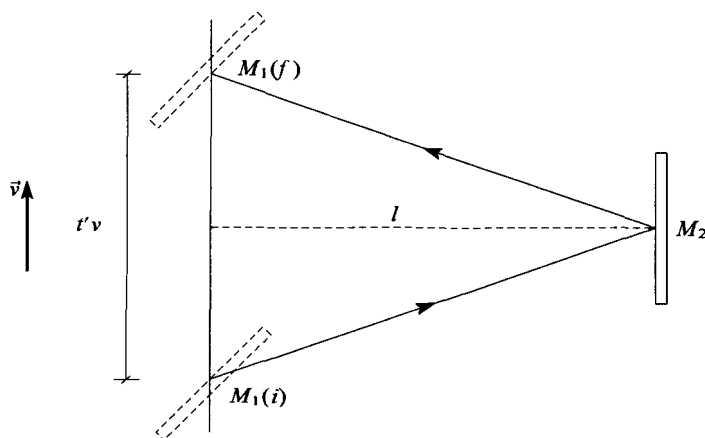


FIGURA 2.3: Cálculo del tiempo de recorrido por los haces.

De manera tal que la diferencia de fase entre los dos haces luminosos en el punto de observación (ver figura (2.2)) está dada por

$$\Delta\phi = \frac{c(t - t')}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} \left( \frac{2lc}{c^2 - v^2} - \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} \right) \quad (2.4)$$

y como  $v/c \ll 1$ , tenemos que

$$\Delta\phi \simeq \frac{\ell v^2}{\lambda c^2}. \quad (2.5)$$

El diagrama de interferencia resultante fue obtenido con el aparato en la posición descrita y también en una posición rotada en  $90^\circ$ . El objetivo de intercambiar las dos ramas del interferómetro era tratar de observar una diferencia en los corrimientos de fase. Estos corrimientos resultaron mucho más pequeños que los calculados sobre la base de la existencia del éter. Más aún, estudios posteriores confirmaron que los corrimientos de fase eran compatibles con cero, dentro de los errores experimentales. La conclusión que se desprende de estos experimentos es que la velocidad de la luz  $c$  es la misma en todas las direcciones, no detectándose movimiento del sistema de referencia relativo al hipotético éter. Este resultado es válido localmente y pone en tela de juicio las transformaciones de Galileo, en las cuales se fundamenta el éter. Los resultados de la experiencia de Michelson-Morley podrían interpretarse pensando que la Tierra coincide casualmente con el sistema privilegiado del éter. Otra posible interpretación sería que la Tierra al moverse arrastra consigo el éter. En cualquiera de estas dos posibilidades, el interferómetro de Michelson estaría en reposo relativo al éter y como consecuencia no habría ningún efecto observable. Sin embargo, existen otras experiencias astronómicas que indican que ese no es el caso. Las evidencias más importantes son la aberración de la luz de las estrellas debido al movimiento orbital de la Tierra y propiedades particulares de las estrellas dobles. No entraremos aquí en más detalles de tipo experimental e histórico, solamente remarcamos que todas las evidencias conducen claramente a contradicciones cuando se trata de encontrar un sistema particular privilegiado, respecto del cual las ecuaciones de Maxwell en el vacío son válidas.

### 2.1.3. Postulados de la relatividad

Ante los resultados de la experiencia de Michelson-Morley, Einstein trató de encontrar una explicación a la problemática planteada. Analizó entonces con detalle los fundamentos de las suposiciones que se hacían hasta ese momento. En primer lugar recurrió al principio de equivalencia de todos los sistemas inerciales en la mecánica. ¿Por qué hay dificultades para decir que esa equivalencia es también cierta en el electromagnetismo? La respuesta, que ya discutimos, está en que las ecuaciones del electromagnetismo implican una velocidad constante  $c$  en todas las direcciones. Si esta situación ocurre en un sistema, parecería, en principio, que no puede ocurrir en otro sistema con movimiento relativo respecto del primero. ¿Será que también para el electromagnetismo todos los sistemas inerciales son equivalentes? ¿Qué inconveniente existe en que la velocidad de la luz sea  $c$  cualquiera sea el sistema de referencia que se considere? Y en tal caso, ¿no se podría comprobar experimentalmente? Cuando Einstein se formuló estas preguntas, advirtió que para medir la velocidad de un móvil es necesario medir los tiempos de pasaje de ese móvil por dos puntos ubicados a una distancia conocida. Por otra parte, para que la diferencia de los tiempos sea el tiempo empleado en recorrer esa distancia, es necesario previamente sincronizar los respectivos relojes. Para ello es necesario conocer previamente una velocidad, de modo que este proceso lleva a un verdadero círculo vicioso. Advertida esta dificultad,

desaparece la contradicción aparente del electromagnetismo con el principio de relatividad previamente enunciado. En efecto, *la simultaneidad no puede ser verificada experimentalmente, debe ser definida.*

No existe por lo tanto ningún inconveniente lógico en acordar como definición de simultaneidad una convención basada en que las ondas electromagnéticas se propagan en el vacío con velocidad  $c$ , respecto de todo sistema inercial arbitrario. Por otra parte, la velocidad de ida y vuelta a un mismo punto luego de una reflexión siempre puede medirse con un solo reloj, sin necesidad de sincronización, y este valor debe resultar también  $c$ , si el electromagnetismo posee las mismas leyes en todo sistema inercial. El postulado de Einstein sobre la constancia universal de la velocidad  $c$  es la extensión lógica del principio de la relatividad al electromagnetismo.

La teoría especial de la relatividad de Einstein se formula sobre la base de dos postulados:

1. *Las leyes de la naturaleza tienen la misma forma en todos los sistemas inerciales.*
2. *La velocidad  $c$  de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es la misma en todos los sistemas inerciales e independiente de la dirección de propagación.*

Agreguemos finalmente que los conceptos de sincronización y por lo tanto de simultaneidad no son absolutos sino relativos al sistema considerado. Es decir, que dos relojes pueden muy bien estar sincronizados en un sistema de referencia pero no en otro. La teoría implica también que las longitudes dependen del estado de movimiento del observador. En efecto, si en un sistema necesitamos medir la longitud de una barra en movimiento, será necesario marcar, en este sistema, las posiciones simultáneas de los extremos de la barra, pero lo que en este referencial se considere simultáneo no lo será en general para otro. Todas estas consideraciones cinemáticas, en el marco de la relatividad especial, resultarán obvias luego de introducidas las transformaciones de Lorentz.

#### 2.1.4. Transformaciones de Lorentz

Vamos ahora a determinar las leyes de transformación entre dos sistemas inerciales, que reemplacen a las transformaciones de Galileo y estén de acuerdo con los postulados de la relatividad.

Comenzamos denominando con  $(x, y, z, t)$  y  $(x', y', z', t')$  las coordenadas de un punto  $P$  cualquiera, referidas a dos sistemas  $S$  y  $S'$  en movimiento relativo uniforme. Si llamamos

$$d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

a la distancia que recorre un rayo de luz entre dos puntos espaciales  $P_1$  y  $P_2$  referidos al sistema  $S$ , la propagación debe satisfacer  $c^2 = d^2/\Delta t^2$ . Es decir, en el sistema  $S$

$$\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 = 0. \quad (2.6)$$

A su vez, por el segundo postulado de la relatividad debe ser igualmente válido que

$$\Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2 - c^2 \Delta t'^2 = 0 \quad (2.7)$$

en el sistema  $S'$ .

A partir de este punto, es conveniente introducir la notación cuatridimensional (tetradimensional), que habíamos mencionado previamente

$$x_1 = x ; x_2 = y ; x_3 = z ; x_4 = ict \quad (2.8)$$

de manera que la ecuación (2.6) se expresa como

$$\sum_{\alpha=1}^4 \Delta x_{\alpha}^2 = 0. \quad (2.9)$$

Las transformaciones de coordenadas espaciales y del tiempo que garantizan la invarianza de la expresión anterior, reciben el nombre de *transformaciones de Lorentz*. Como veremos de inmediato, estas transformaciones deben ser lineales y dejan invariante también el intervalo más general

$$\Delta s^2 = \sum_{\alpha=1}^4 \Delta x_{\alpha}^2 \quad (2.10)$$

entre dos puntos espacio-temporales cualesquiera, no necesariamente conectados por un rayo de luz.

Las transformaciones buscadas no son más que las traslaciones y rotaciones en un espacio tetradimensional, llamado espacio de Minkowski. Como las traslaciones en el espacio de Minkowski sólo implican un cambio del origen espacio-temporal de referencia, nos restringiremos entonces al análisis de las rotaciones en este espacio, que constituyen las transformaciones de Lorentz. La forma más general de ellas es

$$x'_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^4 a_{\alpha\beta} x_{\beta}, \quad (2.11)$$

donde los elementos de matriz  $a_{\alpha\beta}$  deben satisfacer la condición de ortogonalidad

$$\sum_{\gamma=1}^4 a_{\alpha\gamma} a_{\beta\gamma} = \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.12)$$

Analizamos primero un caso particular de estas transformaciones en el que resulta muy simple el manejo algebraico. Se trata del movimiento relativo, con velocidad  $v$ , de dos sistemas inerciales  $S$  y  $S'$  como se indica en la figura (2.1). Es claro entonces que sólo las coordenadas  $x_1$  y  $x_4$  serán afectadas por la transformación, la que tomará la forma

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \psi + x_4 \operatorname{sen} \psi \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= -x_1 \operatorname{sen} \psi + x_4 \cos \psi, \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $\psi$  es el ángulo de rotación en el plano  $x_1, x_4$ . Esta rotación da lugar a la representación de la figura (2.4). En esta figura queda claro que los dos eventos  $Q$  y  $R$ , que son simultáneos en  $S$ , tienen diferente coordenada temporal en  $S'$ . Igualmente, los dos eventos  $P$  y  $Q$ , si bien tienen la misma ubicación espacial en  $S$ , poseen coordenadas espaciales diferentes en el sistema primado.

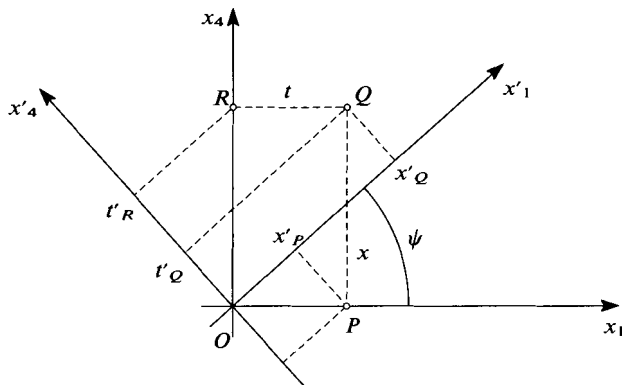


FIGURA 2.4: Transformaciones de Lorentz como rotaciones.

Debido a que los coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  en la expresión (2.11) son cantidades adimensionales, el ángulo  $\psi$  sólo puede depender de la relación

$$\beta = v/c. \quad (2.14)$$

En efecto, si el origen del sistema de referencia  $S'$ , se observa desde el sistema de referencia  $S$ , es decir, el sistema  $S'$  se desplaza con velocidad  $v$  respecto de  $S$ , se tiene

$$\frac{x_1}{x_4} = \frac{x}{i c t} = -\frac{i}{c} \frac{x}{t} = -i \frac{v}{c} = -i \beta$$

y consecuentemente, de la primera ecuación (2.13), resulta

$$\tan \psi = -\frac{x_1}{x_4} = i \beta, \quad (2.15)$$

que fija la relación funcional buscada entre  $\psi$  y  $\beta$ . Es útil disponer de las expresiones de  $\cos \psi$  y  $\sin \psi$  en términos de  $\beta$

$$\cos \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad ; \quad \sin \psi = \frac{i \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

que reemplazadas en las expresiones (2.13), permiten escribir

$$\begin{aligned} x'_1 &= \gamma (x_1 + i \beta x_4) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3 \\ x'_4 &= \gamma (x_4 - i \beta x_1), \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde se introdujo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.17)$$

Volviendo a la notación primitiva para las variables de espacio y de tiempo, podemos escribir la forma usual de las transformaciones de Lorentz

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - v t) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

que establecen la conexión entre las coordenadas espacio-temporales de un evento cuando es referido a dos sistemas inerciales que se mueven con velocidad relativa  $v$ . Notemos que las transformaciones inversas que relacionan las coordenadas en  $S$  en función de las de  $S'$ , se obtienen de las anteriores cambiando variables sin primar por variables primadas y  $v$  por  $-v$ .

Las transformaciones de Lorentz dependen sólo de la velocidad relativa entre el móvil y el observador (entre los sistemas  $S'$  y  $S$ ) y no de las posiciones relativas de ambos en el espacio-tiempo. Las transformaciones son las mismas aun cuando móvil y observador estén tan alejados como se quiera. Por esta razón, se dice que las transformaciones de Lorentz son *globales*. Vale la pena comentar que en el ámbito de la relatividad general, la descripción de movimientos relativos es mucho más complicada porque se realiza en presencia de un campo gravitacional. Esto hace que las transformaciones correspondientes sean *locales* y entonces, en un campo gravitatorio sólo pueden definirse coordenadas locales. En resumen, podemos decir que la relatividad restringida es una teoría global, en tanto que la relatividad general es una teoría local.

Una observación importante a hacer es que en el límite  $\beta \rightarrow 0$ , se recuperan las transformaciones de Galileo (2.1), como se ve fácilmente de las ecuaciones (2.18). Esto indica que las transformaciones de Galileo son una aproximación para bajas velocidades de las transformaciones de Lorentz. Consecuentemente, la mecánica de Newton es la aproximación para bajas velocidades de la mecánica relativista que formularemos más adelante sobre la base de las transformaciones de Lorentz.

A continuación vamos a discutir las implicancias de haber requerido que  $\Delta s^2$ , definida por la ecuación (2.10), sea invariante. Esta condición satisface el segundo postulado de la teoría de la relatividad, pero en realidad no es una consecuencia de este postulado. En principio, la transformación definida por las ecuaciones (2.18) sería una restricción del caso más general que puede incluir un factor  $\lambda$  multiplicando a todos los términos del miembro derecho de la igualdad. Es decir, transformaciones de la forma

$$\begin{aligned} x' &= \lambda \gamma (x - v t) \\ y' &= \lambda y \\ z' &= \lambda z \\ t' &= \lambda \gamma \left( t - \frac{v}{c^2} x \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$



Sin embargo, se puede probar que  $\lambda$  vale estrictamente 1 y por lo tanto estas últimas se reducen a las de Lorentz (2.18). En efecto, basta con considerar dos transformaciones sucesivas del tipo (2.19); la primera del sistema inercial  $S$  al  $S'$  con velocidad relativa  $v$  y la segunda que nos lleve hacia atrás al sistema original  $S$ , con velocidad  $-v$ . Este proceso conduce de inmediato a la condición

$$\lambda(v) \lambda(-v) = 1. \quad (2.20)$$

Ahora bien, para las direcciones  $(y, z)$ , transversales al movimiento,  $\lambda$  no es nada más que un factor de escala. Luego, por razones de simetría, este factor debe ser independiente de la dirección de la velocidad, es decir,

$$\lambda(v) = \lambda(-v). \quad (2.21)$$

Las dos últimas ecuaciones muestran entonces que  $\lambda$  debe ser independiente de la velocidad e igual a la unidad. La solución negativa carece de sentido, pues para  $v = 0$  implicaría un cambio de signo de los cuatro ejes coordenados en lugar de coincidir con la identidad.

A continuación mostramos cómo generalizar las transformaciones de Lorentz cuando la dirección de la velocidad  $v$  no coincide con la coordenada  $x$ . Proyectamos primero el vector  $\vec{r}$  en la dirección paralela al vector velocidad  $\vec{v}$ , para obtener  $\vec{r}_{\parallel}$ , y en la dirección perpendicular, que da lugar a  $\vec{r}_{\perp}$ . Luego, para estas componentes podemos aplicar las ecuaciones (2.18) y obtener así

$$\begin{aligned} \vec{r}'_{\parallel} &= \gamma (\vec{r}_{\parallel} + \vec{v} t) \\ \vec{r}'_{\perp} &= \vec{r}_{\perp} \\ t' &= \gamma \left[ t + \left( \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}_{\parallel}}{c^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

pero como

$$\vec{r}_{\parallel} = \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} \quad ; \quad \vec{r}_{\perp} = \vec{r} - \vec{r}_{\parallel}$$

y a su vez

$$\vec{r}' = \vec{r}'_{\perp} + \vec{r}'_{\parallel}$$

se puede reconstruir entonces la transformación más general

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= \vec{r} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v}) \vec{v}}{v^2} - \gamma \vec{v} t \\ t' &= \gamma \left( t - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c^2} \right), \end{aligned} \quad (2.23)$$

de la cual se pueden obtener los coeficientes  $a_{\alpha\beta}$  de la matriz de transformación general (2.11).

Es interesante observar que las ecuaciones de Maxwell son aún covariantes frente a transformaciones más generales que las de Lorentz. En efecto, ellas conservan la misma forma frente a transformaciones llamadas *conformes* que incluyen:

- las transformaciones inhomogéneas de Lorentz usuales;
- los cambios de escala  $\lambda$  de la forma

$$x'_{\mu} = \lambda x_{\mu} \quad (2.24)$$

- las transformaciones no lineales

$$x'_{\mu} = \frac{1}{N} (x_{\mu} - x^2 a_{\mu}) \quad (2.25)$$

con

$$N = 1 - 2a \cdot x + a^2 x^2,$$

donde  $a_{\mu}$  es un tetravector constante.

Sin embargo, debe notarse que el Principio de Inercia que establece que una partícula libre se mueve con velocidad constante, no es invariante frente a estas transformaciones conformes. Es decir, que, vista desde otro sistema de referencia, una partícula libre podría sufrir aceleraciones debido al carácter no lineal de la transformación. La única excepción se presenta cuando la velocidad de la partícula coincide con la velocidad de la luz. Concluimos entonces que las transformaciones conformes no se corresponden con una buena simetría de la naturaleza ya que existen partículas masivas, las que, consecuentemente, se mueven con velocidad  $v < c$ .

### 2.1.5. Consecuencias de las transformaciones de Lorentz

Analizaremos ahora la contracción de longitudes, conocida como contracción de Lorentz-Fitzgerald, la dilatación temporal o de Einstein, el efecto Doppler y el teorema de adición de velocidades. Estos hechos son indudablemente las consecuencias más notables de las transformaciones de Lorentz, no sólo desde un punto de vista conceptual sino también observacional.

#### a) *Contracción de longitudes*

Comenzamos estudiando la vinculación entre las medidas de intervalos espaciales realizadas por dos observadores inerciales diferentes.

Consideremos inicialmente una barra o varilla en reposo en el sistema  $S'$  yaciendo a lo largo del eje coordenado  $x'$  siendo sus extremos  $x'_1$  y  $x'_2$ . La longitud  $\ell'$  de la varilla en  $S'$  es

$$\ell' = x'_2 - x'_1. \quad (2.26)$$

Por otra parte, para determinar la longitud de la varilla, un observador en el sistema  $S$  debe medir la posición de ambos extremos simultáneamente, esto es, al mismo tiempo  $t$ . El resultado que obtiene será

$$\ell = x_2 - x_1. \quad (2.27)$$

Usando las transformaciones de Lorentz (2.18) tenemos

$$x'_2 = \gamma (x_2 - vt) \quad (2.28)$$

$$x'_1 = \gamma (x_1 - v t), \quad (2.29)$$

de modo que volviendo a las ecuaciones (2.26) y (2.27) resulta

$$\ell' = \gamma \ell. \quad (2.30)$$

Por lo tanto, la longitud de la varilla en el sistema propio, sistema en el que la varilla está en reposo, es mayor que la observada desde un sistema en movimiento, como resulta claro en la representación de la figura (2.5). Este resultado se expresa usual-

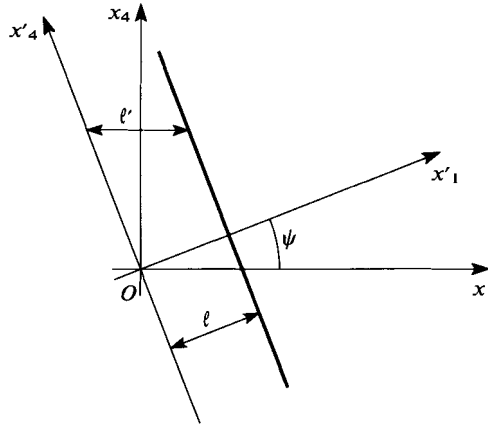


FIGURA 2.5: *Contracción de Lorentz-Fitzgerald.*

mente diciendo que las longitudes en movimiento se acortan. Está claro también que este hecho es relativo y el *acortamiento* depende del sistema desde el cual se mide la varilla. Como mencionamos, la contracción a lo largo del eje de movimiento es llamada contracción de Lorentz-Fitzgerald, quienes la analizaron para tratar de explicar la experiencia de Michelson-Morley. Entendemos también que esta contracción es una propiedad básica, *geométrica*, del espacio y del tiempo, y no una propiedad de la materia. Es oportuno notar que si la varilla se encuentra perpendicular a la dirección de movimiento, no sufre ningún tipo de contracción como resulta de la ley de transformación (2.18) para las coordenadas  $y$  y  $z$ . Digamos por último que la contracción de un volumen tridimensional,  $V$ , surge de la composición de los efectos en cada dirección

$$V' = \gamma V.$$

La observación experimental de la contracción expresada por la ecuación (2.30) es particularmente difícil. Tanto el ojo como una cámara fotográfica registran los fotones que llegan a la retina, o la placa, simultáneamente, provenientes de todas las partes del objeto en cuestión. Sin embargo, debido al movimiento del objeto, esos fotones no fueron emitidos simultáneamente por todos esos puntos. El efecto de esta distribución de tiempos de emisión cancela la contracción de Lorentz-Fitzgerald. Así, una fotografía obtenida por un observador depende sólo del lugar y del instante de obtención y no

del movimiento relativo del fotógrafo y el objeto. En rigor, esta aseveración vale si el objeto, por su tamaño y por la distancia a la que se encuentra, subtiende un ángulo sólido de observación pequeño. La discusión precedente permite entender por qué objetos circulares que se mueven, aun muy rápido, mantienen la apariencia circular para observadores fijos. Consecuentemente, la contracción no podrá ser observada estudiando objetos astronómicos. Esta conclusión, por supuesto, no pone en duda la observabilidad o la «realidad» de la contracción de Lorentz-Fitzgerald ya que su invisibilidad es precisamente una consecuencia de la Teoría de la Relatividad (ver «Invisibility of the Lorentz Contraction», *Physical Review* **116**, 1041, 1959).

### ***b) Dilatación temporal***

Analizamos ahora el efecto de las transformaciones de Lorentz sobre los intervalos temporales. Consideremos un reloj que se encuentra en reposo en el sistema  $S'$  en el punto de coordenada  $x'_1$ . El instante  $t'_1$  en ese reloj se corresponde, de acuerdo con la transformación inversa a la dada en las ecuaciones (2.19), con el tiempo

$$t_1 = \gamma \left( t'_1 + \frac{v x'_1}{c^2} \right) \quad (2.31)$$

en el sistema  $S$ . Un instante posterior  $t'_2$ , tiene como correspondiente en  $S$

$$t_2 = \gamma \left( t'_2 + \frac{v x'_1}{c^2} \right). \quad (2.32)$$

Si llamamos  $\Delta t'$  al intervalo de tiempo de duración de un evento en un punto fijo de  $S'$  y  $\Delta t$  al intervalo de tiempo de ese mismo evento, medido ahora en el sistema  $S$ , tenemos que

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma (t'_2 - t'_1) = \gamma \Delta t'. \quad (2.33)$$

De modo que si se tiene un reloj fijo en el sistema primado  $S'$ , la duración de eventos locales ( $\Delta x' = 0$ ) registrados por ese reloj serán menores que los registrados por el reloj del otro sistema  $S$ , en la relación  $1/\gamma$ , como resulta evidente en la representación de la figura (2.6).

Este resultado se denomina dilatación temporal de Einstein y se conoce también como *atraso* de los relojes en movimiento. Debe quedar claro que este atraso, al igual que la contracción de intervalos espaciales, es relativo y dependiente del sistema desde el que se observa.

La dilatación temporal ha sido, y es, observada en diferentes experimentos. Mencionaremos aquí el caso de la vida media de los *muones*, partículas elementales (al nivel de elementalidad actual) similares al electrón pero 207 veces más masivas y en consecuencia inestables. A través de las llamadas interacciones débiles, el muón decae

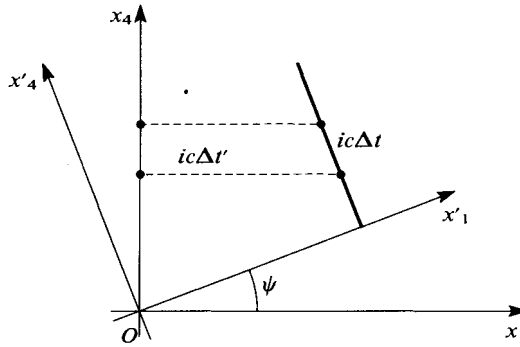


FIGURA 2.6: Dilatación de Einstein.

en un electrón acompañado de neutrinos. Los muones son producidos naturalmente en la alta atmósfera en el proceso de absorción de la radiación cósmica. Un parámetro característico de las partículas inestables es la vida media. En particular, la vida media del muón es  $\tau = 2,2 \mu \text{ seg}$  cuando se mide en su propio sistema de referencia, es decir, en el sistema en que está en reposo. Considerando que la velocidad de movimiento de los muones es cercana a la velocidad de la luz, se deduce que recorren una distancia del orden de 600 m antes de decaer. Consecuentemente, como se producen en la alta atmósfera, los muones nunca alcanzarían la superficie de la Tierra. Sin embargo, la experiencia muestra claramente que un gran número de estas partículas son detectadas en los laboratorios terrestres. Esta aparente paradoja se explica en términos de la dilatación temporal. En efecto, la vida media del muón respecto de un observador en la Tierra es  $T = \gamma \tau$ , de modo que si la velocidad de los muones es del orden de  $v \approx 0,99 c$ , la vida media para el observador terrestre es  $T \approx 16 \mu \text{ seg}$ . En este tiempo la partícula recorre alrededor de 5 Km, lo que permite observarla en la Tierra.

La dilatación temporal se comprueba también con muones producidos en aceleradores de partículas cargadas (por ejemplo en el CERN: Centro Europeo de Física de Partículas de Ginebra). Aquí alcanzan velocidades del orden de  $v \approx 0,9995 c$  y, por ello, el tiempo de vida en el sistema del laboratorio resulta 30 veces mayor que  $\tau$  del muón definido en el sistema propio. A la inversa, debido a la exactitud de la ley de dilatación, la medida de la vida media en vuelo puede servir para determinar la energía que alcanza el haz.

Mencionemos finalmente experimentos realizados con relojes atómicos de cesio transportados en aviones, cuyas medidas se comparan con otras realizadas por relojes similares en la Tierra. Dependiendo del sentido del vuelo en la dirección Este-Oeste, los resultados fueron claramente diferentes (ver J. C. Hafele, R. E. Keating «Around the World Atomic Clocks», *Science*, 1972, 168).

### c) Efecto Doppler

Experimentalmente se encuentra que la frecuencia de una señal recibida desde una fuente depende de la velocidad relativa de la fuente y el observador. Este fenómeno es conocido con el nombre de *efecto Doppler*.

Nos proponemos obtener la expresión relativista de este efecto. Sea  $L'$  una fuente luminosa puntual en reposo en el sistema  $S'$ , que emite una onda esférica representada por

$$O' = \frac{A'}{r'} e^{i\omega'(t' - \frac{r'}{c})}. \quad (2.34)$$

Esta onda intercepta a un observador  $P$  en reposo en el sistema  $S$ . Las coordenadas de  $P$  son  $x$  e  $y$  en el sistema  $S$  y  $x'$  e  $y'$  en el sistema  $S'$ . Elegimos los ejes  $x$  y  $x'$  coincidentes con la dirección del movimiento relativo de los dos sistemas, como se indica en la figura (2.7). Por simplicidad gráfica y sin involucrar restricciones en el

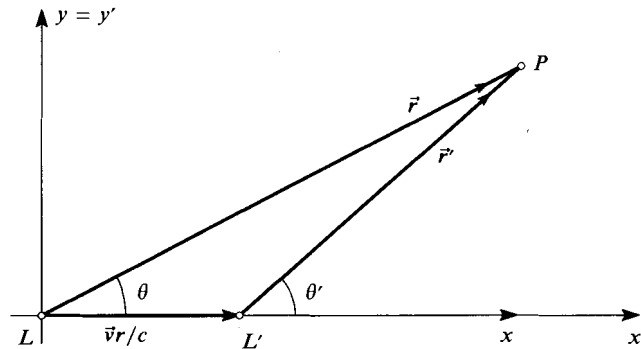


FIGURA 2.7: Elementos geométricos para el análisis del efecto Doppler.

análisis, eliminamos la coordenada  $z$ . En la figura (2.7) se indica el rayo que une  $L'$  con  $P$  formando un ángulo  $\theta'$  con el eje  $x'$ , de modo que

$$r' = x' \cos \theta + y' \sin \theta. \quad (2.35)$$

Claramente, el observador en el sistema  $S$  interpreta a la señal que recibe como proveniente de una fuente puntual ubicada en la posición  $L$  de su propio sistema. Por ello la onda mantiene su carácter esférico, permitiendo escribir

$$O = \frac{A}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}, \quad (2.36)$$

donde

$$r = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (2.37)$$

con  $\theta$  el ángulo formado, en el sistema  $S$ , por el rayo de luz que va desde el punto de observación  $P$  a la fuente «virtual»  $L$  y el eje coordenado  $x$ . Las coordenadas de ambos sistemas están conectadas por transformaciones de Lorentz, de modo que haciendo uso precisamente de las ecuaciones (2.19) junto a (2.34) y (2.35), podemos escribir para la fase de  $O$

$$\omega \left[ \gamma \left( t' + \frac{v x'}{c^2} \right) - \frac{\gamma (x' + v t') \cos \theta'}{c} - \frac{y' \sin \theta'}{c} \right].$$

Si comparamos ahora esta fase con la correspondiente fase de la onda  $O'$ , obtenemos, a partir de la componente temporal, la relación entre frecuencias

$$\omega' = \omega \gamma \left( 1 - \frac{v}{c} \cos \theta \right). \quad (2.38)$$

Esta es la expresión del efecto Doppler relativista. Ahora bien, de la figura (2.7) es inmediato que

$$v \cos \theta = -\vec{v} \cdot \vec{n},$$

donde  $\vec{n}$  es el versor en la dirección que une el observador ( $P$ ) a la fuente ( $L$ ) y por lo tanto tiene sentido inverso a  $\vec{r}$ . Por lo tanto, se puede escribir de inmediato

$$\omega_{obs} = \frac{\omega_{fuente}}{\gamma \left( 1 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{c} \right)}, \quad (2.39)$$

donde hemos identificado a  $\omega$  con  $\omega_{obs}$ , y a  $\omega'$  con  $\omega_{fuente}$ , la frecuencia propia de la fuente.

El análisis de la ecuación (2.39) muestra la presencia de los siguientes casos de interés:

1. Si la fuente de luz se mueve alejándose del observador,  $\vec{v} \cdot \vec{n} > 0$  y consecuentemente decimos que las frecuencias se han desplazado hacia el rojo.
2. Si la fuente se mueve transversalmente,  $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ , se tiene el efecto *Doppler transverso*, con corrimiento de frecuencia hacia el rojo.
3. Si la fuente se mueve hacia el observador,  $\vec{v} \cdot \vec{n} = -v$ , ocurre un corrimiento hacia el violeta de magnitud

$$\omega_{obs} = \omega_{fuente} \frac{\sqrt{1 + v/c}}{\sqrt{1 - v/c}}.$$

Hasta aquí hemos discutido sólo la contribución de la parte temporal de la fase. La conexión entre partes espaciales también provee información interesante. En particular se propone como ejercicio la deducción de una relación entre los ángulos del observador en dos sistemas de referencia inerciales. Estas ecuaciones proveen la explicación del bien conocido fenómeno astronómico de *aberración de la luz* debido al cual todas las estrellas, en el término de un año, describen elipses en el cielo.

#### d) Teorema de adición de velocidades

En la mecánica de Newton, la ley de composición de velocidades es particularmente simple, ya que, al ser el tiempo invariante, ésta se reduce a la suma de los vectores velocidad. En el marco relativista la ley de composición debe ser tal que la velocidad resultante no supere la velocidad de la luz  $c$ . La regla de combinación relativista de dos velocidades  $v_1$  y  $v_2$  es

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}. \quad (2.40)$$

Aquí  $v_2$  representa la velocidad del móvil 2 con respecto al cuerpo 1 que a su vez se mueve en la misma dirección con velocidad  $v_1$ .

Notemos que la ley de adición de velocidades no es más que la fórmula de adición de la función trigonométrica tangente. En efecto, la suma de velocidades implica la composición de dos transformaciones de Lorentz, es decir, de dos rotaciones de ángulos  $\psi_1$  y  $\psi_2$  respectivamente. Esta composición conduce a la suma de estos ángulos y no de sus tangentes. Para estas últimas resulta

$$\tan \psi = \frac{\tan \psi_1 + \tan \psi_2}{1 - \tan \psi_1 \tan \psi_2},$$

que recordando la ecuación (2.15) permite escribir

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2},$$

expresión que coincide con la ley relativista de adición de velocidades (2.40).

Digamos finalmente que para velocidades pequeñas, es decir, suficientemente inferiores a la velocidad de la luz,  $c$ , la ley relativista (2.40) se reduce a la fórmula de superposición galileana  $v = v_1 + v_2$ .

La ley de adición de velocidades tiene implícito el hecho de que la velocidad de la luz  $c$  no puede ser excedida por ningún móvil. En efecto, la expresión (2.40) implica en el caso extremo:  $c + c = c$ . El móvil al que nos referimos no es necesariamente un punto material, ya que puede tratarse de un proceso cualquiera que dé lugar a cambios materiales. Este tipo general de procesos es llamado una *señal* y por ello es la *velocidad de señal* la que no puede superar a la de la luz.

#### 2.1.6. Elemento de línea o intervalo

La teoría de la relatividad se construye sobre la base del invariante fundamental  $\Delta s^2$ , explicitado en (2.10), que determina el cuadrado de la distancia entre dos eventos en el espacio de cuatro dimensiones. La distancia así definida se llama *intervalo* o *distancia minkowskiana*. El intervalo entre eventos infinitamente próximos define la naturaleza geométrica local del espacio de tres dimensiones espaciales y una temporal,  $(3 + 1)$ . Sin embargo, otras características topológicas tales como la compacticidad y la conectividad del espacio no quedan determinadas por ese requerimiento.



Examinemos alguna de las propiedades del elemento de línea. Para ello escribimos (2.10) una distancia infinitesimal

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2. \quad (2.41)$$

Vemos que  $ds^2$  puede ser cero, positivo o negativo. Consecuentemente se definen tres tipos distintos de intervalos:

1. Intervalos *tipo espacio*, para los cuales  $ds^2 > 0$ . En este caso siempre es posible encontrar una transformación de Lorentz que reduzca la componente temporal a cero.
2. Intervalos *tipo tiempo*, para los cuales  $ds^2 < 0$ . Aquí siempre es posible encontrar una transformación de Lorentz tal que la componente espacial se reduzca a cero.
3. Intervalos *tipo luz*, para los cuales  $ds^2 = 0$ . Esto significa que, en el intervalo de tiempo que separa ambos sucesos, un rayo de luz alcanza exactamente a propagarse de un punto al otro. Todos los puntos separados de uno dado por intervalos tipo luz forman la superficie de un cono en el espacio de cuatro dimensiones, llamado el *cono de luz* del punto en cuestión.

Estos tres casos pueden representarse en una gráfica, como se muestra en la figura (2.8). Para simplificar el diseño, nos hemos restringido a una sola coordenada espacial y el tiempo.

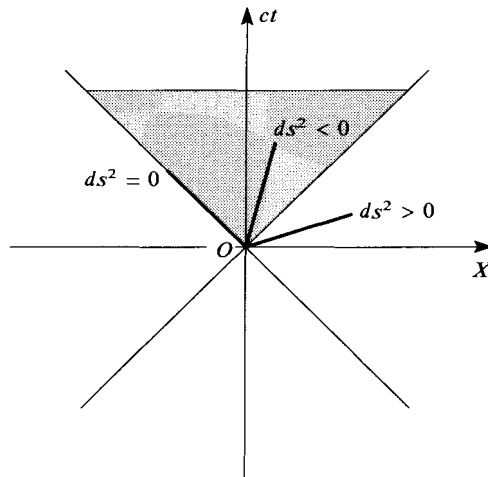


FIGURA 2.8: Los tres tipos de intervalos.

Vemos en la figura que el espacio-tiempo queda naturalmente dividido en tres regiones:

1. La parte interior del cono, un triángulo en este caso, donde se encuentra el semieje  $ct > 0$  y que contiene todos los puntos del universo cuya distancia temporal al vértice del cono,  $O$ , es mayor que la distancia espacial. Todos estos eventos se encuentran en el futuro absoluto de  $O$ . En efecto, para cualquier sistema de coordenadas y para cualquier punto de esta región vale  $ct' > x'$ . Los intervalos son tipo tiempo.
2. La parte opuesta del cono representa eventos para los cuales  $ct' < 0$  y contiene los eventos anteriores a  $O$  respecto de cualquier sistema de coordenadas. También aquí los intervalos son tipo tiempo.
3. La región fuera del cono donde  $x > ct$  contiene eventos que pueden aparecer como simultáneos con  $O$  desde un determinado sistema de referencia. En esta región los intervalos son de tipo espacio.
4. Las líneas que determinan el cono de luz y que separan las regiones mencionadas arriba definen eventos que pueden ser conectados con  $O$  a través de un rayo de luz. Es claro que los intervalos correspondientes son tipo luz.

Pasemos ahora al análisis relativista del movimiento de una partícula. Éste se describe mediante ecuaciones de la forma

$$x_i = x_i(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.42)$$

donde  $x_i(t)$  son funciones definidas de la variable  $t$ . Estas ecuaciones representan una curva en el espacio de la Figura (2.8) o en general en el espacio de  $(3 + 1)$  dimensiones, que se llama la *línea de universo* de la partícula. En general, la parametrización de la curva en función del tiempo no es conveniente dado que  $t$  no es un parámetro invariante frente a transformaciones de Lorentz. Observemos que para dos puntos cercanos cualesquiera sobre la línea de universo, el intervalo  $ds^2$  es siempre negativo. Esto sugiere definir un nuevo invariante

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - \frac{1}{c^2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) = -\frac{ds^2}{c^2} \quad (2.43)$$

denominado *tiempo propio* que es siempre positivo para intervalos tipo tiempo. La invarianza de este intervalo particular resulta obvia de la última expresión, dado que  $ds^2$  y  $c$  lo son. Como la velocidad de una partícula tiene componentes

$$\vec{u} = \left( \frac{d\vec{x}}{dt}, \frac{d\vec{y}}{dt}, \frac{d\vec{z}}{dt} \right)$$

tenemos que

$$d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)} dt. \quad (2.44)$$

Claramente  $\tau$  es el tiempo medido por un reloj que sigue el movimiento de la partícula y por eso se lo llama tiempo propio. Cuando se lo multiplica por  $c$ , puede verse también como una medida de la longitud de la línea de universo que describe la partícula en su

movimiento. Con la introducción del tiempo propio en la descripción del movimiento de una partícula, conviene reemplazar la trayectoria (2.42) por la línea de universo

$$x_\mu = x_\mu(\tau) \quad ; \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (2.45)$$

Esta expresión está adaptada a la descripción covariante que discutiremos posteriormente.

### 2.1.7. Problemas

- 1. Demostrar explícitamente que dos transformaciones sucesivas de Lorentz en la misma dirección conmutan y que son equivalentes a una sola transformación de Lorentz con velocidad

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2 / c^2}.$$

Este es un modo alternativo de obtener la ley de adición de velocidades para el caso en que ellas son paralelas.

- 2. Demostrar explícitamente que dos transformaciones sucesivas de Lorentz a ángulos rectos ( $v_1$  en la dirección  $x$ ,  $v_2$  en la dirección  $y$ ) no conmutan. Demostrar además que en cualquier orden en que son aplicadas, el resultado no es el mismo al de una simple transformación con  $\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j}$ . Dar una o más razones simples de la necesidad de este resultado en el marco de la relatividad especial. [JA,11,2]
- 1. Encontrar la forma de la ecuación de onda en un sistema  $S$  si tiene su forma estándar en el sistema  $S'$  y los dos sistemas coordenados están relacionados por una transformación de Galileo.
- 2. Demostrar explícitamente que la forma de la ecuación de onda es la misma en el sistema  $S$  y en el sistema  $S'$ , si las coordenadas están relacionadas por una transformación de Lorentz. [JA,11,3]
- Un sistema de coordenadas  $S'$  se mueve con velocidad  $v$  relativa a otro sistema  $S$ . En  $S'$ , una partícula tiene una velocidad  $u'$  y una aceleración  $a'$ . Encontrar la ley de la transformación de Lorentz para aceleraciones dando las expresiones para las componentes de aceleración paralela y perpendicular a  $v$  en el sistema  $S$ . [JA,11,4]

## 2.2. GRUPO DE LORENTZ

En la sección anterior presentamos los postulados básicos de la teoría de la relatividad y los requisitos de invarianza que deben satisfacer las leyes que describen los procesos físicos. De acuerdo con el primer postulado de la relatividad, las ecuaciones representativas de un dado proceso físico deben mantener la misma forma en cualquier sistema inercial, en cuyo caso se las denomina *covariantes*. A fin de garantizar esta condición, las diferentes cantidades físicas involucradas en las ecuaciones deberán transformarse adecuadamente, acompañando los cambios de coordenadas espaciales y tiempo. Ya hemos visto este proceso en acción al discutir las transformaciones de Lorentz, cuando impusimos la invarianza del elemento de línea o intervalo.

A fin de comenzar el examen de este problema, repasamos brevemente el cálculo tensorial en el espacio tetradimensional o de Minkowski.

Previamente es importante destacar que en el tratamiento en cuatro dimensiones, hemos introducido las coordenadas temporales  $x_4 = ict$  y  $x_0 = ct$ . La primera elección condujo a

$$ds^2 = \sum_{\mu=1}^4 dx_{\mu}^2 \quad (2.46)$$

como expresión de la distancia invariante tetradimensional. La segunda variante, que evita la unidad imaginaria  $i$ , no permite una expresión simple como la anterior para  $ds^2$ , a menos de introducir una *métrica* que distinga las coordenadas espaciales de la temporal. Como veremos en seguida, este punto está directamente ligado al carácter covariante y contravariante de las magnitudes tensoriales. La versión en términos de  $x_0$ , que parecería más complicada, admite sin embargo una extensión simple a espacios tetradimensionales curvos, como los requeridos por la relatividad general.

### 2.2.1. Tensores

Este tema, al ser fundamentalmente matemático, podría estar relegado a un Apéndice. Sin embargo, lo desarrollaremos aquí por haberlo considerado de real importancia para ayudar a la comprensión de los «aspectos formales» de la teoría electromagnética.

#### a) *Covariantes y contravariantes*

Retomemos las transformaciones de Lorentz (2.18) pero expresadas, esta vez, en una notación más apropiada para el cálculo tensorial

$$x'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^3 a_{\beta}^{\alpha} x^{\beta}. \quad (2.47)$$

La expresión de la transformación inversa será entonces

$$x^{\beta} = \sum_{\alpha=0}^3 b_{\alpha}^{\beta} x'^{\alpha}, \quad (2.48)$$

donde  $a_{\beta}^{\alpha}$  y  $b_{\alpha}^{\beta}$  deben satisfacer

$$\sum_{\gamma=0}^3 a_{\gamma}^{\alpha} b_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha}. \quad (2.49)$$

Ambas matrices  $\{a_{\beta}^{\alpha}\}$  y  $\{b_{\alpha}^{\beta}\}$  son inversas una de la otra. El símbolo  $\delta_{\beta}^{\alpha}$  representa la *delta de Kronecker* que vale 1 si  $\alpha = \beta$  y cero en caso contrario.

Ahora bien, se define como *tetrasector contravariante* a todo objeto de cuatro componentes que, bajo la transformación del sistema de coordenadas (ecuación (2.47)), se transforma como

$$V'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^3 a_{\beta}^{\alpha} V^{\beta}. \quad (2.50)$$

La posición superior del índice (supraíndice) indica precisamente el carácter contravariante. Es posible introducir otro cuadrivector que se transforme con la transformación inversa dada en la ecuación (2.48), esto es

$$V'_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^3 b_{\alpha}^{\beta} V_{\beta} \quad (2.51)$$

y que se denomina *tetrasector covariante*. El subíndice indica tal carácter.

Existen otras cantidades físicas que se transforman como productos múltiples de las matrices  $\{a_{\beta}^{\alpha}\}$  y  $\{b_{\alpha}^{\beta}\}$  y que, para su identificación, precisan un mayor número de índices. Tales cantidades se denominan en general *tensores*.

El número de índices necesarios para definir completamente un tensor determina el *rango*  $r$  del tensor. Un tensor de rango  $r$  tiene  $4^r$  componentes. El número cuatro indica la dimensión del espacio donde está definido, el espacio de Minkowski en este caso. Los escalares y los tetrasectores son también tensores, de rango 0 y 1 respectivamente. Para a tensores con rango mayor que 1, es posible diferenciar tres categorías, de acuerdo a sus correspondientes leyes de transformación, a saber:

1. Tensores contravariantes

$$T'^{\alpha\beta\cdots\gamma} = \sum_{\epsilon=0}^3 \sum_{\theta=0}^3 \cdots \sum_{\omega=0}^3 a_{\epsilon}^{\alpha} a_{\theta}^{\beta} \cdots a_{\omega}^{\gamma} T^{\epsilon\theta\cdots\omega}$$

2. Tensores covariantes

$$T'_{\alpha\beta\cdots\gamma} = \sum_{\epsilon=0}^3 \sum_{\theta=0}^3 \cdots \sum_{\omega=0}^3 b_{\alpha}^{\epsilon} b_{\beta}^{\theta} \cdots b_{\gamma}^{\omega} T_{\epsilon\theta\cdots\omega}$$

3. Tensores mixtos

$$T'^{\alpha\cdots\gamma}_{\delta\cdots\nu} = \sum_{\epsilon=0}^3 \cdots \sum_{\theta=0}^3 \sum_{\omega=0}^3 \cdots \sum_{\sigma=0}^3 a_{\epsilon}^{\alpha} \cdots a_{\theta}^{\gamma} b_{\delta}^{\omega} \cdots b_{\nu}^{\sigma} T^{\epsilon\cdots\theta}_{\omega\cdots\sigma}$$

Introducimos ahora algunas reglas para operar con tensores tales como la suma, el producto y la contracción.

La *suma* sólo está definida para tensores del mismo rango y con igual número de supraíndices y subíndices. Por ejemplo

$$S_{\alpha}^{\beta} = T_{\alpha}^{\beta} + V_{\alpha}^{\beta}.$$

Frente a transformaciones de Lorentz, resulta

$$S'_{\alpha}{}^{\beta} = T_{\alpha}{}^{\prime\beta} + V_{\alpha}{}^{\prime\beta} = \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 a_{\gamma}^{\beta} b_{\alpha}^{\delta} (T_{\delta}^{\gamma} + V_{\delta}^{\gamma}) = \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 a_{\gamma}^{\beta} b_{\alpha}^{\delta} S_{\delta}^{\gamma}$$

manteniendo las características de un tensor mixto. Si bien éste es sólo un ejemplo, es fácil imaginar que la conclusión es válida para tensores con un número arbitrario de índices.

El *producto* de tensores da como resultado un nuevo tensor cuyo número de supraíndices y subíndices es, respectivamente, la suma del número de supraíndices y subíndices de los tensores que lo componen. Para comprobar esta aseveración procedemos, como en el análisis anterior de la suma, con un caso particular representativo del caso general. Sea

$$S_{\alpha}^{\beta\gamma} = T_{\alpha}^{\beta} V^{\gamma},$$

cuya transformación inducida por su definición será

$$S_{\alpha}^{\prime\beta\gamma} = \sum_{\delta=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 b_{\alpha}^{\delta} a_{\eta}^{\beta} a_{\lambda}^{\gamma} T_{\delta}^{\eta} V^{\lambda} = \sum_{\delta=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 b_{\alpha}^{\delta} a_{\eta}^{\beta} a_{\lambda}^{\gamma} S_{\delta}^{\eta\lambda}.$$

Vemos allí que se satisfacen las reglas de transformación tensorial.

La *contracción* es el proceso por el cual un tensor de rango  $r$  da lugar a un tensor de rango  $r - 2$ . Esto se realiza fijando un supraíndice igual a un subíndice y sumando todos los valores posibles. Por ejemplo

$$\sum_{\alpha=0}^3 T_{\alpha}^{\alpha\beta} = T^{\beta}.$$

Para comprobar que la última igualdad es correcta, efectuamos una transformación del tensor contraído

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^{\prime\alpha\beta} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\eta=0}^3 \sum_{\sigma=0}^3 \sum_{\xi=0}^3 a_{\sigma}^{\alpha} a_{\xi}^{\beta} b_{\alpha}^{\eta} T_{\eta}^{\sigma\xi}.$$

La ecuación (2.49) nos permite efectuar la suma sobre  $\alpha$ , con el resultado  $\delta_{\sigma}^{\eta}$  y a su vez permite realizar otra suma para obtener

$$\sum_{\alpha=0}^3 T^{\prime\alpha\beta} = \sum_{\xi=0}^3 a_{\xi}^{\beta} \sum_{\eta=0}^3 T_{\eta}^{\eta\xi}$$

mostrando que se transforma de la manera apropiada.

En particular, si se trata de un tensor de rango 2, la contracción de sus dos índices define la *traza* del mismo. Esto es

$$Tr \{T_{\nu}^{\mu}\} = \sum_{\mu=0}^3 T_{\mu}^{\mu}.$$

De la discusión anterior podemos fácilmente concluir que la contracción entre un cuadvivector covariante con uno contravariante produce un escalar

$$\sum_{\alpha=0}^3 T_{\alpha} V^{\alpha} = \text{escalar de Lorentz.}$$

Nos interesa también referirnos a las propiedades de simetría de los tensores con respecto a sus índices. Si las componentes de un tensor covariante (contravariante) de rango  $r \geq 2$  están relacionadas por las siguientes condiciones

$$T^{\alpha \dots \mu \dots \nu \dots \beta} = \pm T^{\alpha \dots \nu \dots \mu \dots \beta}$$

$$(T_{\alpha \dots \mu \dots \nu \dots \beta} = \pm T_{\alpha \dots \nu \dots \mu \dots \beta})$$

decimos que el tensor es *simétrico* con respecto al par de índices  $\mu \nu$ , si el signo del miembro derecho es (+) o *antisimétrico* si es (-). Los tensores de interés en la Física son (casi siempre) o simétricos o antisimétricos. Estas simetrías imponen restricciones en cuanto al número de elementos necesarios para su determinación. Por ejemplo, un tensor de rango 2 simétrico sólo necesita seis elementos para su determinación, mientras que para determinar uno antisimétrico es suficiente con 3 elementos. En general, un tensor de segundo rango puede siempre descomponerse en una parte simétrica y otra antisimétrica.

Es importante hacer notar que las simetrías mencionadas permanecen invariantes frente a transformaciones de Lorentz. Es decir, las características del tensor no se modifican frente al cambio de sistema de coordenadas.

Además, es fácil mostrar que la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico siempre es nula. Es decir,

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 S^{\alpha \dots \mu \dots \nu \dots \beta} A_{\delta \dots \mu \dots \nu \dots \gamma} = 0$$

si  $S$  es simétrico y  $A$  antisimétrico en el par de índices  $\mu, \nu$  contraídos.

### b) Tensor métrico

Retomemos la expresión (2.41) para el intervalo

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2.$$

Teniendo en cuenta que  $dx^\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 0$ ) es un tetravector contravariante, podemos reescribir el intervalo como

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.52)$$

donde

$$g_{\mu\nu} = 0 \text{ si } \mu \neq \nu; \quad g_{ij} = \delta_{ij}; \quad g_{00} = -1. \quad (2.53)$$

Como  $ds^2$  es una magnitud invariante y  $dx^\mu$  es un cuadvivector, resulta, a partir de lo discutido previamente, que  $g_{\mu\nu}$  es un tensor de segundo rango simétrico. Este tensor particular se denomina *tensor métrico*.

Este mismo resultado puede ser reobtenido haciendo uso explícito de la invarianza de  $ds^2$ . En efecto, en lugar de escribir el intervalo en función de las variables no

primadas, como en (2.52), podemos hacerlo en términos de las primadas y usar la ley de transformación correspondiente para obtener

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\xi=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 g_{\mu\nu} a_{\xi}^{\mu} a_{\gamma}^{\nu} dx^{\xi} dx^{\gamma}.$$

Comparando estas expresiones surge de inmediato la ley de transformación del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ,

$$g_{\mu\nu} = \sum_{\xi=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 a_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\gamma} g_{\xi\gamma}. \quad (2.54)$$

La fórmula anterior ilustra otro aspecto significativo del tensor métrico:  $g_{\mu\nu}$  no cambia al pasar de un sistema de referencia a otro. Esta propiedad brinda otra manera de expresar la condición de invarianza de  $ds^2$ .

Por otra parte, el invariante  $ds^2$  puede verse como el «cuadrado del módulo» del tetravector  $dx^{\mu}$  a pesar de no ser positivo. Esta posibilidad indica cómo extender la definición de producto escalar a los cuadrivectores. Dados los tetravectores  $T$  y  $V$ , se llama producto escalar al número que se obtiene de la siguiente operación:

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} T^{\mu} V^{\nu} = T^1 V^1 + T^2 V^2 + T^3 V^3 - T^0 V^0. \quad (2.55)$$

Con ayuda del tensor métrico podemos construir las componentes de un tensor covariante, a partir de las componentes de un tensor contravariante, ya que el producto escalar se puede escribir

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 T^{\mu} (g_{\mu\nu} V^{\nu}) = \sum_{\mu=0}^3 T^{\mu} V_{\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 (T^{\mu} g_{\mu\nu}) V^{\nu} = \sum_{\nu=0}^3 T_{\nu} V^{\nu}.$$

Notemos que también es posible construir el tensor métrico contravariante  $g^{\mu\nu}$ , que no es más que el tensor inverso de  $g_{\mu\nu}$ , es decir,

$$\sum_{\xi=0}^3 g_{\mu\xi} g^{\xi\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}, \quad (2.56)$$

donde  $\delta_{\mu}^{\nu}$  es el símbolo de Kronecker, un tensor mixto, diagonal, cuyos elementos son iguales a la unidad en todos los sistemas de coordenadas.

Por otra parte, las componentes numéricas del tensor métrico contravariante coinciden con las del tensor métrico covariante y sus valores son los presentados en la ecuación (2.53).



Disponemos entonces de un procedimiento para *bajar y subir* índices de tensores, cambiando contravariaciones en covariaciones, y viceversa, con sólo aplicar el tensor métrico o su inversa. Una consecuencia inmediata de la ecuación (2.54) resulta al contraer ambos miembros de la ecuación con  $g^{\alpha\nu}$ ,

$$\sum_{\nu=0}^3 g^{\alpha\nu} g_{\mu\nu} = \sum_{\nu=0}^3 g^{\alpha\nu} \sum_{\xi=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 g_{\xi\gamma} a_{\mu}^{\xi} a_{\nu}^{\gamma},$$

que, haciendo uso de la ecuación (2.56), podemos escribir

$$\delta_{\mu}^{\alpha} = \sum_{\xi=0}^3 \left( \sum_{\nu=0}^3 g^{\alpha\nu} \sum_{\gamma=0}^3 g_{\xi\gamma} a_{\nu}^{\gamma} \right) a_{\mu}^{\xi}.$$

Comparando con (2.49), obtenemos los elementos de la matriz para las transformaciones de los cuadrivectores covariantes

$$b_{\xi}^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 g^{\alpha\nu} g_{\xi\gamma} a_{\nu}^{\gamma}$$

a partir de los elementos de matriz para las transformaciones de los cuadrivectores contravariantes.

#### d) Tensor de Levi-Civita

Con este nombre se conoce al tensor de rango  $r = 4$ , contravariante y totalmente antisimétrico en todos los pares de índices. Está definido por

$$\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ es una permutación par de } (0123) \\ -1 & \text{si } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ es una permutación impar de } (0123) \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de los índices.} \end{cases}$$

Probaremos que el tensor así definido es independiente del sistema de referencia elegido. Es decir, los valores de las componentes del tensor de Levi-Civita son los mismos para cualquier sistema. Observemos que el determinante de la matriz de transformación  $a_{\alpha}^{\beta}$  introducida en la ecuación (2.47), por ser una matriz de  $4 \times 4$ , está dado por

$$\det(a_{\alpha}^{\beta}) = \det(a) = |a_{\alpha}^{\beta}| = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^1 a_{\beta}^2 a_{\gamma}^3 a_{\delta}^0. \quad (2.57)$$

Un intercambio de los índices 1 y 2 significa entonces una permutación de las correspondientes columnas del determinante y por consiguiente un cambio de signo en su valor. Examinemos por otro lado la suma

$$c^{\mu\nu\lambda\rho} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} a_{\gamma}^{\lambda} a_{\delta}^{\rho}. \quad (2.58)$$

Si aquí los índices  $(\mu\nu\lambda\rho)$ , toman los valores  $(1, 2, 3, 0)$ , respectivamente, vemos que  $c^{\mu\nu\lambda\rho}$  se reduce al determinante dado en (2.57). Por otra parte, si los índices  $\mu\nu\lambda\rho$  toman valores que no están en el orden  $1, 2, 3, 0$ , se pueden intercambiar columnas de modo de llevar nuevamente a la forma dada en (2.57). Si fue necesario mover un número par de columnas,  $c^{\mu\nu\lambda\rho}$  se reducirá de nuevo exactamente al determinante. Si por el contrario, el número de permutaciones resulta impar, aparecerá un signo  $(-)$  al comparar. Finalmente, si dos de los índices toman valores idénticos, dos columnas del determinante serán idénticas y por lo tanto se anulará. Concluimos entonces que

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} \det(a) = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} a_{\gamma}^{\lambda} a_{\delta}^{\rho} \quad (2.59)$$

de modo que sólo resta conocer el valor del determinante.

A partir de la ecuación (2.54) se puede obtener de inmediato

$$\det^2(a) = 1,$$

es decir,

$$\det(a) = \pm 1.$$

Esta última expresión muestra que las transformaciones de Lorentz se pueden clasificar en dos categorías según sea el signo del determinante en cuestión. Restringimos el análisis al caso en que el valor del determinante es  $(+1)$ . Este caso corresponde a las llamadas transformaciones *propias* de Lorentz. El estudio del otro caso lo postergamos para más adelante. Finalmente, la ecuación (2.59) se reduce a

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} a_{\gamma}^{\lambda} a_{\delta}^{\rho},$$

que muestra la transformación de un tensor contravariante de cuarto rango, totalmente antisimétrico en todos los pares de índices. Digamos también que es fácil construir la versión covariante de este tensor. Sólo hace falta usar el tensor métrico para bajar los índices. Tenemos así

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\lambda=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} g_{\gamma\lambda} g_{\delta\rho} \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho}.$$

Haciendo uso de la ecuación (2.53) que define al tensor métrico, se ve fácilmente que los elementos numéricos del tensor covariante tienen los mismos valores que los del tensor contravariante pero cambiados de signo.

### Tensor cero

Así se denomina a un tensor de cualquier rango con todas sus componentes nulas. Es obvio que el tensor cero, o tensor nulo, es un invariante de Lorentz.

### 2.2.2. Campos tensoriales

Se llama *campo* a todo «objeto» físico función de las coordenadas espaciales y del tiempo. Por lo tanto, *campos tensoriales* son aquellos «objetos» físicos que además de ser funciones del espacio-tiempo tienen propiedades bien definidas frente a las transformaciones de Lorentz. Es decir, en un punto definido del espacio-tiempo se comportan como un cierto tensor de algún rango dado. Analizamos estas consideraciones con un poco más de detalle.

#### a) Campos escalares

Una función  $\varphi(x)$  se denomina un *campo escalar* o campo tensorial de rango cero, si su valor en un dado punto  $P$  del espacio de Minkowski es el mismo para todos los sistemas inerciales de referencia. Supongamos entonces que dos observadores, en los sistemas  $S$  y  $S'$ , indican las coordenadas de  $P$  con  $x^\mu$  y  $x'^\mu$ , respectivamente, y describen a la cantidad medida mediante los campos escalares  $\varphi$  y  $\varphi'$ . Entonces, para que el campo sea efectivamente un escalar frente a transformaciones de Lorentz es necesario que se satisfaga la condición

$$\varphi'(x'^\mu) = \varphi(x^\mu). \quad (2.60)$$

En general,  $\varphi'$  será una función de  $x'^\mu$  distinta de lo que es  $\varphi$  como función de  $x^\mu$ . Es decir, la función escalar  $\varphi(x^\mu)$  no es en general una función invariante de forma. La invariancia de forma funcional sólo puede presentarse si  $\varphi$  es una función del intervalo  $s$ .

#### b) Campos vectoriales

Un *campo vectorial contravariante* definido en un punto  $P$ , es una función tensorial que satisface la siguiente ley de transformación

$$A'^\beta(x'^\mu) = \sum_{\rho=0}^3 a_\rho^\beta A^\rho(x^\mu). \quad (2.61)$$

Es decir, la correspondiente a un cuadvectores contravariante en el punto  $P$  del espacio-tiempo cuando es visto por dos observadores inerciales cualesquiera. Por otra parte, un *campo vectorial covariante* verifica la ley de transformación

$$A'_\beta(x'_\mu) = \sum_{\rho=0}^3 b_\beta^\rho A_\rho(x_\mu), \quad (2.62)$$

que es la de un tetravector covariante en el punto  $P$ .

Podemos construir campos vectoriales contravariantes o covariantes, a partir de un campo escalar, con sólo calcular la derivada de la función escalar con respecto a componentes contravariantes o covariantes del cuadrivector posición. Tomemos por ejemplo el caso contravariante. Derivamos la ecuación (2.60) y tenemos

$$\frac{\partial \varphi'(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial \varphi(x^{\mu})}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial \varphi(x^{\beta})}{\partial x^{\beta}} b_{\mu}^{\beta}, \quad (2.63)$$

comparando las ecuaciones (2.62) y (2.63) concluimos que el campo vectorial

$$\frac{\partial \varphi(x^{\mu})}{\partial x^{\beta}}$$

se transforma covariantemente. Este tetravector es llamado *gradiente* del campo  $\varphi$ , en analogía con el cálculo vectorial tridimensional. Más aún, el operador,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}}$$

se transforma como un tetravector covariante, es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^3 b_{\mu}^{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\beta}}.$$

De forma enteramente análoga, se prueba que el operador

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}$$

se comporta como un tetravector contravariante.

Exploramos otras analogías posibles con el cálculo vectorial, para inspirarnos en la construcción de los operadores correspondientes a la divergencia y al rotor en el espacio cuatridimensional. La *tetradivergencia* de un campo vectorial contravariante (2.61) se define por

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial A^{\mu}(x^{\beta})}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} - \frac{\partial A^0}{\partial x^0}, \quad (2.64)$$

que es obviamente un escalar o invariante de Lorentz, ya que resulta de la contracción de dos objetos que se transforman como cuadrivectores.

Si ahora consideramos al campo vectorial  $A^{\mu}$  que surge de

$$A^{\mu}(x^{\beta}) = \frac{\partial \varphi(x^{\beta})}{\partial x_{\mu}}$$

y reemplazamos en la ecuación (2.64), resulta que

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 g^{\mu\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu} \partial x^{\gamma}} \varphi$$

es un invariante, de modo que el operador

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\gamma=0}^3 g^{\mu\gamma} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\gamma} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \square^2 \quad (2.65)$$

es un invariante, que se denomina *D'Alambertiano* y no es más que el laplaciano en el espacio de Minkowski.

### c) Campos tensoriales en general

Un *campo tensorial* verifica la ley de transformación

$$T_{\nu \dots \delta}^{\mu \dots \gamma}(x') = \sum_{\beta=0}^3 \dots \sum_{\eta=0}^3 \dots \sum_{\chi=0}^3 \dots \sum_{\omega=0}^3 a_{\beta}^{\mu} \dots a_{\eta}^{\gamma} \dots b_{\nu}^{\chi} \dots b_{\delta}^{\omega} T_{\chi \dots \omega}^{\beta \dots \eta}(x).$$

Claramente, los campos vectoriales discutidos anteriormente son casos particulares de esta definición general cuando el rango del tensor es 1. Observemos que en general si un índice contravariante se hace igual a uno covariante, el campo tensorial reduce su rango en 2. Además, campos tensoriales del mismo rango pueden ser sumados algebraicamente.

Un caso particular de campos tensoriales de rango superior lo representa la derivada de un campo vectorial. En efecto, si partimos de la ecuación (2.62) y derivamos, resulta

$$\frac{\partial A'_{\beta}(x^{\mu})}{\partial x'^{\gamma}} = \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 b_{\beta}^{\rho} \frac{\partial A_{\rho}(x^{\mu})}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\gamma}} = \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\delta=0}^3 b_{\beta}^{\rho} b_{\gamma}^{\delta} \frac{\partial A_{\rho}(x^{\mu})}{\partial x^{\delta}},$$

estructura que satisface la regla de transformación de un campo tensorial de rango 2. La regla general es que la derivación de un campo tensorial de un dado rango da lugar a campos tensoriales de rango un grado superior, mientras que la contracción lo disminuye en dos.

Habíamos visto que todo tensor de rango 2 puede descomponerse en la suma de su parte simétrica y su parte antisimétrica. Si consideramos la componente antisimétrica, es decir,

$$F_{\beta\gamma} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial A_{\gamma}}{\partial x^{\beta}},$$

obtenemos un objeto que se puede identificar con las componentes del *rotor* en cuatro dimensiones. La antisimetría bajo el intercambio de  $\beta$  por  $\gamma$  es evidente.

### Convención de suma de Einstein

En general es conveniente usar la llamada convención de suma de Einstein: siempre que en una expresión aparecen índices repetidos, se entiende que debe sumarse sobre cada índice reiterado entre 0 y 3, aun si el signo de sumatoria no está explícitamente indicado. En otras palabras,

$$\text{por } x_{\mu} x^{\mu} \text{ debe entenderse } \sum_{\mu=0}^3 x_{\mu} x^{\mu}.$$

En las expresiones anteriores y en muchas de las que siguen, hemos decidido mantener los signos de sumatoria al solo efecto de evitar cualquier confusión, a pesar de haber sobrecargado la escritura.

### 2.2.3. Teoría de grupos y transformaciones de Lorentz

Las ecuaciones de movimiento de un sistema físico son, en general, covariantes con respecto a un cierto conjunto de transformaciones. Como consecuencia, los observables físicos tienen propiedades particularmente simples con respecto a estas transformaciones. La *Teoría de Grupos* ofrece un método que permite extraer las consecuencias que surgen de la existencia de *simetrías* ligadas a aquellas transformaciones. El objetivo de esta sección es mostrar que las transformaciones de Lorentz que hemos venido analizando se relacionan con una de las simetrías que tiene mayores consecuencias en la física contemporánea. El cálculo tensorial desarrollado anteriormente es una herramienta clave para el análisis de estas transformaciones de simetría.

#### a) Definición de grupo

Un conjunto de elementos  $\{g\} \equiv g_1, g_2, \dots$  entre los cuales está definida una ley de composición, a ser especificada en cada caso, que indicamos  $(g_1 \cdot g_2)$  y que llamaremos en general multiplicación, forma *grupo* si:

1. El resultado de la multiplicación de dos elementos cualesquiera del grupo también pertenece al conjunto. Esto es,

$$\text{si } g_i \in G \text{ y } g_j \in G \text{ entonces } g_i \cdot g_j \in G.$$

2. Uno de los elementos del conjunto es el elemento unidad  $I$ . Esto es,

$$I \cdot g_i = g_i \cdot I = g_i \text{ para todo } g_i \in G.$$

3. A cada uno de los elementos  $g_i$  le corresponde un elemento inverso,  $g_i^{-1}$ , que también pertenece al conjunto. Esto es,

$$g_i \cdot g_i^{-1} = I = g_i^{-1} \cdot g_i.$$

4. La multiplicación es asociativa.

#### b) Clasificación de grupos

El número de elementos del grupo es llamado *orden* del grupo. Consecuentemente los grupos pueden clasificarse en dos grandes categorías:

*Grupos finitos*: el grupo es de orden finito, tiene un conjunto finito de elementos. Ejemplo: los cuatro números complejos  $1, -1, i, -i$  con la multiplicación ordinaria como ley de composición.

**Grupos infinitos:** el grupo tiene orden infinito, es un conjunto de infinitos elementos. Ejemplo: Los números enteros más el cero  $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$  con la suma como ley de composición.

Si la ley de composición del grupo es conmutativa ( $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$ ), éste se llama grupo *conmutativo* o *abeliano*. Los casos anteriores son ejemplos de este tipo de grupos. En caso contrario, los grupos se denominan *no abelianos*. Los grupos de matrices con la multiplicación matricial como ley de composición son ejemplos evidentes de este tipo de grupos.

Los *grupos de Lie* constituyen otro conjunto de mucha importancia en la Física. Un grupo de Lie se caracteriza, en particular, por poseer un conjunto infinito de elementos que no son numerables sino que dependen en forma continua de un conjunto de parámetros. Por ejemplo las matrices de  $n \times n$  dependen de  $n^2$  parámetros (los elementos de matriz). En el caso, importante, en que la matriz tiene determinante de valor unitario, dependerá de  $(n^2 - 1)$  parámetros. Variando en forma continua y con valores reales a estos  $n^2 - 1$  parámetros, se obtienen todos los elementos del grupo  $SL(n, R)$ .

Un conjunto  $H$  de elementos del grupo  $G$  constituye un *subgrupo* si es un grupo y todos sus elementos pertenecen a  $G$ .

### c) Representación de un grupo

Una representación de un grupo  $G$  es una correspondencia que asocia a cada elemento  $g$  del grupo una matriz  $D(g)$  definida en un espacio vectorial  $V$ . Esta correspondencia debe ser establecida de tal forma que garantice que:

1. A la identidad  $I$  en  $G$  le corresponde la matriz unidad en el espacio vectorial  $V$ .
2. Al producto  $g_1 \cdot g_2$  en  $G$  le corresponde la matriz  $D(g_1)D(g_2)$  en  $V$ .

Es decir, una representación del grupo  $G$  es una correspondencia

$$g \rightarrow D(g) : \text{matriz en un espacio vectorial } V$$

que respeta la ley de multiplicación del grupo en el sentido de que si a  $g_1$  le corresponde  $D(g_1)$  y a  $g_2$  le corresponde  $D(g_2)$ , entonces a  $g_1 \cdot g_2$  le corresponde  $D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1)D(g_2)$  y además  $D(I) = I$ , la matriz identidad. Mas aún, a  $g^{-1}$  le corresponde la matriz inversa  $D^{-1}(g)$ . En efecto, por definición  $g \cdot g^{-1} = I$  y como la representación preserva la ley de composición se obtiene

$$D(g)D(g^{-1}) = I \Rightarrow D(g^{-1}) = D^{-1}(g).$$

En principio entonces, a varios elementos del grupo les podría corresponder la misma matriz de representación en  $V$ : la correspondencia es un *homeomorfismo*.

En otras palabras, representar un grupo abstracto  $G$  significa hallar un grupo de matrices en un espacio vectorial  $V$ , homeomorfo a  $G$ . El espacio vectorial  $V$  es llamado *espacio de representaciones*. Consecuentemente, la dimensión del espacio de representaciones es llamada *dimensión* de la representación. La representación se denomina *fiel* si surge de un *isomorfismo*, es decir, si para todos los elementos del grupo

existe una correspondencia uno a uno, o biunívoca, con los elementos del espacio de representaciones. Por lo tanto, el problema central de la teoría de las representaciones de grupos es encontrar en qué espacios vectoriales es posible hallar una representación de un dado grupo  $G$ . En particular, determinar cuál será la dimensionalidad de esos espacios vectoriales y calcular explícitamente las matrices  $D(g)$  correspondientes a cada  $g$  de  $G$ .

Puede ocurrir que el grupo de partida  $G$  sea un grupo de matrices. En este caso el grupo se representa a sí mismo. Ciertamente también existen otras matrices de distinta dimensionalidad que representan, en el sentido indicado antes, al grupo de matrices original.

#### **d) Grupo de Lorentz restringido**

Recordemos que la transformación de Lorentz más general entre dos sistemas de coordenadas en movimiento relativo uniforme da lugar al sistema lineal de ecuaciones

$$x'^{\mu} = L_{\nu}^{\mu} x^{\nu} \quad ; \quad x^{\mu} \equiv (x^1, x^2, x^3, x^0) \quad (2.66)$$

que, por razones de simplicidad, escribimos en forma matricial como

$$x' = L x. \quad (2.67)$$

Notemos que, para facilitar la lectura de la notación compacta, indicamos con  $L_{\nu}^{\mu}$  a los elementos de matriz de la transformación de Lorentz que previamente notamos con la letra  $a$ .

Recordemos que la condición de invarianza de la forma cuadrática  $x^{\mu} x_{\mu}$  hace que las transformaciones de Lorentz satisfagan

$$\sum_{\mu, \rho}^3 L_{\nu}^{\mu} g_{\mu\rho} L_{\sigma}^{\rho} = g_{\nu\sigma}, \quad (2.68)$$

que puede ser escrita en forma matricial como

$$L^T g L = g \quad (2.69)$$

con  $(L^T)_{\mu}^{\nu} = L_{\nu}^{\mu}$  la matriz transpuesta y

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.70)$$

En resumen, una transformación de Lorentz puede representarse por una matriz real de  $4 \times 4$  que satisface la condición (2.69). El conjunto de estas matrices junto con las reglas usuales de multiplicación de matrices tiene las siguientes propiedades:

1. El producto de dos transformaciones de Lorentz  $L_1$  y  $L_2$  es una transformación de Lorentz: el producto  $L_1 L_2$  satisface la ecuación (2.69)

$$(L_1 L_2)^T g (L_1 L_2) = L_2^T L_1^T g L_1 L_2$$



y como  $L_1$  y  $L_2$  son transformaciones de Lorentz, esta ecuación se reduce a

$$(L_1 L_2)^T g (L_1 L_2) = L_2^T g L_2 = g$$

2. La identidad  $I$  es una transformación de Lorentz

$$I^T g I = g.$$

3. Cada transformación de Lorentz posee una inversa. Si ambos miembros de la ecuación (2.69) se multiplican por  $g$ , se obtiene

$$g L^T g L = g^2 = I,$$

de manera que la inversa de  $L$  es  $g L^T g$ . Se verifica de inmediato que la inversa es efectivamente una transformación de Lorentz

$$(g L^T g)^T g (g L^T g) = g L g g g L^T g = g L g L^T g = g L L^{-1} = g.$$

4. La multiplicación de transformaciones de Lorentz es asociativa, ya que es una propiedad general de la multiplicación de matrices. En efecto, si  $L_1$ ,  $L_2$  y  $L_3$  son transformaciones de Lorentz, luego

$$(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3).$$

Estas propiedades de las transformaciones de Lorentz garantizan que ellas forman un grupo que se denomina *grupo de Lorentz restringido*.

Las transformaciones de Lorentz se pueden dividir en forma natural en cuatro subconjuntos. Los mismos resultan de los valores posibles del determinante y de la componente  $L_0^0$  de las matrices  $L$  que las definen. De la propiedad (2.69) se obtiene

$$\det(L) = \pm 1,$$

resultado que hemos comentado anteriormente. Por lo tanto, el conjunto de matrices de Lorentz se divide en:

- Transformaciones de Lorentz *propias*, si el determinante vale  $+1$
- Transformaciones de Lorentz *impropias*, si el determinante vale  $-1$

Además, de la ecuación (2.69) tenemos que

$$L_0^\mu g_{\mu\rho} L_0^\rho = -1, \quad (2.71)$$

es decir,

$$(L_0^0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (L_0^i)^2, \quad (2.72)$$

que a su vez implica que

$$L_0^0 \geq 1 \quad \text{ó} \quad L_0^0 \leq -1. \quad (2.73)$$

Luego, el grupo admite otra subdivisión, en acuerdo con el signo de  $L_0^0$ , de la siguiente forma

- Transformaciones *ortocronas*, si  $L_0^0 \geq 1$
- Transformaciones *antiortocronas*, si  $L_0^0 \leq -1$ .

El nombre de las primeras se debe a que bajo su acción el signo de la componente temporal de los vectores no cambia. En efecto, debido a la desigualdad de Schwarz

$$\sum_{k=1}^3 (L_k^0 x^k)^2 \leq \sum_{k=1}^3 (L_k^0)^2 \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 \quad (2.74)$$

a partir de la ecuación (2.72) tenemos que

$$\left( \sum_{k=1}^3 L_k^0 x^k \right)^2 \leq \left( (L_0^0)^2 - 1 \right) \sum_{k=1}^3 (x^k)^2 < (L_0^0)^2 (x^0)^2.$$

La última desigualdad es válida, ya que el vector es tipo tiempo. Luego

$$|L_0^0 x^0| > |L_k^0 x^k|,$$

resultado que prueba que la característica del cuadrivector  $x_\mu$  no se ve modificada frente a una transformación ortocrona arbitraria.

El subconjunto de transformaciones de Lorentz tales que  $\det(L) = +1$  y además  $L_0^0 \geq 1$ , se llama grupo de *Lorentz restringido*. Este es un grupo, ya que, al ser el determinante unitario, la matriz unidad pertenece al subconjunto. Por otra parte, ya que cualquier elemento del grupo puede ser alcanzado por deformaciones continuas de la unidad, se trata de un grupo continuo.

Las transformaciones de Lorentz, siendo matrices de  $4 \times 4$ , requerirían en principio 16 parámetros para su determinación. Sin embargo, recordemos que la ecuación (2.49) impone 10 relaciones vinculares entre sus elementos, de modo que restan sólo 6 parámetros independientes. El espacio de estos parámetros se denomina precisamente *espacio de parámetros* del grupo.

Los otros subconjuntos del grupo de Lorentz pueden obtenerse agregando, al grupo restringido, las siguientes transformaciones:

- Inversión espacial

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} ; x_0 \rightarrow x_0$$

definida por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Inversión temporal

$$\vec{x} \rightarrow \vec{x} ; x_0 \rightarrow -x_0$$

definida por

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Inversión espacio temporal

$$\vec{x} \rightarrow -\vec{x} ; x_0 \rightarrow -x_0$$

definida por

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Concluimos entonces que cualquier transformación de Lorentz tal que  $\det(L) = -1$  y que  $L_0^0 > 1$  se puede escribir como  $P \cdot L'$ , donde  $L'$  es una matriz del grupo de Lorentz restringido. De manera enteramente análoga se tratan los otros sectores definidos por  $\det(L) = -1$  con  $L_0^0 < -1$  y  $\det(L) = -1$  con  $L_0^0 > 1$ . En este caso usando, en lugar de  $P$ , las matrices  $T$  y  $PT$ , respectivamente. Notemos que estos subconjuntos de transformaciones particulares, las que no pertenecen al grupo restringido, son disjuntos y por lo tanto no están continuamente conectados.

Finalmente debemos comentar que las transformaciones  $P$  y  $T$  a las que nos hemos referido están ligadas a las llamadas simetrías discretas y juegan un papel central en la descripción de las interacciones fundamentales. En particular, remarquemos que las interacciones débiles, responsables de las desintegraciones beta de los núcleos atómicos, violan la simetría de inversión espacial.

### e) Representaciones del grupo de Lorentz restringido

Antes de entrar de lleno a discutir las representaciones tensoriales del grupo de Lorentz, es conveniente extenderse sobre algunos conceptos del espacio de representaciones. Supongamos tener un espacio vectorial  $V$  de dimensión  $n$  donde está definida una representación  $D(g)$  del grupo  $G$ , y sea  $V_1$  un subespacio de  $V$  de dimensión  $n_1$ . Si para todo vector  $f \in V_1$  y todo  $g \in G$ , el vector  $D(g)f \in V_1$ , entonces  $V_1$  se llama un *subespacio invariante* de  $V$ . Por lo tanto, si identificamos a  $V_1$  con las  $n_1$  primeras componentes de  $V$ , las matrices  $D(g)$  tendrán la forma

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

Cuando el espacio  $V$  admite un subespacio invariante no trivial  $V_1$  (diferente de 0 y de  $V$ ), la representación  $D(g)$  se llama *reducible*. Todas las matrices  $D(g)$  son entonces de la forma ejemplificada arriba, representables en bloques con un bloque no diagonal idénticamente nulo.

Una representación  $D(g)$  en un espacio vectorial  $V$  se llama *irreducible*, si el espacio  $V$  no admite ningún subespacio invariante.

En ciertos casos importantes, el complemento de  $V_1$ , que llamamos  $V_1^c$ , es también un subespacio invariante y la matriz  $D(g)$  es la *suma directa* de dos matrices  $A(g)$  y  $C(g)$  que actúan en los espacios  $V_1$  y  $V_1^c$ , respectivamente, es decir,

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & C(g) \end{pmatrix} = A(g) \oplus C(g).$$

Puede suceder que los dos subespacios vectoriales  $V_1$  y  $V_1^c$  sean aún reducibles. En ese caso, se podría recomenzar hasta llegar a una forma totalmente reducida del tipo

$$D(g) = \begin{pmatrix} D^1(g) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D^2(g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D^k(g) \end{pmatrix}.$$

Entonces se dice que la representación original está *completamente reducida* y descompuesta en una suma directa de representaciones irreducibles

$$D(g) = D^1(g) \oplus D^2(g) \oplus \dots \oplus D^k(g).$$

Las partes irreducibles de  $D(g)$  tienen, en general, diferentes dimensiones, pero hay casos en los que dos o más representaciones irreducibles pueden tener la misma dimensión. Digamos también que no toda representación reducible es completamente reducible. Existen teoremas que indican cuándo una representación es reducible, pero su análisis detallado excede los límites que nos impusimos en este resumen.

Ahora veamos cómo se pueden construir representaciones de mayor dimensionalidad a partir de una dada. Este método, de gran importancia en aplicaciones físicas, se conoce con el nombre de *producto de representaciones* o *producto de Kronecker*.

Sea  $D^n(g)$  una representación irreducible  $n$ -dimensional en un espacio de vectores  $x$ , y  $D^m(g)$  sea otra representación,  $m$ -dimensional en este caso, en un espacio vectorial  $y$ . A partir de

$$x'_\mu = \sum_{\nu=1}^n [D^n(g)]_\mu^\nu x_\nu$$

$$y'_\alpha = \sum_{\beta}^m [D^m(g)]_\alpha^\beta y_\beta$$

y por multiplicación, tenemos

$$x'_\mu y'_\alpha = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\beta}^m [D^n(g)]_\mu^\nu [D^m(g)]_\alpha^\beta x_\nu y_\beta. \tag{2.75}$$

En consecuencia, podemos considerar a las cantidades  $(x_\nu y_\beta)$  como las componentes de un vector en el *espacio producto*  $(nm)$ -dimensional. La ecuación (2.75) asocia una transformación en este espacio con cada elemento  $g$  del grupo  $G$

$$x'_\mu y'_\alpha = \sum_{\nu\beta} [D^{n \otimes m}(g)]_{\mu\alpha}^{\nu\beta} x_\nu y_\beta,$$

donde

$$[D^{n \otimes m}(g)]_{\mu\alpha}^{\nu\beta} = [D^n(g)]_{\mu}^{\nu} [D^m(g)]_{\alpha}^{\beta} = [D^n(g) \otimes D^m(g)]_{\mu+\alpha}^{\nu+\beta} \quad (2.76)$$

define el producto directo o producto de Kronecker de las matrices  $[D^n(g)]_{\mu}^{\nu}$  y  $[D^m(g)]_{\alpha}^{\beta}$ .

Las matrices de dimensión  $nm$  forman una representación del grupo  $G$ , esto es

$$\begin{aligned} [D^{n \otimes m}(g_1 \cdot g_2)]_{\mu\alpha}^{\nu\beta} &= [D^n(g_1 \cdot g_2)]_{\mu}^{\nu} [D^m(g_1 \cdot g_2)]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \sum_{\sigma} [D^n(g_1)]_{\mu}^{\sigma} [D^n(g_2)]_{\sigma}^{\nu} \sum_{\tau} [D^m(g_1)]_{\alpha}^{\tau} [D^m(g_2)]_{\tau}^{\beta} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\tau} [D^n(g_1)]_{\mu}^{\sigma} [D^m(g_1)]_{\alpha}^{\tau} [D^n(g_2)]_{\sigma}^{\nu} [D^m(g_2)]_{\tau}^{\beta} \\ &= \sum_{\sigma} \sum_{\tau} [D^{n \otimes m}(g_1)]_{\mu\alpha}^{\sigma\tau} [D^{n \otimes m}(g_2)]_{\sigma\tau}^{\nu\beta}, \end{aligned}$$

es decir,

$$[D^{n \otimes m}(g_1 \cdot g_2)]_{\mu\alpha}^{\nu\beta} = [D^{n \otimes m}(g_1)]_{\mu\alpha}^{\sigma\tau} [D^{n \otimes m}(g_2)]_{\sigma\tau}^{\nu\beta}.$$

Particularizamos ahora la discusión anterior al caso del grupo de Lorentz restringido. Hemos visto en la expresión (2.62) que la transformación de un campo vectorial covariante tiene la misma forma que una de las transformaciones que definen el grupo de Lorentz (2.66). Podemos concluir entonces que los campos vectoriales forman una base de representación del grupo de Lorentz de dimensión cuatro. A su vez, los elementos de matriz  $a_{\beta}^{\alpha}$  definen la representación de dimensión cuatro.

Un campo tensorial covariante general de rango dos está caracterizado por la transformación

$$T_{\mu\nu} = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} a_{\mu}^{\alpha} a_{\nu}^{\beta} T_{\alpha\beta}$$

transformándose como el producto de coordenadas (2.75), esto es, a través del producto directo de dos representaciones de dimensión cuatro. Por lo tanto, se concluye que los campos tensoriales de rango dos forman base del espacio de representaciones de 16 dimensiones del grupo de Lorentz. Las representaciones son sencillamente el producto directo de las matrices de elementos  $a_{\beta}^{\alpha}$ , caso particular de la ecuación (2.76), anteriormente discutida.

Podemos agregar que los campos escalares definidos por la ecuación (2.60) forman la base de representación de dimensión 1. Resulta entonces que, en general, los campos tensoriales de rango  $n$  constituyen bases de representación de más alto orden; siendo las representaciones los  $n$ -productos directos de las matrices con elementos  $a_{\beta}^{\alpha}$ .

Recordamos finalmente que, aparte de las representaciones escalares y vectoriales, todas las otras representaciones tensoriales obtenidas en la manera que se indicó son reducibles en el sentido indicado en el comienzo de esta sección. Para corroborar esta afirmación, nos concentraremos en el caso de los campos tensoriales de rango dos. Como ya discutimos, todo tensor de rango dos puede ser descompuesto en un tensor simétrico y uno antisimétrico. Consecuentemente, la representación de dimensión 16 queda desdoblada en dos subespacios: uno de dimensión 10 y otro de dimensión 6

(todo tensor de rango 2 simétrico tiene 10 componentes independientes y todo antisimétrico de la misma dimensionalidad, sólo 6). Más aún, puede demostrarse que los dos subespacios son invariantes.

Estas representaciones pueden ser aún reducidas. La parte simétrica puede escribirse como

$$S_{\mu\nu} = (S_{\mu\nu} - \frac{1}{4} s \delta_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} s \delta_{\mu\nu},$$

donde  $s$  es la traza de la matriz  $S_{\mu\nu}$ . Así hemos descompuesto la representación de dimensión 10 en la suma de una representación escalar y una representación tensorial simétrica con traza nula de dimensión 9.

La representación tensorial antisimétrica de dimensión 6 también puede ser reducida. Para ello, introducimos la magnitud

$$T_{\mu\nu}^D = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$$

llamada *tensor dual* del tensor antisimétrico  $T_{\alpha\beta}$ , siendo él también antisimétrico. En general, cualquier tensor antisimétrico se puede escribir como

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\mu\nu}^D) + \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\mu\nu}^D) = D_{\mu\nu} + A_{\mu\nu}, \quad (2.77)$$

donde  $D_{\mu\nu}$  y  $A_{\mu\nu}$  son tensores antisimétricos que satisfacen las siguientes condiciones

$$D_{\mu\nu}^D = D_{\mu\nu}$$

$$A_{\mu\nu}^D = -A_{\mu\nu}.$$

Tales tensores antisimétricos son llamados *autoduales* y *antiautoduales*, respectivamente. Es fácil ver que para su determinación sólo se necesitan 3 elementos. Como resultado, hemos descompuesto la representación antisimétrica de dimensión 6 en dos de dimensión 3 cada una.

En resumen, digamos que la representación tensorial de rango 2 puede ser completamente reducida a una suma directa de una representación tensorial antisimétrica autodual, una antisimétrica antiautodual, una simétrica con traza nula y una representación escalar.

Siguiendo este camino es posible construir representaciones tensoriales superiores si hiciera falta.

#### 2.2.4. Problemas

- Demostrar que la tetradivergencia de un tensor de segundo rango es un tetravector. [EY,12,1]
- Demostrar que la suma de los componentes diagonales de un tensor de segundo rango es un invariante. [EY,12,2]
- Si  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{E}'$ ,  $\vec{B}'$  constituyen un campo electromagnético  $\vec{B}$  medido en dos sistemas de referencia en movimiento relativo uniforme, demostrar que las cantidades  $E^2 - B^2$  y  $\vec{E} \cdot \vec{B}$  son invariantes. [EY,12,5]

- Sobre el teorema de adición para dos velocidades diferentemente dirigidas. Probar la fórmula de Einstein

$$\beta^2 = \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + 2\beta_1\beta_2 \cos \alpha - \beta_1^2\beta_2^2 \sin^2 \alpha}{(1 + \beta_1\beta_2 \cos \alpha)^2} \quad (2.78)$$

usando transformaciones de Lorentz. Notar que el problema puede ser formulado de la siguiente manera: Sea un sistema  $(x_1, t_1)$  que se mueve respecto de otro  $(x, t)$  con velocidad  $\beta_1 c$  a lo largo del eje  $x$ . En el sistema  $(x_1, t_1)$ , un punto  $P$  se mueve con una velocidad  $\beta_2 c$  que hace un ángulo  $\alpha$  con respecto al eje  $x_1$ . ¿Cuál es la velocidad resultante del punto  $P$  cuando se la mide en el sistema  $(x, t)$ ? [SO,III,2]

### 2.3. FORMULACIÓN COVARIANTE DE LA ELECTRODINÁMICA

Trabajaremos las ecuaciones que describen los fenómenos electromagnéticos y mecánicos de modo de expresarlas en forma covariante. De este modo aprenderemos cómo deben transformarse los campos eléctricos y magnéticos de manera de lograr expresiones covariantes de las ecuaciones de Maxwell. Además surgirán las condiciones necesarias para una formulación relativista de la Mecánica de Newton.

#### 2.3.1. Tetravector densidad de corriente

Recordemos que el objetivo de esta sección es escribir las ecuaciones de Maxwell en forma tensorial, tanto en el vacío como en presencia de partículas cargadas en movimiento. Comenzamos con la ecuación de continuidad, que si bien no es una ecuación de Maxwell propiamente dicha, es una consecuencia directa de ellas. Para comenzar la discusión, definamos las cantidades

$$J^0 = c \rho ; (J^1, J^2, J^3) \equiv \vec{J}, \quad (2.79)$$

donde  $\vec{J}$  es el (tri)vector densidad de corriente. La mencionada ecuación de continuidad toma entonces la forma

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J^\mu}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.80)$$

que sugiere ser leída como la divergencia de un tetravector (ver ecuación (2.64)) igualada al tensor cero. El tetravector de componentes (2.79) se denomina *tetravector densidad de corriente* o simplemente la *corriente* en el marco relativista. Por supuesto que la interpretación requiere que las cantidades que pretendemos identificar con las componentes del tetravector indicado arriba, se transformen adecuadamente. Para implementar la prueba en cuestión, nos concentramos en el estudio de partículas cargadas. Consideramos un sistema de  $N$  partículas, ubicadas en las posiciones  $\vec{x}_n(t)$  y con cargas  $q_n$  respectivamente. La densidad de carga queda definida entonces por la expresión

$$\rho(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)), \quad (2.81)$$

mientras que el vector densidad de corriente puede escribirse como

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{d\vec{x}_n(t)}{dt}. \quad (2.82)$$

Recordando que  $x^0 = ct$ , las dos expresiones anteriores pueden ser unificadas mediante

$$J^\mu(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N q_n \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\mu(t)}{dt}, \quad (2.83)$$

que, como es fácil verificar, satisface la ecuación de continuidad (2.80). Para continuar la demostración de que  $J^\mu(\vec{x}, t)$  es un campo vectorial contravariante, haremos uso de una parametrización invariante de la trayectoria en función del tiempo propio  $\tau$ , o sea,  $x_n^\mu = x_n^\mu(\tau)$ . Con este fin escribimos la ecuación (2.83) en la forma

$$J^\mu(\vec{x}, t) = \int dt' \sum_{n=1}^N q_n \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\mu(t')}{dt'}, \quad (2.84)$$

donde se ha introducido una delta de Dirac extra para la componente temporal y de allí la integral en esta variable. La cancelación evidente de  $dt'$  permite escribir en su reemplazo la forma invariante  $d\tau$ . La ecuación toma entonces la forma

$$J^\mu(\vec{x}, t) = \int d\tau \sum_{n=1}^N q_n \delta^4(x - x_n(\tau)) \frac{dx_n^\mu(\tau)}{d\tau}.$$

En esta expresión aparece  $\delta^4(x - x_n(\tau))$ , que es un escalar de Lorentz, y también  $dx_n^\mu(\tau)$ , que es obviamente un tetravector. Concluimos entonces que  $J^\mu(\vec{x}, t)$  se comporta efectivamente como un tetravector frente a transformaciones de Lorentz, siempre y cuando la *carga eléctrica* de las partículas sea un *invariante*.

Es interesante señalar que esta propiedad puede ser generalizada para cualquier corriente que satisfaga la ley de conservación, es decir, la ecuación de continuidad (2.80). La carga total está definida por

$$Q = \int d^3x J^0(x) \quad (2.85)$$

y se puede probar entonces que esta magnitud no sólo es independiente del tiempo sino que es invariante frente a transformaciones de Lorentz. En el caso de partículas puntuales, que acabamos de tratar, coincide con las expresiones anteriores.

Con el propósito de demostrar la independencia de  $Q$  con el tiempo, calculemos su derivada temporal

$$\frac{dQ}{dt} = c \int d^3x \frac{\partial J^0(x)}{\partial x^0} \quad (2.86)$$

haciendo uso ahora de la ecuación de continuidad (2.80) y del teorema de Gauss tenemos

$$\frac{dQ}{dt} = c \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(\vec{x}) = 0 \quad (2.87)$$



siempre que  $\vec{j}(\vec{x}) \rightarrow 0$  cuando  $x \rightarrow \infty$ . Esta ley de conservación, como fue comentado anteriormente, es una consecuencia de las ecuaciones de Maxwell.

En este punto, merece la pena comentar que, a diferencia de las leyes de conservación tratadas hasta aquí, también pueden presentarse cantidades que se conservan sin relación directa con las ecuaciones de movimiento. Se trata de cantidades de origen topológico, es decir, que dependen del comportamiento de los campos en los bordes y son, en cierto sentido, independientes del mecanismo dinámico.

Ahora probaremos que la carga  $Q$  es un escalar de Lorentz. A este fin introducimos primero la función de Heaviside o función escalón

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (2.88)$$

y definimos un tetravector tipo tiempo,  $n_\beta$ , a partir de sus componentes

$$n_0 = -1 ; n_1 = n_2 = n_3 = 0. \quad (2.89)$$

Luego, la ecuación (2.85) para la carga se escribe

$$Q = \int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial \theta(n_\beta x^\beta)}{\partial x^\mu}, \quad (2.90)$$

donde se debe recordar que la derivada de una función escalón es una delta de Dirac. Si ahora efectuamos una transformación de Lorentz,  $Q$  cambiará en la medida en que lo hace  $n_\beta$ , es decir, a

$$Q' = \int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial \theta(n'_\beta x^\beta)}{\partial x^\mu} \quad (2.91)$$

con

$$n'_\beta = L^\alpha_\beta n_\alpha.$$

Aquí  $n'_\beta$  mantendrá el carácter de tetravector tipo tiempo, con lo que queda asegurado que la componente temporal nunca se anula. Tomando en cuenta la ecuación de continuidad (2.80), la diferencia de valores de carga para dos observadores en diferentes sistemas de referencia resulta

$$Q' - Q = \int d^4x \frac{\partial}{\partial x^\mu} \{ J^\mu(x) [\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)] \}. \quad (2.92)$$

Haciendo uso del teorema de Gauss en el espacio tetradimensional, puede escribirse

$$Q' - Q = \int d\sigma^\mu J^\mu(x) [\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)], \quad (2.93)$$

donde el elemento arbitrario de superficie tridimensional sumergido en el espacio-tiempo tiene las componentes

$$d\sigma^\mu \equiv \{ dx^0 dx^2 dx^3, dx^0 dx^1 dx^3, dx^0 dx^1 dx^2, dx^1 dx^2 dx^3 \}. \quad (2.94)$$

Ahora bien, al ser  $n'_\beta$  un tetravector tipo tiempo, resulta que

$$[\theta(n'_\beta x^\beta) - \theta(n_\beta x^\beta)] \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow \infty$$

si se mantiene  $\vec{x}$  fijo. Si suponemos además que la corriente  $J^\mu(x)$  se anula cuando  $x \rightarrow \infty$  con  $t$  fijo, la integral sobre la superficie, en la ecuación (2.93), se anula en el límite en que esta superficie crece indefinidamente. Concluimos entonces que  $Q' - Q = 0$  y como consecuencia queda demostrado que la carga eléctrica es un escalar de Lorentz.

Finalmente, es oportuno preguntarse acerca de evidencias experimentales sobre la independencia del valor de la carga eléctrica respecto de su estado de movimiento. Encontramos una respuesta inmediata al verificar que los átomos son neutros y esta neutralidad se mantiene a pesar del estado de movimiento que poseen los electrones.

### 2.3.2. Tensor de campo electromagnético

A fin de hacer explícita la invarianza relativista del electromagnetismo, es importante escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante. Sin embargo, a partir de los campos eléctrico y magnético, trivectores con un total de seis componentes independientes, no puede lograrse este objetivo en forma inmediata. La manera de conseguirlo es unificar el tratamiento de los dos campos vectoriales en un único campo tensorial de segundo rango antisimétrico. Este tipo de tensores, como vimos, poseen justamente seis cantidades independientes. La cuestión es cómo ordenar las componentes de este tensor. Para ello es conveniente escribir las ecuaciones de Maxwell inhomogéneas para los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ , en una notación tetradimensional, de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} \kappa'' c \left( \frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial(E_1)}{\partial x_0} &= \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_1 \\ \kappa'' c \left( -\frac{\partial B_3}{\partial x_2} + \frac{\partial B_1}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial(E_2)}{\partial x_0} &= \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_2 \\ \kappa'' c \left( \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial(E_3)}{\partial x_0} &= \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_3 \\ \frac{\partial(E_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(E_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(E_3)}{\partial x_3} &= \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_0. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Este conjunto de ecuaciones sugiere definir el *tensor de campo electromagnético*,  $F_{\mu\nu}$ , según

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & \kappa'' c B_3 & -\kappa'' c B_2 \\ -E_2 & -\kappa'' c B_3 & 0 & \kappa'' c B_1 \\ -E_3 & \kappa'' c B_2 & -\kappa'' c B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.96)$$

donde los índices tensoriales  $\mu$  y  $\nu$  toman los valores 0, 1, 2, 3. Consecuentemente, las ecuaciones de Maxwell correspondientes se reducen a

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu. \quad (2.97)$$

Es importante destacar que, a partir de las relaciones entre los campos y el tetravector potencial, es inmediato encontrar la relación de este último con el tensor de campo  $F_{\mu\nu}$ , la que resulta

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (2.98)$$

El simple hecho de expresar las ecuaciones de Maxwell en notación tensorial no prueba que el tensor de campo electromagnético tenga las propiedades adecuadas frente a transformaciones de Lorentz. Sin embargo, el miembro derecho de la ecuación (2.97) es proporcional al tetravector corriente introducido en la sección anterior. Por otra parte, sabemos que la tetradivergencia de un tensor de rango 2 es un tetravector, propiedad que muestra que  $F_{\mu\nu}$  es verdaderamente un campo tensorial. Luego la ecuación (2.97) es una expresión covariante para las dos ecuaciones de Maxwell inhomogéneas.

Es importante destacar que las transformaciones tensoriales de los campos darán lugar a predicciones experimentales que podrán ser verificadas y de esa forma confirmar su carácter. Estas evidencias experimentales se relacionan con la radiación de cargas en movimiento acelerado y en particular, cuando se analiza la distribución angular de la energía, asunto que abordaremos en secciones posteriores.

Observemos que la expresión (2.97) es consistente con la ecuación de continuidad. Para comprobarlo, se derivan ambos miembros de la ecuación referida con respecto  $x_\mu$  y se suma, de modo que

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial^2 F_{\mu\nu}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}.$$

Ahora bien, el miembro izquierdo de esta expresión es nulo, ya que se trata de la contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico. Luego, se sigue la conservación de la tetracorrente.

Las ecuaciones de Maxwell homogéneas, esto es

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.99)$$

dan lugar a otra relación entre las derivadas del tensor de campo. En efecto, haciendo uso de su definición explicitada en (2.96), es fácil verificar que aquéllas pueden escribirse como

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + \frac{\partial F_{\sigma\mu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.100)$$

que son, en realidad, cuatro ecuaciones ya que  $\mu, \nu, \sigma$  toman, como siempre, los valores 0, 1, 2, 3. Notemos que todos los índices que allí aparecen deben ser diferentes, ya que si dos de ellos son iguales, resulta una identidad trivial. Así por ejemplo, si  $\mu = \nu$  se tiene

$$\frac{\partial F_{\sigma\nu}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial F_{\nu\sigma}}{\partial x_\nu} = 0,$$

expresión sin contenido, puesto que el tensor de campo es antisimétrico.

Una forma, quizá más elegante y transparente, para explicitar la covarianza de la ecuación (2.100), se logra introduciendo el *tensor dual del campo electromagnético*  $F_{\mu\nu}^D$ , mediante

$$F_{\mu\nu}^D = \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\alpha=0}^3 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (2.101)$$

de modo que la ecuación (2.100) se puede escribir

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}^D}{\partial x_\nu} = 0, \quad (2.102)$$

o también como

$$\sum_{\beta=0}^3 \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial x_\nu} = 0.$$

Para comprobar la equivalencia de esta expresión con la ecuación (2.100), basta con fijar el índice  $\mu = 0$  en la ecuación anterior y recordar las propiedades del tensor de Levi-Civita.

La expresión (2.102) muestra que las ecuaciones de Maxwell homogéneas, o si se quiere (2.100), pueden ser escritas como la tetradivergencia del tensor dual del campo electromagnético y, por ende, en una forma explícitamente covariante. Por otra parte, el hecho que la tetradivergencia del tensor dual tenga como resultado un tensor cero, indica que los campos correspondientes no tienen fuentes. Esta situación se diferencia claramente del caso de la ecuación (2.97), cuyas fuentes son las cargas y las corrientes. Si además hubiesen existido fuentes para el tensor dual, darían lugar a «cargas» y corrientes de origen magnético. Esto hubiese ocurrido si existieran los monopolos magnéticos. Especulaciones teóricas sobre la presencia de monopolos magnéticos fueron introducidas por Dirac, en el intento de dar una explicación a la cuantificación de la carga eléctrica del electrón. Debemos mencionar también que existen teorías de campo relativistas, en el ámbito de la física de las partículas elementales, que incluyen esa posibilidad.

### 2.3.3. Transformaciones de Lorentz de los campos

Como una consecuencia directa de la forma covariante de las ecuaciones de Maxwell que acabamos de presentar, obtendremos las leyes de transformación de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ . En primer lugar, consideraremos la relación que existe entre estos campos, vistos desde dos sistemas de referencia  $S$  y  $S'$ , que se desplazan con velocidad relativa  $\vec{v}$ , digamos a lo largo del eje  $x$ . Este problema está ligado al tipo particular de transformación de Lorentz denominado usualmente *boost*. La forma general de transformación para el tensor de campo tiene la forma

$$F'_{\mu\nu} = a_{\mu}^{\beta} a_{\nu}^{\alpha} F_{\beta\alpha},$$

que puede expresarse en notación matricial como

$$F' = A F A^T. \quad (2.103)$$

Para el caso particular del boost, la matriz  $A$  se reduce a

$$A = \begin{bmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.104)$$

Consecuentemente, el tensor de campo transformado  $F'_{\mu\nu}$ , de acuerdo con (2.103), provee las siguientes relaciones para las componentes de los campos en ambos sistemas

$$\begin{aligned} E'_1 &= E_1 \\ E'_2 &= \gamma(E_2 - \kappa'' c \beta B_3) \\ E'_3 &= \gamma(E_3 + \kappa'' c \beta B_2) \\ B'_1 &= B_1 \\ B'_2 &= \gamma(B_2 + \frac{1}{\kappa'' c} \beta E_3) \\ B'_3 &= \gamma(B_3 - \frac{1}{\kappa'' c} \beta E_2). \end{aligned} \quad (2.105)$$

Es interesante destacar que, como resultado de la transformación de Lorentz, es posible que en un dado sistema exista un solo tipo de campo, eléctrico o magnético, mientras que para un observador en el otro sistema, contribuyen ambos. Este hecho quedará claro a partir del ejemplo que tratamos a continuación.

**Ejemplo simple.** Calculamos los campos electromagnéticos generados en un punto del espacio por una carga puntual en movimiento rectilíneo y uniforme, haciendo uso de las fórmulas de transformación de los campos que acabamos de presentar. Suponemos que la carga puntual de valor  $q$  se encuentra en reposo en el sistema primado y tratemos de evaluar los campos generados por la carga móvil en un punto  $P$  de coordenadas  $(x = 0, y = b, z = 0)$ . Debido a que la carga está en reposo en el origen de coordenadas del sistema primado, en ese sistema sólo existe campo eléctrico. Es decir,

$$\vec{E}' = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \vec{r}' ; \quad \vec{B}' = 0, \quad (2.106)$$

donde  $r'$  es la distancia de la carga al punto de observación  $P$  en el sistema primado. Por otra parte, la misma transformación  $A$  dada en (2.104) establece la conexión entre las coordenadas de ambos sistemas de referencia

$$\begin{aligned} t' &= \gamma t \\ x' &= -\gamma v t \\ y' &= b \\ z' &= 0. \end{aligned} \quad (2.107)$$

A partir de las ecuaciones anteriores es inmediato calcular los campos eléctrico y magnético en el sistema  $S$  como función del tiempo, resultando

$$E_1 = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q \gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_2 = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q \gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}; \quad E_3 = 0 \quad (2.108)$$

$$B_1 = 0 ; B_2 = 0 ; B_3 = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c} \frac{q \gamma \beta b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.109)$$

En la figura (2.9) se ilustra el comportamiento de las componentes del campo eléctrico.

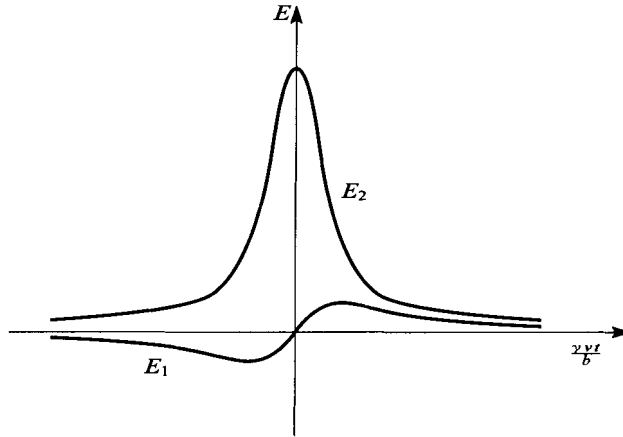


FIGURA 2.9: *Comportamiento del campo eléctrico.*

Notemos que este comportamiento se puede justificar a partir de consideraciones generales. En efecto, cuando la partícula se encuentra suficientemente alejada del punto de observación, las componentes del campo eléctrico tienden a anularse. A su vez, cuando la partícula pasa por la distancia mínima al punto de observación, la componente transversal (dirección de la coordenada  $y$ ) toma su máximo valor y la longitudinal (dirección  $x$ ) se anula.

Como la distancia de la partícula al punto de observación, medida en el sistema  $S$ , es  $x = vt$  y la única escala fija es  $b$ , una distancia grande significa que

$$\frac{x}{b} \gg 1.$$

Luego cuando  $x \rightarrow \infty$  el denominador de la ecuación (2.108) será dominado por el término  $\gamma vt$  y por consiguiente el campo eléctrico se anula.

### ***Propiedades de los campos bajo P y T***

En esta sección es oportuno hacer algunas observaciones sobre la forma del tensor de campo y su tensor dual. De la ecuación (2.96) se desprende que las componentes de los campos eléctrico y magnético se corresponden con valores particulares de los índices  $\mu$  y  $\nu$ . En efecto, las componentes del campo eléctrico aparecen cuando un índice  $\mu$  o  $\nu$  es temporal, mientras que para las componentes del campo magnético los índices son espaciales. La situación inversa ocurre para el tensor dual (2.101), donde el papel de las componentes del campo eléctrico y del magnético queda intercambiado.

Los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  tienen carácter diferente frente a una reflexión espacial (inversión de los tres ejes). El campo eléctrico  $\vec{E}$  pertenece a la familia de los llamados *vectores polares* que cambian de signo frente a esa operación. Un ejemplo de éstos es el vector que une dos puntos en el espacio. La otra categoría de vectores la constituyen los llamados *vectores axiales*, por ejemplo el vector resultante del producto vectorial de dos polares. Éstos no cambian de signo frente a reflexiones espaciales. Algunos ejemplos conocidos de este tipo de vectores son la cupla, el impulso angular y en particular el campo magnético  $\vec{B}$ .

El comentario anterior indica que cabe esperar una posición distinguible de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en el tensor de campo  $F_{\mu\nu}$ , ya que ambos tienen propiedades diferentes frente a las reflexiones. Veamos entonces cómo formalizar la diferenciación mencionada en el contexto del grupo de Lorentz que, como mencionamos, está constituido por el grupo de Lorentz restringido más las transformaciones discretas que incluyen la inversión temporal ( $T$ ), la inversión espacial ( $P$ ) y la combinación de ambas ( $TP$ ). Vamos a discutir brevemente las representaciones ampliadas que incluyan información sobre las simetrías discretas para poder identificar la representación bajo la cual se transforma el tensor de campo. Existen cuatro clases de representaciones tensoriales del grupo de Lorentz:

- Las relacionadas al grupo restringido y en la que los tensores se transforman según

$$T^{\mu\nu\cdots} = a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \cdots T^{\alpha\beta\cdots}$$

y forman la clase 0.

- Las denominadas *pseudotensoriales*, que se subdividen a su vez en
  - clase 3, en la que

$$T^{\mu\nu\cdots} = \det(a) a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \cdots T^{\alpha\beta\cdots},$$

- clase 1 o pseudotensores temporales con

$$T^{\mu\nu\cdots} = \frac{a_0^0}{|a_0^0|} a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \cdots T^{\alpha\beta\cdots}$$

y finalmente

- clase 2 o pseudotensores espaciales, donde

$$T^{\mu\nu\cdots} = \det(a) \frac{a_0^0}{|a_0^0|} a_{\alpha}^{\mu} a_{\beta}^{\nu} \cdots T^{\alpha\beta\cdots}.$$

El rótulo de pseudotensores se debe a que el factor multiplicativo que aparece en las tres expresiones sólo puede tomar el valor  $\pm 1$ . En cuanto a su relación con  $P$ ,  $T$  y  $PT$ , tengamos presente que bajo

	det	$a_0^0$
$P$	-1	+1
$T$	-1	-1
$PT$	+1	-1,

resultando el siguiente factor numérico para las tres clases

	clase 3	clase 2	clase 1
$P$	-1	-1	+1
$T$	-1	+1	-1
$PT$	+1	-1	-1

El tensor de campo electromagnético pertenece a la clase 1 y su tensor dual a la clase 2. Esto fija, en forma única, la manera en que se transforman los campos eléctrico y magnético, frente a  $P$  y  $T$ .

Analizamos la transformación de los campos frente a  $P$ , definida por

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Debido a la clase a la que pertenece,  $F_{\mu\nu}$ , debe transformarse como

$$F_{\mu\nu}' = (+1) p_{\mu\beta} p_{\nu\alpha} F_{\beta\alpha},$$

que en notación matricial se expresa como

$$F' = (+1) P F P^T = P F P,$$

dando lugar a

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & E'_1 & E'_2 & E'_3 \\ -E'_1 & 0 & \kappa'' c B'_3 & -\kappa'' c B'_2 \\ -E'_2 & -\kappa'' c B'_3 & 0 & \kappa'' c B'_1 \\ -E'_3 & \kappa'' c B'_2 & -\kappa'' c B'_1 & 0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & \kappa'' c B_3 & -\kappa'' c B_2 \\ E_2 & -\kappa'' c B_3 & 0 & \kappa'' c B_1 \\ E_3 & \kappa'' c B_2 & -\kappa'' c B_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Concluimos así que, bajo inversiones espaciales

$$x_0 \rightarrow x'_0 = x_0$$

$$x_i \rightarrow x'_i = -x_i$$



los campos electromagnéticos se transforman como

$$B_i \rightarrow B'_i = B_i$$

$$E_i \rightarrow E'_i = -E_i.$$

Es decir, las componentes del campo magnético no cambian, a diferencia de las del campo eléctrico que invierten su signo. Esto señala el carácter de vectores axiales y polares respectivo, que habíamos comentado. Pero esta transformación tiene un significado más profundo. Si nos restringimos a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes, es muy fácil verificar que ellas permanecen invariantes frente a estas transformaciones y constituyen una simetría de las ecuaciones, lo que permite decir que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a reflexiones espaciales. Si ahora incluimos las fuentes, podemos seguir manteniendo esta simetría, a condición que las distribuciones de cargas y corriente se transformen frente a esas reflexiones de la siguiente forma

$$\rho \rightarrow \rho' = \rho$$

$$J_i \rightarrow J'_i = -J_i,$$

lo que implica que el tetravector corriente es un tensor de rango 1 de la clase 1.

Un análisis completamente similar al desarrollado para  $P$ , puede realizarse para  $T$ . Aquí sólo comentaremos los resultados y dejamos los detalles del cálculo como ejercicio.

Las transformaciones de inversión temporal son

$$x_0 \rightarrow x'_0 = -x_0$$

$$x_i \rightarrow x'_i = x_i$$

y los campos electromagnéticos cambian según

$$B_i \rightarrow B'_i = -B_i$$

$$E_i \rightarrow E'_i = E_i.$$

Estas transformaciones dan lugar a una nueva invarianza de las ecuaciones de Maxwell y, por consiguiente, a una nueva simetría: inversión temporal. Toda esta discusión es válida si el tetravector corriente sigue perteneciendo a la clase 1 como en el caso de la simetría de reflexión espacial.

### 2.3.4. El potencial electromagnético

Las Ecuaciones de Maxwell pueden escribirse en forma tensorial de acuerdo a (2.97) y (2.100). Además, el tensor de campo electromagnético, como todo tensor de segundo rango antisimétrico, puede expresarse como

$$F_{\beta\gamma} = \frac{\partial A_\gamma}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\gamma}. \quad (2.110)$$

Donde  $A_\gamma$ , tal como indicamos en la expresión (2.97), es el *tetravector potencial electromagnético*.

Si usamos esta última expresión en las ecuaciones de Maxwell (2.97), podemos construir la ecuación para el potencial electromagnético. En efecto,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} &= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} \right) - \left( \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial x^\nu} \right) A_\mu = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu. \end{aligned} \quad (2.111)$$

Recordemos que el primer paréntesis representa la tetradivergencia del potencial electromagnético y el segundo el D'Alambertiano. Ahora bien, la expresión (2.110) no determina al tetrapotencial en forma biunívoca dado que cualquier transformación de gauge de la forma

$$A_\beta \rightarrow A_\beta + \frac{\partial \phi}{\partial x_\beta}$$

deja invariante el tensor de campo  $F_{\beta\gamma}$  como es fácilmente verificable. Por lo tanto, queda una posible elección del gauge (fijado del gauge como ya ha sido discutido previamente). Si elegimos el gauge de Lorentz

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$$

la ecuación (2.111) se simplifica a

$$\square^2 A_\mu = -\frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu, \quad (2.112)$$

expresión que también ya habíamos encontrado. Sin embargo, es interesante puntualizar que el gauge de Lorentz tiene una característica muy especial desde el punto de vista relativista, dado que se presenta naturalmente en forma covariante. Todo otro gauge rompe explícitamente la covarianza relativista. Aquí no nos extenderemos más en las consideraciones sobre la simetría de gauge, la que retomaremos en la discusión de otros aspectos ligados al tratamiento de la dinámica de la materia acoplada al electromagnetismo.

Un último asunto que comentamos en esta sección se refiere a la solución de la ecuación (2.112) para el caso homogéneo, es decir,

$$\square^2 A_\mu = 0. \quad (2.113)$$

Esta ecuación admite una solución simple de la forma

$$A_\mu = C_\mu e^{i k \cdot x}$$

como es fácil verificar. Aquí  $C_\mu$  es un tetravector constante que toma en cuenta la polarización de la onda.

Es interesante observar que la fase de la onda en esta solución debe ser un escalar de Lorentz y por lo tanto,  $k_\beta$  define el *tetrasector número de onda*, cuya componente temporal es la frecuencia angular y las otras tres son las componentes del vector de onda  $\vec{k}$ . Es decir,

$$k_0 = \omega/c, \quad k_1 = k_x, \quad k_2 = k_y, \quad k_3 = k_z.$$

Vemos entonces que su comportamiento frente a transformaciones de Lorentz muestra que la frecuencia se transforma igual que el tiempo, dando lugar a la ecuación ya obtenida para el efecto Doppler. Además es fácil ver que

$$k_\beta k^\beta = 0$$

de manera de satisfacer la ecuación (2.113) en el espacio transformado de Fourier.

### 2.3.5. Problemas

- La expresión del campo de una carga puntual  $q$  en movimiento es

$$\vec{E} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q(1 - \beta^2)}{r^2 (1 - \beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}} \check{r},$$

donde  $\check{r}$  es el vector de la carga al punto de observación en el sistema no primado (donde la partícula está en reposo) y  $\theta$  es el ángulo entre  $\check{r}$  y el eje  $x$ , medido también en el sistema no primado. Mostrar explícitamente que la ley de Gauss se satisface para una carga en movimiento uniforme. Como consecuencia, demostrar que el flujo del campo en el sistema no primado, a través de una esfera estacionaria en el sistema en reposo, es proporcional a  $q$ . [EY,12,7]

- Verificar que la forma covariante del segundo conjunto de ecuaciones de Maxwell (las homogéneas) es equivalente a que la cuatridivergencia del tensor dual sea nula. [EY,12,8]
- En un sistema de referencia determinado hay campos uniformes estáticos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  ortogonales entre sí. Demostrar que existe un sistema de referencia primado, en movimiento relativo uniforme, para el cual los campos  $\vec{E}'$  y  $\vec{B}'$  son tales que  $\vec{E}' = 0$  ó  $\vec{B}' = 0$ . [EY,12,12]
- En el betatrón, los electrones son inyectados en el plano de simetría entre las piezas polares axialmente simétricas de un electroimán de corriente alterna. El campo magnético los lleva entonces a una órbita circular. La pulsación del campo magnético está acompañada por un campo eléctrico de tipo vórtice que acelera los electrones en su órbita. Existe un radio  $r = r_0$  de la trayectoria que permanece no alterado con la pulsación del campo magnético o con el aumento de la velocidad del electrón. Luego de innumerables revoluciones, los electrones alcanzan una velocidad cercana a la de la luz; se asemejan entonces a los rayos beta de los materiales radiactivos, de allí el nombre «betatrón». Dados la distribución del campo magnético axialmente simétrico  $B(r, t)$  (su componente axial) entre las piezas polares, que decrece monotónicamente hacia afuera y la velocidad tangencial inicial  $v$  de los electrones, se requiere obtener

1. el momento cinético  $mv$  alcanzable por los electrones, su velocidad, masa y energía en  $eV$  (electrón volts).
  2. el radio  $r$  de la órbita de equilibrio.
  3. la frecuencia de revolución al final del período de aceleración y el número total de revoluciones.
  4. la fuerza de reacción de la radiación en este punto. [SO,III,10]
- En su sistema en reposo, un lazo rectangular conductor con lados de longitud  $a$  y  $b$ , descargado, transporta una corriente  $I$ . Cuando se lo observa desde un sistema que se mueve a velocidad  $v$  en una dirección paralela al lado de longitud  $a$ , ¿cuál es la distribución de cargas en el lazo? ¿cuál es su momento dipolar eléctrico en este sistema expresado en términos del momento dipolar magnético en el sistema en reposo? [GP,14,1]
  - Un protón proveniente de radiación cósmica, de energía  $10^{15}$  eV se acerca a la Tierra moviéndose perpendicularmente a un campo magnético de magnitud  $10^{-5}$  Tesla. ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico experimentado en el sistema en el cual el protón está en reposo? [GP,14,2]
  - Dos cargas puntuales se mueven en un sistema  $S$  de modo que una carga lo hace en la dirección  $y$  y cruza el eje  $x$  en el momento en el que la otra, que se mueve en la dirección  $x$ , se encuentra en el origen. Usando las leyes de transformación del campo eléctrico, calcular la fuerza que actúa sobre la primera carga, según un observador en el sistema de la última. ¿Es la fuerza sobre la carga en el origen igual y opuesta? [GP,14,3]
  - Generalizar el resultado del problema anterior para expresar la fuerza entre dos circuitos que transportan corriente estacionaria y constatar que hay acuerdo con la ley de Biot-Savart. [GP,14,4]
  - Un momento magnético clásico puntual, en reposo,  $\vec{\mu}$  da lugar a un potencial vector

$$\vec{A} = \frac{\vec{\mu} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

y a ningún potencial escalar. Demostrar que si el momento magnético se mueve con una velocidad  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ ), entonces existe un momento dipolar eléctrico  $\vec{p}$  asociado con el momento magnético dado por

$$\vec{p} = \frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\mu}.$$

¿Qué se puede decir si  $\vec{v}$  no es pequeña en magnitud comparada con  $c$ ? Demostrar que la energía de interacción entre el dipolo móvil y los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  es la misma que la que se hubiera obtenido mediante el cálculo del campo magnético en el sistema de referencia del momento magnético. [JA,11,9]

- En un cierto sistema de referencia, un campo eléctrico estático uniforme  $E_0$  es paralelo al eje  $x$  y una inducción magnética estática uniforme  $B_0 = 2E_0$  se encuentra en el plano  $(x, y)$ , formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$ . Determinar la velocidad relativa de un sistema de referencia en el cual los campos eléctrico y magnético son paralelos. ¿Cuáles son los campos en ese sistema para  $\theta \ll 1$  y para  $\theta \rightarrow \pi/2$ ? [JA,11,11]
- Un pulso de radiación electromagnética de extensión espacial finita existe en un espacio libre de corriente y carga.
  1. Por medio del teorema de la divergencia en cuatro dimensiones, probar que el impulso electromagnético total y la energía se transforman como las componentes de un tetravector.
  2. Demostrar que para una onda plana este tetravector tiene una «longitud» cero pero que, para otras posibles configuraciones de campo (onda esférica saliente por ejemplo), esto no es cierto. [JA,11,13]
- Mostrar que si  $\vec{E} \perp \vec{B}$  en un sistema  $S$ , entonces  $\vec{E}' \perp \vec{B}'$  en cualquier otro sistema de Lorentz  $S'$ . [MH,13,11]
- Una partícula cargada se mueve en un campo magnético uniforme de modo que su velocidad tiene una componente no nula a lo largo del campo. Mostrar, como resultado de un cálculo relativista, que la partícula desarrolla una trayectoria helicoidal, coincidente con el resultado no relativista. [MH,13,14]

## 2.4. PARTÍCULAS RELATIVISTAS Y CAMPOS

En esta sección discutiremos los campos generados por partículas cargadas que se mueven a velocidades comparables con la velocidad de la luz  $c$ . A ese fin, comenzaremos tratando la dinámica relativista para luego ocuparnos de las leyes de conservación en los sistemas constituidos por partículas y campos electromagnéticos. Finalmente estudiaremos los potenciales de Liénard-Wiechert que permiten la evaluación de los campos de cargas en movimiento en términos de su velocidad en la posición retardada.

### 2.4.1. Mecánica relativista

La mecánica clásica, a diferencia del electromagnetismo, debe ser modificada para ponerla de acuerdo con los postulados de la teoría de la relatividad de Einstein. La nueva mecánica debe ser tal que las ecuaciones se reduzcan a las de Newton, en el límite en que las velocidades en juego sean pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. Notemos que este límite es llamado no-relativista aun cuando las ecuaciones resultantes satisfacen la relatividad galileana.

Para determinar las modificaciones necesarias, mantenemos el principio de expresar las magnitudes físicas en forma tensorial y las leyes físicas en forma covariante, de manera que éstas guarden la misma forma en cualquier sistema de referencia.

Cuando discutimos la construcción del tetravector densidad de corriente de una carga puntual, pasamos naturalmente de una expresión en función de la velocidad de la partícula a una expresión tensorial para la densidad de corriente. Allí apareció la magnitud

$$u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau}, \quad (2.114)$$

que es el *tetravector velocidad*. Para determinar su relación con la velocidad newtoniana, hacemos uso de la relación que vincula  $d\tau$  a  $dt$ , resultando

$$u_\mu = \gamma \frac{dx_\mu}{dt} \quad (2.115)$$

cuyas componentes son

$$u_\mu = \{\gamma c, \gamma \vec{v}\} \quad (2.116)$$

y que explicita la conexión entre la tetravelocidad  $u_\mu$  y del (tri)vector velocidad  $\vec{v}$  de la mecánica no relativista. En el régimen  $v/c \ll 1$ , tenemos que las componentes espaciales de la tetravelocidad  $u_\mu$  se corresponden con las de la velocidad  $\vec{v}$ .

El módulo de la tetravelocidad, a partir de la definición (2.114), resulta

$$\sum_{\alpha=0}^3 u^\alpha u_\alpha = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx_\alpha}{d\tau} = \frac{ds^2}{d\tau^2}$$

que, haciendo uso de la definición de  $d\tau$ , conduce a

$$\sum_{\alpha=0}^3 u^\alpha u_\alpha = -c^2 \quad (2.117)$$

demostrando que la tetravelocidad es de tipo tiempo.

Podemos también definir el *tetraimpulso* de una partícula mediante

$$p_\mu = m_0 u_\mu, \quad (2.118)$$

donde  $m_0$ , la *masa en reposo* de la partícula, es una característica que le es propia y es un invariante de Lorentz. A  $p_\mu$  también se lo suele denominar *tetravector energía-impulso*, por razones que serán evidentes más adelante. Notemos que su módulo verifica la relación

$$m_0^2 = -p^\mu p_\mu / c^2 \quad (2.119)$$

y que las componentes del tetraimpulso son

$$p_\mu = \gamma m_0 \{c, \vec{v}\}.$$

A partir de esta expresión, es evidente que, en el límite de bajas velocidades  $v/c \ll 1$ , las componentes espaciales proveen la correspondencia que esperamos con el régimen no-relativista: el (tri)impulso de la partícula es el producto de su masa por la velocidad. Las componentes espaciales del tetraimpulso son  $\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}$ , mientras que la

componente temporal del impulso es  $p_0 = \gamma m_0 c$ . Veamos ahora el significado físico de esta última componente. Para ello desarrollamos  $p_0$  en el límite de bajas velocidades

$$p_0 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} c = \frac{1}{c} (m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \dots). \quad (2.120)$$

La expresión entre paréntesis tiene dimensiones de energía. El segundo término representa evidentemente la energía cinética de la partícula. Por lo tanto, podemos deducir que el paréntesis representa la energía  $E$  cualquiera sea la velocidad de la partícula. De este modo, la componente temporal del tetraimpulso puede escribirse como

$$p_0 = \frac{E}{c}. \quad (2.121)$$

Además vemos, a partir de la ecuación (2.120), que la mecánica relativista fija un nivel de referencia absoluto para la energía de la partícula: la *energía en reposo*  $m_0 c^2$ . Este hecho la diferencia de la mecánica clásica no-relativista, donde la energía está determinada a menos de una constante aditiva, ya que en este ámbito no hay tal medida absoluta de energía y sólo se puede hablar de diferencias de energía.

A partir de la norma del tetravector impulso (2.119) y teniendo en cuenta que

$$p_\mu = \left\{ \frac{E}{c}, \vec{p} \right\} \quad (2.122)$$

obtenemos la expresión

$$E^2(p) = c^2 p^2 + m_0^2 c^4, \quad (2.123)$$

que brinda la relación entre el impulso de la partícula y su energía. En el caso particular en que la masa en reposo es nula,  $m_0 = 0$ , la relación (2.118) pierde sentido. Sin embargo, si consideramos que los conceptos primarios son la energía  $E$  y el impulso relativista  $\vec{p}$ , en lugar de la trayectoria de la partícula y su velocidad, la ecuación (2.123) tiene sentido en el límite de  $m_0$  nula y la relación entre energía e impulso se escribe

$$E = c p. \quad (2.124)$$

Resulta entonces evidente que no existe el límite no-relativista para partículas con masa en reposo nula. Estas partículas existen en la naturaleza y son precisamente los cuantos del campo electromagnético: los fotones.

Hasta aquí nos hemos concentrado en aspectos cinemáticos. Pasamos ahora a la descripción del movimiento de partículas sometidas a acciones externas. En la mecánica clásica este análisis se realiza a partir de la segunda ley de Newton

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.125)$$

donde  $\vec{F}$  representa las fuerzas externas, funciones dadas de antemano. ¿Cómo se modifica esta ley de movimiento para el caso de partículas relativistas? La generalización inmediata es la denominada ecuación de Minkowski

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = F_\mu, \quad (2.126)$$

donde  $F_\mu$  es el cuadvivector fuerza. Al igual que en la ecuación de Newton, se entiende que este tetravector está dado externamente.

Como  $p_\mu$  satisface la ecuación (2.119), su diferencial respecto al tiempo propio le es ortogonal. Se deduce entonces, a partir de la ecuación (2.126), que

$$\sum_{\mu=0}^3 p^\mu F_\mu = 0. \quad (2.127)$$

Recordando la definición de  $p_\mu$  (2.118), también puede escribirse como

$$\sum_{\mu=0}^3 u^\mu F_\mu = 0. \quad (2.128)$$

De modo que la tetrafuerza es ortogonal al tetravector velocidad. Este vínculo del tetravector fuerza expresado en componentes resulta

$$\gamma \vec{v} \cdot \vec{F} = \gamma c F_0,$$

de manera que

$$F_0 = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c}. \quad (2.129)$$

Una primera consecuencia de esta relación se obtiene reemplazando (2.129) en la componente temporal de la ecuación de la dinámica relativista para una partícula (2.126), dando lugar a

$$\frac{dE}{c d\tau} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{F}}{c}, \quad (2.130)$$

que muestra la consistencia de interpretar a la componente temporal del tetravector energía-impulso como la energía total de la partícula, ya que el miembro izquierdo es proporcional al trabajo por unidad de tiempo realizado por la fuerza externa.

Otra consecuencia de la ecuación (2.129) se relaciona al hecho de que alguna o todas las componentes de  $F_\mu$  son dependientes de la velocidad. Esto sirve de base para construir tetrafuerzas. La forma más simple es elegir a  $F_\mu$  como una combinación lineal de la tetravelocidad  $u_\mu$ , es decir,

$$F_\mu = cte \sum_{\nu=0}^3 K_{\mu\nu} u^\nu. \quad (2.131)$$

La *cte* debe ser invariante de Lorentz, y  $K_{\mu\nu}$  un tensor de segundo rango, de manera de garantizar que  $F_\mu$  se comporte como tetravector frente a transformaciones de Lorentz. El vínculo (2.128) se satisface si

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 K_{\mu\nu} u^\nu u^\mu = 0,$$



de donde se concluye que  $K_{\mu\nu}$  debe ser un tensor antisimétrico, pues el producto  $u^\nu u^\mu$  es simétrico. Se podría identificar a  $K_{\mu\nu}$  con el tensor de campo electromagnético que satisface las condiciones deducidas y también a la constante con  $q/c$ . Para construir  $F_\mu$  en este caso, consideremos sus componentes. Por ejemplo, la primera espacial es

$$F_1 = q\gamma [E_1 + \kappa''(v_2 B_3 - v_3 B_2)]$$

donde hemos utilizado la forma del tensor de campo electromagnético y las componentes del tetravector velocidad. Observemos que, excepto por el factor  $\gamma$ , la expresión anterior para  $F_1$  se corresponde con la primera componente de la fuerza de Lorentz. Resultados similares se obtienen para  $F_2$  y  $F_3$ . Por otro lado, para  $F_0$  encontramos

$$F_0 = \frac{q}{c} \gamma \vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Las componentes anteriores pueden resumirse entonces en

$$F_\mu = q\gamma \left\{ \frac{1}{c} \vec{E} \cdot \vec{v}, [\vec{E} + \kappa''(\vec{v} \wedge \vec{B})] \right\}. \quad (2.132)$$

Vemos así que la parte espacial de la tetrafuerza es proporcional a la fuerza de Lorentz con el factor  $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , que toma en cuenta los efectos relativistas. La parte temporal, que está relacionada a la variación de la energía, sólo recibe contribución del campo eléctrico, la única componente del campo electromagnético que realiza trabajo, también multiplicada por el mismo factor relativista.

El procedimiento que hemos presentado para construir las tetrafuerzas puede generalizarse para incluir formas superiores en las tetravelocidades. En ese caso se requieren tensores de orden superior. Notemos por ejemplo que si fuese el caso de formas cuadráticas en la tetravelocidad:

$$F_\mu = H_{\mu\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$$

haría falta que  $H_{\mu\alpha\beta}$  fuese un tensor de rango tres sobre el que existe gran libertad para su determinación ya que el único vínculo a satisfacer es la ecuación (2.128). De esta manera se pueden construir acoplamientos de la velocidad de la partícula con campos externos escalares, vectoriales y tensoriales.

Otra manera de construir la tetrafuerza, se basa en el uso de las transformaciones de Lorentz. Para ello se recurre al hecho de que la tetrafuerza debe tender, en el límite de bajas velocidades  $v/c \ll 1$ , al valor que estas componentes toman en la mecánica no-relativista. Como ambas obviamente coinciden en el sistema de referencia en reposo con la partícula, desde allí, mediante la transformación de Lorentz apropiada, se pasa al sistema de referencia con velocidad relativa  $\vec{v}$ . De esta manera se construyen las componentes de la tetrafuerza para cualquier estado de movimiento.

Presentamos la formalización de estas ideas en términos generales, para después analizar un ejemplo concreto. Si observamos la ecuación de vínculo (2.129), se concluye

que en el sistema de reposo, donde  $\vec{v} = 0$ , la componente temporal es  $F_0 = 0$  y las componentes espaciales toman el valor  $\vec{F}$  independiente de la velocidad. Este resultado está en acuerdo con la fuerza que aparece en la ecuación de Newton. Como  $F_\mu$  se transforma de la misma manera que las coordenadas, podemos escribir

$$F'_0 = \gamma \left( \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c} \right) = \frac{\vec{F}' \cdot \vec{v}}{c}$$

$$\vec{F}' = \vec{F} + (\gamma - 1) \frac{(\vec{F} \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v}. \quad (2.133)$$

Hemos entonces construido formalmente la tetrafuerza para el caso general. Como aplicación de este procedimiento, vamos a obtener nuevamente el tetravector fuerza para el caso electromagnético. En el sistema en reposo de la partícula cargada  $\vec{F} = q\vec{E}$ , es decir, la partícula es afectada sólo por el campo eléctrico. Por otra parte, para un observador externo, respecto del cual la partícula se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , ella es actuada por la fuerza

$$F'_0 = \gamma \left( \frac{q\vec{E} \cdot \vec{v}}{c} \right) \quad (2.134)$$

$$\vec{F}' = q\vec{E} + (\gamma - 1) \frac{(q\vec{E} \cdot \vec{v})}{v^2} \vec{v}. \quad (2.135)$$

Sin embargo, hasta aquí el cálculo ha sido realizado en forma parcial, ya que la expresión de la fuerza está escrita en términos del campo eléctrico en el sistema de la partícula. Debemos entonces reemplazar este campo, mediante las ecuaciones de transformación (2.105), por los campos vistos en este sistema respecto del cual la partícula se mueve con velocidad  $v$ . Se obtiene así

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}'_{\parallel} \quad ; \quad \vec{E}'_{\perp} = \gamma \left[ \vec{E}'_{\perp} + \kappa'' (\vec{v} \times \vec{B}') \right].$$

A partir de la ecuación (2.135), se tiene entonces

$$\vec{F}' = q\gamma \left[ \vec{E}' + \kappa'' (\vec{v} \wedge \vec{B}') \right], \quad (2.136)$$

donde, para simplificar el cálculo, se ha hecho uso de las siguientes relaciones

$$\vec{E}'_{\parallel} = \frac{1}{v^2} (\vec{E}' \cdot \vec{v}) \vec{v} \quad ; \quad \vec{E}'_{\perp} = \vec{E}' - \vec{E}'_{\parallel}.$$

Comparando la ecuación (2.136) con la componente espacial de la ecuación (2.132), se comprueba la equivalencia de los dos procedimientos seguidos para obtener el tetravector fuerza.

Hasta aquí hemos concentrado el esfuerzo en la extensión relativista de la mecánica de Newton para una única partícula sometida a la acción de fuerzas externas. La formulación covariante de la mecánica de un sistema de partículas es un tanto más complicada, debido a que en el caso general no existe un sistema de referencia en el que todas las partículas estén simultáneamente en reposo. Sin embargo, hay situaciones de valor práctico considerable que justifican algún nivel de discusión del problema aunque evitaremos entrar en un análisis detallado del mismo. En particular, nuestro interés está dirigido a las leyes de conservación que son fundamentalmente útiles en el estudio de las reacciones nucleares o proceso de interacción de partículas elementales. Si bien estos temas se enmarcan en las teorías microscópicas de la materia, donde la teoría de campos, clásica o cuántica, constituye el marco natural para su descripción, estudiaremos las leyes de conservación desde el punto de vista de partículas clásicas. Este ámbito es útil para discutir la cinemática de estas reacciones, sin necesidad de recurrir a una teoría microscópica de la dinámica. En la mecánica Newtoniana, el teorema de conservación del impulso lineal para un sistema de partículas, interactuando solamente a través de fuerzas internas, se puede probar en forma directa, si las fuerzas participantes satisfacen el principio de acción y reacción. Sin embargo, hay fuerzas, como las electromagnéticas, que no verifican esta última ley, aunque a pesar de ello satisfacen el teorema de conservación mencionado. El concepto de acción instantánea a distancia, ligado a la fuerza que ejerce una partícula sobre otra, implícito en la tercera ley de Newton, está fuera de la relatividad ya que la simultaneidad no tiene un carácter absoluto. Por otra parte, en la mecánica relativista es posible tratar sistemas en los cuales las interacciones son de contacto, es decir, ocurren en un punto del espacio-tiempo. En particular esto es válido tanto en los procesos de colisión como en los decaimientos: emisión de un número arbitrario de partículas. En consecuencia, excluimos a las interacciones de largo alcance de nuestras consideraciones. Si las partículas interactúan en un punto del espacio-tiempo, es posible encontrar un sistema de referencia en el cual todas están simultáneamente en reposo. En este sistema de referencia y para el instante en consideración, tenemos que,  $\vec{v} = 0$ , pero  $d\vec{v}/dt \neq 0$ ; luego, como ya vimos, la componente temporal de la tetrafuerza  $F_0$  es nula, mientras que las componentes espaciales de  $\vec{F}$  coincidirán con la fuerza newtoniana. Podemos entonces usar el principio de acción y reacción de la mecánica de Newton para obtener la expresión de la ley de conservación del tetravector energía-impulso

$$\sum_{n=1}^N (p_\mu)_n \quad \text{independiente del tiempo,} \quad (2.137)$$

donde el índice  $n$  se refiere a la partícula y  $N$  es el número total de partículas en la colisión. Esta conservación reúne en una sola expresión la ley de la conservación de la energía y la del impulso relativista del sistema de partículas que estamos considerando. En cualquier reacción, la diferencia de los tetravectores energía-impulso de los estados inicial y final es nula. Esto es válido para cualquier otro sistema de referencia al que se acceda mediante una transformación de Lorentz. Es decir,

$$\sum_{i=1}^n (p_{\mu})_i \Big|_{\text{estados iniciales}} = \sum_{j=1}^m (p_{\mu})_j \Big|_{\text{estados finales}}$$

donde  $i$  y  $j$  son los índices de las partículas y  $n$  y  $m$  el número de partículas en el estado inicial y final, respectivamente. Por lo tanto, esta ecuación es válida en cualquier sistema de referencia si se verifica en uno particular. La ecuación de arriba se expresa en componentes como

$$\sum_{i=1}^n (\vec{p}_i^2 + m_i^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\text{estados iniciales}} = \sum_{j=1}^m (\vec{p}_j^2 + m_j^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \Big|_{\text{estados finales}}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i \Big|_{\text{estados iniciales}} = \sum_{j=1}^m \vec{p}_j \Big|_{\text{estados finales}}$$

La primera es la conservación de la energía y la segunda la conservación del impulso. Estas ecuaciones han sido verificadas con gran precisión en reacciones nucleares y en interacciones entre partículas elementales.

Es interesante hacer notar también el hecho de que la energía será conservada si el impulso lo es. Para ello supongamos que los impulsos son conservados en dos sistemas de referencia relacionados por una transformación de Lorentz

$$\Delta \sum_{k=1}^{n+m} \vec{p}_k = 0 \quad ; \quad \Delta \sum_{k=1}^{n+m} \vec{p}'_k = 0, \quad (2.138)$$

donde  $\Delta$  es el símbolo que indica la diferencia de impulso entre el estado inicial y final de la reacción,  $k$  es el índice de partícula,  $n + m$  es el número total y  $\vec{p}$  y  $\vec{p}'$  son los impulsos en los respectivos sistemas de referencia. Ahora bien, como las combinaciones lineales de tetravectores se transforman exactamente como ellos, tenemos

$$\Delta \sum_{k=1}^{n+m} p_k^i = \sum_{\alpha=0}^3 a_{\alpha}^i \Delta \sum_{k=1}^{n+m} p'^{\alpha}_k,$$

donde el índice  $i$  sólo toma los valores 1 a 3 de las componentes espaciales en la transformación de Lorentz  $a_{\alpha}^{\beta}$ . Si se hace uso de las ecuaciones (2.138), esta última se reduce a

$$0 = a_0^i \Delta \sum_{k=1}^{n+m} p'^0,$$

pero como  $a_0^i \neq 0$ , tenemos que

$$\Delta \sum_{k=1}^{n+m} p'^0 = 0$$

que prueba la conjetura propuesta.

Finalizamos esta sección con un comentario acerca de teorías con potenciales que contienen una no localidad espacial y temporal, una especie de acción a distancia extendida en el espacio-tiempo, pero que preserva la covariancia de la ecuaciones. Esta formulación puede ser reinterpretada en términos de una interacción local entre partículas y campos, tanto escalares como vectoriales. Los campos transportan energía e impulso en su acción de mediadores de la interacción entre las partículas. El paradigma del caso vectorial lo constituye la interacción de partículas cargadas con campos electromagnéticos.

En esta formulación pueden aparecer inconsistencias causadas por la aparición de infinitos originados en la autointeracción de las partículas con el campo que ellas mismas generan. Por el momento postergaremos la presentación y discusión de este formalismo, hasta que hayamos introducido los métodos lagrangianos que proveen la herramienta de análisis apropiada.

En la sección anterior vimos que toda partícula relativista, en cualquier estado mecánico, transporta consigo un tetraimpulso  $p_\mu$ . Luego, siguiendo un procedimiento completamente análogo al que utilizamos para construir el tetravector corriente eléctrica, construiremos el tensor de energía-impulso para un sistema de partículas. Para ello comenzamos definiendo la densidad de energía-impulso, mediante

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha 0}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N c p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \quad (2.139)$$

y la densidad de corriente de energía-impulso como

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha j}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^j}{dt} \quad (2.140)$$

que podemos unificar en una sola ecuación según

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\beta}{dt}. \quad (2.141)$$

La importancia de esta cantidad, al igual que en el caso del tetravector densidad de corriente, surge de reconocer que se trata de un tensor de rango dos. Para corroborarlo, sigamos el procedimiento ya utilizado y escribamos la ecuación (2.141) en la forma

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = \int (c dt') \sum_{n=1}^N p_n^\alpha(t') \delta^4(x - x_n(t')) \frac{dx_n^\beta(t')}{dt'} \quad (2.142)$$

de modo que, pasando a la variable tiempo propio, tenemos

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = \int d\tau' \sum_{n=1}^N p_n^\alpha(\tau') \delta^4(x - x_n(\tau')) \frac{dx_n^\beta(\tau')}{d\tau'}, \quad (2.143)$$

expresión de la que inmediatamente se concluye que  $T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}$  es un tensor: el *tensor energía-impulso mecánico*.

Haciendo uso de las ecuaciones (2.115), (2.118) y (2.122), podemos fácilmente establecer la siguiente relación

$$p^\alpha = \frac{E}{c^2} \frac{dx^\alpha(t)}{dt}, \quad (2.144)$$

que permite reexpresar (2.141) como

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = \sum_{n=1}^N \frac{c^2 p_n^\alpha(t) p_n^\beta(t)}{E_n} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)), \quad (2.145)$$

ecuación que muestra que el tensor energía-impulso es simétrico, esto es

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = T_{\text{mecánico}}^{\beta\alpha}. \quad (2.146)$$

Las componentes del tensor energía-impulso tienen un significado simple, como surge de su definición (2.141). En efecto, a partir de

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} T^{00} & T^{0j} \\ T^{i0} & T^{ij} \end{bmatrix}$$

se tiene

$$T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \text{densidad de energía } \mathcal{E} & \text{corriente de energía } \vec{S}/c \\ \text{corriente de energía } \vec{S}/c & \text{corriente de impulso} \end{bmatrix}, \quad (2.147)$$

donde se usó la simetría del tensor para interpretar los elementos fuera de la diagonal. Por otra parte, sabemos que si la energía de un sistema se conserva, entre la densidad de energía y el vector corriente de energía se debe satisfacer la relación de continuidad,

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{S} = 0, \quad (2.148)$$

que expresada en componentes del tensor energía-impulso se lee

$$\frac{\partial T^{00}}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial T^{0i}}{\partial x_i} = 0$$

y por lo tanto, concluimos que la conservación de energía-impulso implica que

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0. \quad (2.149)$$

A partir de esta forma covariante para la conservación del tensor, calculamos el miembro izquierdo en el caso de un sistema de  $N$  partículas. Así

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial}{\partial x^\beta} \sum_{n=1}^N p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^\beta}{dt}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\partial}{\partial t} [p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))] + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ p_n^\alpha(t) \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \frac{dx_n^i}{dt} \right] \right\} \\
&= \sum_{n=1}^N \left\{ \left[ \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sum_{i=1}^3 p_n^\alpha(t) \frac{\partial \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}{\partial x_n^i} \frac{dx_n^i}{dt} + \sum_{i=1}^3 \left[ p_n^\alpha(t) \frac{\partial \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t))}{\partial x_i} \frac{dx_n^i}{dt} \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Los dos últimos términos se cancelan entre sí de manera que finalmente tenemos

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)), \quad (2.150)$$

que podemos escribir en una forma más ilustrativa

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\alpha(t)}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)).$$

La derivada del tetravector impulso es, por definición (2.126), la tetrafuerza sobre la  $n$ -ésima partícula. En consecuencia, el miembro de la derecha resulta ser la densidad de fuerza, es decir,

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_{n=1}^N F_n^\alpha \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)). \quad (2.151)$$

Vamos a explorar las consecuencias de estos últimos resultados. Si las partículas son libres, entonces  $F_n^\alpha = 0$ , y es evidente que el tensor de energía-impulso se conserva. Por lo tanto

$$\sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0.$$

Si las partículas sufren colisiones locales, como las tratadas en la sección anterior, en puntos de colisión (*p. de c.*), tenemos que

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N \frac{dp_n^\alpha(t)}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_{p. de c.} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_c(t)) \frac{d}{dt} \sum_{(m \in g)} p_m^\alpha(t),$$

donde  $\vec{x}_c(t)$  es la coordenada del punto de colisión al tiempo  $t$  y  $(m \in g)$  indica la suma sobre las partículas que participan de la  $g$ -ésima colisión. Recordemos que habíamos probado que en colisiones de este tipo vale

$$\sum_{n=1}^N (p_\mu)_n \quad \text{independiente del tiempo}$$

y consecuentemente

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = 0,$$

de donde resulta de inmediato la conservación del tensor de energía-impulso.

La situación más interesante ocurre cuando las partículas llevan carga eléctrica y por lo tanto hay fuerzas electromagnéticas en juego. En este caso y de acuerdo con la ecuación (2.131),  $F_n^\alpha$  es

$$F_n^\alpha = \frac{q_n}{c} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} u_{n\beta}.$$

Si reemplazamos esta expresión para la tetrafuerza en la ecuación (2.151), obtenemos

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \sum_{n=1}^N F_n^\alpha \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)) = \sum_{n=1}^N \frac{q_n}{c} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} u_{n\beta} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)),$$

es decir,

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} \sum_{n=1}^N q_n u_{n\beta} \frac{d\tau}{dt} \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_n(t)).$$

Si recurrimos a la definición del tetravector corriente, tenemos que la ecuación anterior se escribe

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{1}{c} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} J_\beta. \quad (2.152)$$

En este caso, el tensor energía-impulso mecánico no se conserva. Su variación temporal se debe a contribuciones de los grados de libertad del campo electromagnético. Para comprobar esta afirmación basta con reemplazar en la ecuación anterior la expresión (2.97), que provee la tetracorriente en términos del tensor de campo,

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 F^{\alpha\beta} \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial F_{\beta\nu}}{\partial x_\nu}. \quad (2.153)$$

Este resultado no debe sorprendernos, ya que la energía y el impulso no sólo residen en el sistema de partículas sino también en el campo electromagnético. La energía mecánica puede convertirse en energía de los campos, y viceversa. Para precisar estos conceptos vamos a hacer algunos manejos algebraicos a partir de la ecuación (2.153). Reescribimos entonces

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu}) - F_{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F^{\alpha\beta} \right].$$

Como  $\beta$  y  $\nu$  son índices de suma, pueden ser intercambiados y escribir en lugar de la expresión de arriba

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu}) - \frac{1}{2} \left( F_{\beta\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} F^{\alpha\beta} + F_{\nu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta} F^{\alpha\nu} \right) \right].$$



Si hacemos uso de la antisimetría del tensor de campo, tenemos que

$$f^\alpha(\vec{x}, t) = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu}) - \frac{1}{2} F_{\beta\nu} \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial}{\partial x_\beta} F^{\nu\alpha} \right) \right].$$

El próximo paso es usar la ecuación (2.100), que permite obtener

$$\begin{aligned} f^\alpha(\vec{x}, t) &= \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \left[ \frac{\partial}{\partial x_\nu} (F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu}) + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (F_{\beta\nu} F^{\beta\nu}) \right] \\ &= \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\nu} T_{\text{electromagnético}}^\alpha{}_\nu, \end{aligned}$$

donde

$$T_{\text{electromagnético}}^\alpha{}_\nu = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \sum_{\beta=0}^3 \left[ F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu} + \frac{1}{4} \delta_\nu^\alpha \sum_{\sigma=0}^3 F_{\beta\sigma} F^{\beta\sigma} \right] \quad (2.154)$$

define al *tensor de energía-impulso electromagnético*. Concluimos entonces que el tensor de energía-impulso total

$$T_{\text{total}}^{\alpha\beta} = T_{\text{mecánico}}^{\alpha\beta} + T_{\text{electromagnético}}^{\alpha\beta}$$

es una cantidad física conservada, es decir,

$$\frac{\partial T_{\text{total}}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0,$$

indicando que tanto los grados de libertad de partícula como los de campo electromagnético comparten energía e impulso, existiendo un intercambio de estas magnitudes entre ellos. En presencia de nuevos campos, estas ideas se pueden generalizar con sólo agregar el tensor de campo correspondiente. De esta manera se satisface el principio de conservación del tensor de energía-impulso del sistema total de campos y partículas. Notemos sin embargo que hasta el momento no tenemos metodología para construir los tensores de energía-impulso. Aquí la idea se desarrolló para el campo electromagnético con un trabajo algebraico pesado que no permite una fácil generalización. Veremos, en próximas secciones, cómo puede implementarse un tratamiento general a partir de métodos lagrangianos. También conectaremos estos tensores con principios más fundamentales como son las simetrías del espacio-tiempo.

Finalmente, vamos a realizar un análisis del tensor de energía-impulso a fin de corroborar que la interpretación de sus diversas componentes es consistente con los análisis previos ligados a la conservación de esas magnitudes. Con este propósito, evaluamos las componentes del tensor de energía-impulso electromagnético, que resultan ser

$$T_{ij} = \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} E_i E_j + \frac{\kappa''}{4\pi\kappa' \mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} \left( \epsilon_0 4\pi\kappa E^2 + \frac{\kappa''}{4\pi\kappa' \mu_0} B^2 \right)$$

$$T_{0k} = T_{k0} = -\frac{\epsilon_0 \kappa'' c}{4\pi\kappa} \left( \vec{E} \wedge \vec{B} \right)_k = \frac{1}{c} \vec{S}$$

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{\epsilon_0}{\kappa} E^2 + \frac{\kappa''}{\kappa' \mu_0} B^2 \right)$$

y pueden relacionarse a la densidad de energía electromagnética  $u_{em}$ , al vector de Poynting  $\vec{S}$  y a las componentes espaciales del tensor de esfuerzo o tensor de Maxwell. El tensor de energía-impulso, simétrico y de traza nula, admite la siguiente representación

$$T = \begin{pmatrix} u_{em} & \frac{1}{c} \vec{S} \\ \frac{1}{c} \vec{S} & T \text{ (tensor de Maxwell)} \end{pmatrix}.$$

Finalmente observamos que, como se demostró en el caso de la conservación de la tetracorriente, resulta que la carga no sólo se conserva, sino que es una magnitud independiente del sistema de referencia (un escalar de Lorentz). También podemos asegurar que si  $T^{\alpha\beta}$  es tal que

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0$$

el tetraimpulso total

$$p^\alpha = \int T^{\alpha 0} d^3x$$

se transforma como un tetravector y es constante en el tiempo. Esta última afirmación se puede probar siguiendo los mismos pasos realizados cuando probamos que la carga es independiente del tiempo, a partir de suponer que los campos se anulan suficientemente rápido de manera que toda contribución de superficie se cancele. La prueba se deja como ejercicio al lector.

#### 2.4.2. Potenciales de Liénard-Wiechert

Luego de haber presentado la mecánica relativista en detalle, estamos en condiciones de construir el tetravector potencial electromagnético generado por una carga en movimiento con velocidad comparable a  $c$ . Este último análisis da lugar a los llamados potenciales de Liénard-Wiechert.

Cuando queremos evaluar el tetravector  $A_\beta$  producido por una carga en movimiento, quedan dos actitudes a seguir: resolver explícitamente las ecuaciones (2.112) o hacer uso explícito de las transformaciones de Lorentz partiendo de la solución conocida en el sistema en reposo de la carga. Seguiremos este segundo camino.

Las componentes de tetravector potencial, en el sistema en que la carga está en reposo, son simplemente

$$A^0(\vec{r}) = \phi = \frac{\kappa q}{\epsilon_0 r} ; \quad \vec{A} = 0.$$

En este sistema de coordenadas, el tetravector velocidad de la partícula tiene componentes

$$u_{rep}^0 = c ; \quad \vec{u}_{rep} = 0,$$

de modo que  $A^\alpha$  puede escribirse en general

$$A^\alpha(\vec{r}) = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} \frac{q}{r} u_{rep}^\alpha, \quad (2.155)$$

donde  $r$  es la distancia entre el punto campo y el punto donde se encuentra la carga en reposo. Elegimos a este último como origen de coordenadas del sistema en reposo. La expresión (2.155) no tiene validez general mientras no expresemos la distancia mencionada en forma covariante. Para ello debemos recordar que los potenciales son retardados, es decir, que la acción provocada por la carga en el punto campo toma un cierto tiempo, de retardo, en alcanzar el punto considerado. En otras palabras, el valor del potencial en un cierto punto y en un cierto instante, está ligado con el estado de la fuente en un instante anterior. El retardo es precisamente el tiempo que la luz (o el campo) tarda en recorrer la distancia que los separa. Consideramos ahora, en el sistema de referencia del observador, el tetravector tipo luz  $s^\alpha = x^\alpha - x_p^\alpha$ , donde  $x$  indica la posición del punto campo mientras que  $x_p$  es la posición donde se encontraba la carga en el instante en que emitió la señal observada:  $t_p = t - \Delta t$ . Por lo tanto, el tetravector  $s^\alpha$  es tal que su parte espacial coincide con el vector que une el punto campo a la posición retardada de la partícula

$$\vec{s} = \vec{x} - \vec{x}_p = \vec{r}$$

y su parte temporal es el «retardo» correspondiente, es decir,

$$s^0 = ct - ct_p = c \Delta t = r.$$

Tendremos entonces evidentemente que

$$\sum_{\alpha=0}^3 s^\alpha s_\alpha = r^2 - c^2 \Delta t^2 = 0, \quad (2.156)$$

ya que la información entre punto campo y punto fuente se propaga a la velocidad de la luz. Calculamos ahora la contracción entre los tetravectores  $u^\alpha$  y  $s^\alpha$ , en un sistema en el que la partícula se mueve con velocidad  $\vec{v}$ , para obtener

$$\sum_{\alpha=0}^3 s^\alpha u_\alpha = \gamma \vec{v} \cdot \vec{r} - c \gamma c(t - t_p) = \gamma \vec{v} \cdot \vec{r} - \gamma cr = \gamma (\vec{v} \cdot \vec{r} - cr). \quad (2.157)$$

Esta expresión, en el sistema en reposo de la partícula, se reduce a

$$\sum_{\alpha=0}^3 s^\alpha u_\alpha \Big|_{\text{sist. en reposo}} = -cr.$$

Volviendo ahora al tetravector potencial (2.155), observamos que en el sistema en reposo se puede escribir

$$A^\alpha = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} q \frac{u^\alpha}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta}. \quad (2.158)$$

El miembro derecho de esta expresión es ciertamente un tetravector. Por lo tanto, si las componentes de  $A^\alpha$  igualan a las de este tetravector en un sistema de referencia particular, entonces ambos tetravectores serán iguales en todo otro sistema. En otras palabras, la expresión anterior tiene validez general.

Podemos separar este tetravector en sus partes espacial y temporal, construyendo así los llamados *potenciales de Liénard-Wiechert*, que son

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{q}{\left(r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}\right)} \quad (2.159)$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^2} \frac{q \vec{v}}{\left(r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}\right)}. \quad (2.160)$$

Debe notarse que estas expresiones son válidas cualquiera sea la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula. Recordemos además que

$$\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}_P(t - \Delta t) \quad (2.161)$$

Para construir los campos a partir del tensor de campo, esto es, a partir de

$$F_{\alpha\beta} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} \quad (2.162)$$

necesitamos las derivadas de  $\sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta$ , es decir,

$$\frac{\partial s^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (x^\beta - x_P^\beta) = \delta_\alpha^\beta - \frac{\partial x_P^\beta}{\partial x^\alpha}. \quad (2.163)$$

La posición de la carga es una función de  $t_P$  y éste, a su vez, por la condición de retardo, de las coordenadas del punto campo. Consecuentemente

$$\frac{\partial x_P^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{dx_P^\beta}{dt_P} \frac{\partial t_P}{\partial x^\alpha}$$

o escrita en función del tiempo propio  $\tau$

$$\frac{\partial x_P^\beta}{\partial x^\alpha} = \frac{dx_P^\beta}{d\tau} \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha} = u^\beta \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha}. \quad (2.164)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.163) se escribe

$$\frac{\partial s^\beta}{\partial x^\alpha} = \delta_\alpha^\beta - u^\beta \frac{\partial \tau}{\partial x^\alpha}. \quad (2.165)$$

Teniendo en cuenta (2.156), concluimos que

$$\sum_{\beta=0}^3 s_\beta \frac{\partial s^\beta}{\partial x^\alpha} = 0,$$

de modo que

$$0 = \sum_{\beta=0}^3 s_{\beta} \frac{\partial s^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = s_{\alpha} - \sum_{\beta=0}^3 s_{\beta} u^{\beta} \frac{\partial \tau}{\partial x^{\alpha}}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \tau}{\partial x^{\alpha}} = \frac{s_{\alpha}}{\sum_{\beta=0}^3 s_{\beta} u^{\beta}}. \quad (2.166)$$

Finalmente entonces, la ecuación (2.163) da lugar a

$$\frac{\partial s^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\beta} - \frac{s_{\alpha} u^{\beta}}{\sum_{\beta=0}^3 s_{\beta} u^{\beta}}. \quad (2.167)$$

Es inmediato verificar que las derivadas del tetravector  $A_{\alpha}$  tienen dos contribuciones diferentes, dependiendo del estado de movimiento de la carga. Entonces, es conveniente escribir el tensor de campo electromagnético como

$$F_{\alpha\beta} = F_{\alpha\beta} \text{ velocidad} + F_{\alpha\beta} \text{ aceleración}. \quad (2.168)$$

La primera componente corresponde a mantener constante la velocidad y el campo deducido a partir de ella es el llamado *campo de velocidad*. La segunda componente toma en cuenta la aceleración de la partícula y por consiguiente al campo que da lugar se lo denomina *campo de aceleración*.

Ya tenemos preparados los elementos para construir la componente de velocidad. Obtenemos entonces

$$\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} q u_{\beta} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \frac{1}{\sum_{\beta=0}^3 s^{\beta} u_{\beta}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q u_{\beta} \frac{1}{\left(\sum_{\beta=0}^3 s^{\beta} u_{\beta}\right)^2} \sum_{\beta=0}^3 u_{\beta} \frac{\partial s^{\beta}}{\partial x^{\alpha}},$$

que usando la ecuación (2.167) da lugar a

$$\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q u_{\beta} \frac{1}{\left(\sum_{\beta=0}^3 s^{\beta} u_{\beta}\right)^2} \left[ u_{\alpha} - \frac{\left(\sum_{\beta=0}^3 u_{\beta} u^{\beta}\right)}{\left(\sum_{\beta=0}^3 s^{\beta} u_{\beta}\right)} s_{\alpha} \right],$$

de manera que recurriendo a la ecuación (2.162), tenemos

$$F_{\alpha\beta} \text{ velocidad} = \frac{\kappa c^2}{\epsilon_0} q \frac{s_{\alpha} u_{\beta} - s_{\beta} u_{\alpha}}{\left(\sum_{\beta=0}^3 s^{\beta} u_{\beta}\right)^3} \quad (2.169)$$

y a partir de esta última deducimos los campos de velocidad

$$E_i \text{ velocidad} = F_{i0} \text{ velocidad} = \frac{\kappa c^2}{\epsilon_0} q \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{s_i u_0 - s_0 u_i}{(\vec{v} \cdot \vec{r} - c r)^3}. \quad \text{☺}$$

Reemplazando finalmente los valores de las componentes de  $s$  y  $u$  que restan y reordenando resulta

$$\vec{E}_{\text{velocidad}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{r} - \frac{v}{c} \vec{r}}{\left( r - \frac{v \cdot \vec{r}}{c} \right)^3}. \quad (2.170)$$

Mediante un cálculo similar podemos construir las componentes del campo magnético  $F_{ij} = \kappa'' c B_k$ , y reconstruir el vector de inducción magnética

$$\vec{B}_{\text{velocidad}} = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^2} q \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{\left( r - \frac{v \cdot \vec{r}}{c} \right)^3} \quad (2.171)$$

o también

$$\vec{B}_{\text{velocidad}} = \frac{1}{\kappa'' c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}_{\text{velocidad}}. \quad (2.172)$$

Es fácil comprobar que los campos eléctrico y magnético calculados se reducen a aquellos que obtuvimos para una carga en movimiento uniforme (2.108, 2.109), siendo éstas las expresiones generales para este tipo de movimiento. De la ecuación (2.171) se deduce de inmediato que las líneas de fuerza del  $\vec{B}$  son círculos cuyo centro yace en el camino de la partícula.

Es de interés expresar los campos eléctrico y magnético en términos de la posición actual de la partícula. Recordemos que en las fórmulas anteriores,  $\vec{r}$  es el vector que va de la posición que ocupaba la partícula en el momento anterior al de observación, o sea la posición retardada, hasta el punto donde se quiere evaluar el campo. La posición actual o posición en que se encuentra la partícula en el momento de observación,  $\vec{r}_a$ , está relacionada a la posición retardada por

$$\vec{r} = \Delta t \vec{v} + \vec{r}_a$$

como resulta de la Figura (2.10).

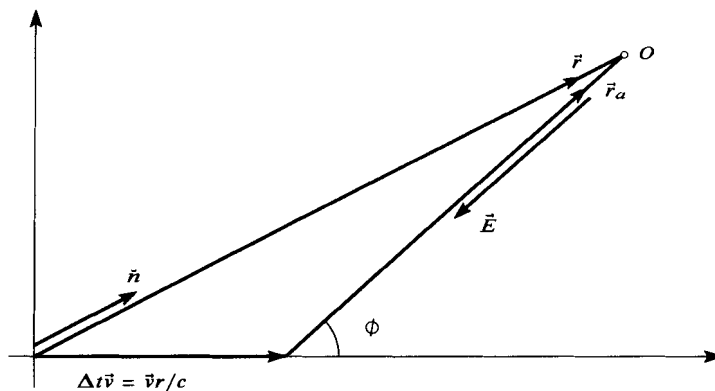


FIGURA 2.10: *Campo eléctrico de velocidad.*

Teniendo en cuenta entonces que el retardo es  $\Delta t = r/c$ , se tiene

$$\vec{r}_a = \vec{r} - \frac{\vec{v}}{c} r, \quad (2.173)$$

que es precisamente el numerador vectorial del campo eléctrico. Notemos que el campo eléctrico apunta hacia la posición actual de la partícula. Usando ahora el teorema del seno en el triángulo delimitado por  $\vec{r}$ ,  $\vec{r}_a$  y  $r\vec{v}/c$  [ver figura (2.10)] el campo eléctrico se expresa como

$$\vec{E}_{\text{velocidad}} = q\kappa \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r}_a}{\left(r - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}\right)^3} = q\kappa \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \phi\right)^{\frac{3}{2}}} \frac{\vec{r}_a}{r_a^3}, \quad (2.174)$$

donde  $\phi$  es el ángulo que se indica en la figura. Es interesante comparar el valor de este campo con el que produciría una carga estática situada en la posición actual de la partícula. Para ello, consideramos primero puntos de observación del campo situados sobre la trayectoria, es decir, sobre

$$\vec{r} \text{ paralelo a } \vec{v} \text{ paralelo a } \vec{r}_a.$$

En este caso

$$\vec{v} \cdot \vec{r} = vr$$

y el denominador de  $\vec{E}_{\text{velocidad}}$  resulta

$$r \left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Por otra parte, según la ecuación (2.173)

$$r_a = r \left(1 - \frac{v}{c}\right),$$

de modo que para el campo eléctrico paralelo se obtiene

$$\vec{E}_{\parallel \text{velocidad}} = q\kappa \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\vec{r}_a}{r_a^3}$$

y podemos concluir que  $\vec{E}_{\parallel}$  sólo difiere del campo producido por una carga estática en el factor  $(1 - v^2/c^2)$ . Para velocidades pequeñas, ambos son prácticamente iguales, pero cuando  $v \rightarrow c$ , entonces  $\vec{E}_{\parallel} \rightarrow 0$ . En cualquier caso,  $\vec{E}_{\parallel}$  es siempre menor que el correspondiente a una carga estática.

Consideramos ahora el campo eléctrico en puntos e instantes tales que  $\vec{r}_a \cdot \vec{v} = 0$ . Luego

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = \left(\vec{r}_a + \frac{\vec{v}}{c} r\right) \cdot \vec{v} = \frac{r}{c} v^2$$

y

$$r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} = r \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right), \quad (2.175)$$

pero, teniendo presente que

$$r^2 = r_a^2 + \frac{v^2}{c^2} r^2$$

a partir de la expresión (2.175) se escribe

$$r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} = r_a \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

de modo que el campo eléctrico transversal resulta

$$\vec{E}_{\perp \text{ velocidad}} = q \kappa \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{\vec{r}_a}{r_a^3}.$$

$\vec{E}_{\perp}$  es siempre mayor que el campo estático correspondiente y diverge para  $v \rightarrow c$ . Para velocidades crecientes, el campo eléctrico, y por consiguiente el campo magnético, tiende a concentrarse en el plano perpendicular a la dirección de movimiento de la partícula.

Para determinar el campo de aceleración, debemos encontrar las derivadas de  $u^\alpha / \sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta$  considerando sólo la variación de  $u^\alpha$ . Este cálculo se simplifica introduciendo la cantidad

$$v_\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} u_\alpha = (\vec{v}, c) \quad (2.176)$$

(la notación no debe inducir a pensar que  $v_\alpha$  es un tetravector), de modo que

$$\frac{u_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta} = \frac{v_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta}$$

y como  $v_\alpha$ , en el sistema del observador, es dependiente del tiempo, escribimos

$$\frac{dv_\alpha}{dt_P} = \dot{v}_\alpha,$$

cuyas componentes son

$$\dot{v}_0 = 0 \quad ; \quad \dot{v}_i = a_i \text{ (aceleración)}. \quad (2.177)$$

El gradiente del cociente  $u_\mu / \sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta$  es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{v_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta} \right)_{s=cte} &= \frac{d}{dt_P} \left( \frac{v_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta} \right) \frac{\partial t_P}{\partial x^\alpha} \\ &= \left[ \frac{\dot{v}_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta} - \frac{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta \dot{v}_\beta}{\left( \sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta \right)^2} v_\mu \right] \frac{\partial t_P}{\partial x^\alpha}, \end{aligned}$$



pero usando la ecuación (2.165)

$$\begin{aligned}\frac{\partial t_P}{\partial x^\alpha} &= \frac{dt_P}{d\tau} \frac{d\tau}{dx^\alpha} = \frac{dt_P}{d\tau} \frac{s_\alpha}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{s_\alpha}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta u_\beta} = \frac{s_\alpha}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta}.\end{aligned}\quad (2.178)$$

Es decir,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left( \frac{v_\mu}{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta} \right)_{s=cte} = \frac{\dot{v}_\mu s_\alpha}{\left( \sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta \right)^2} - \frac{\sum_{\beta=0}^3 s^\beta \dot{v}_\beta}{\left( \sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta \right)^3} v_\mu s_\alpha$$

y por lo tanto

$$F_{\alpha\beta} \text{ aceleración} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \left[ \frac{\dot{v}_\alpha s_\beta - \dot{v}_\beta s_\alpha}{\left( \sum_{\sigma=0}^3 s^\sigma v_\sigma \right)^2} - \frac{v_\alpha s_\beta - v_\beta s_\alpha}{\left( \sum_{\beta=0}^3 s^\beta v_\beta \right)^3} \sum_{\sigma=0}^3 s^\sigma \dot{v}_\sigma \right].$$

De esta expresión podemos deducir explícitamente los campos de aceleración

$$\begin{aligned}E_i \text{ aceleración} &= F_{i0} \text{ aceleración} = \\ &= \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \left[ \frac{\dot{v}_i s_0 - \dot{v}_0 s_i}{\left( \sum_{j=1}^3 s^j v_j - s^0 v_0 \right)^2} - \frac{v_i s_0 - v_0 s_i}{\left( \sum_{j=1}^3 s^j v_j - s^0 v_0 \right)^3} \sum_{j=1}^3 s^j \dot{v}_j \right].\end{aligned}$$

Recordando ahora la ecuación (2.177) y la definición de las componentes del intervalo  $s_\alpha$  se obtiene

$$\vec{E}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \left[ -\frac{\vec{a}r}{(\vec{v} \cdot \vec{r} - cr)^2} + \frac{(\vec{v}r - c\vec{r})}{(\vec{v} \cdot \vec{r} - cr)^3} \vec{a} \cdot \vec{r} \right]$$

o

$$\vec{E}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c^2} q \left[ -\frac{\vec{a}r}{\left( r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right)^2} + \frac{\left( \vec{r} - \frac{\vec{v}}{c} r \right)}{\left( r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right)^3} \vec{a} \cdot \vec{r} \right]. \quad (2.179)$$

Un cálculo similar se puede realizar para las componentes del campo magnético  $F_{ij} = \kappa'' c B_k$  para obtener

$$\vec{B}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^3} q \frac{\vec{r}}{r} \wedge \left[ -\frac{\vec{a}r}{\left( r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right)^2} + \frac{\left( \frac{\vec{v}}{c} r \right)}{\left( r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right)^3} \vec{a} \cdot \vec{r} \right]. \quad (2.180)$$

Comparando esta expresión con la correspondiente al campo eléctrico (2.179) se observa que se satisface la siguiente relación entre ambas magnitudes vectoriales

$$\vec{B}_{\text{aceleración}} = \frac{1}{\kappa'' c} \frac{\vec{r}}{r} \wedge \vec{E}_{\text{aceleración}} \quad (2.181)$$

como era de esperar.

### 2.4.3. Problemas

- Una partícula con energía en reposo  $E_0$  es acelerada a la energía  $E$  y colisiona con otra similar que se encuentra en reposo. Mostrar que si  $E \gg E_0$ , la energía máxima disponible en el sistema en reposo es  $\sqrt{2 E E_0}$ . [PP,17,1]
- Un mesón  $\pi^0$  que se mueve con velocidad  $u$  con respecto al laboratorio, se desintegra produciendo dos rayos  $\gamma$ . Calcular la distribución de energía de los rayos  $\gamma$  en el laboratorio y la distribución angular de uno de esos rayos respecto del segundo. [PP,17,2]
- Para producir un «par de protones» se requiere, en el sistema centro de masa, una energía de  $2m_p c^2 = 1862$  MeV. ¿Cuál es la energía mínima de un protón y de un electrón, necesarias para producir ese evento por choque contra un protón en reposo? [PP,17,4]
- Una partícula de masa  $m$  y carga  $e$ , se mueve en un campo eléctrico uniforme y estático  $\vec{E}_0$ .
  1. Obtener la velocidad y la posición de la partícula como funciones del tiempo si la velocidad inicial es perpendicular al campo  $\vec{E}_0$ .
  2. Eliminando el tiempo, obtener la trayectoria espacial de la partícula. Discutir las aproximaciones válidas para tiempos cortos y para tiempos largos, definiendo estos conceptos. [JA,12,7]
- Demostrar que la representación integral de los potenciales retardados lleva a la forma explícita de los potenciales de Liénard-Wiechert. [EY,14,2]
- Calcular, a partir de los potenciales de Liénard-Wiechert, los campos electromagnéticos de una partícula en movimiento arbitrario y demostrar que  $\vec{B}$  es perpendicular a  $\vec{E}$  y a la posición instantánea  $\vec{R}(t')$ .

## 2.5. PRINCIPIO DE MÍNIMA ACCIÓN

Las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica pueden obtenerse a partir de un *principio de mínima acción*. Recordemos cómo se desarrolla este camino alternativo de construir las ecuaciones dinámicas. Si  $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  son las coordenadas generalizadas del sistema de  $n$  partículas puntuales y  $\dot{q}_j$  las respectivas velocidades al tiempo  $t$ , entonces la *acción* del sistema está definida por

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L \{q(t), \dot{q}(t), t\} dt, \quad (2.182)$$

donde  $L$  es la función de Lagrange o *lagrangiano*, que se supone conocida a priori y que depende de las posiciones y de las velocidades de las  $n$  partículas y ocasionalmente del tiempo. En los casos más simples,  $L$  es la diferencia entre la energía cinética de las partículas, forma cuadrática en las velocidades y una energía potencial.

El principio de mínima acción establece que de todas las trayectorias o caminos  $q(t)$ , en el espacio de configuración, que unen  $q_{\text{inicial}}$  al tiempo  $t_1$  con  $q_{\text{final}}$  al tiempo  $t_2$ , el sistema físico realiza aquélla que resulta en un extremo de la acción (2.182), correspondiendo al movimiento clásico del sistema. En el Apéndice sobre Elementos de Análisis Funcional se muestra que este problema, el de extremos, se reduce a imponer que la derivada funcional de la acción se anule. Es decir,

$$\frac{\delta S}{\delta q_i(t)} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

o, lo que es lo mismo, que se verifiquen las *ecuaciones de Euler-Lagrange* para el sistema de  $n$  partículas.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, \dots, n.$$

Este conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas no son más que las ecuaciones de Newton del problema. Es importante hacer notar que las ecuaciones de movimiento permanecen sin modificación si a la función de Lagrange  $L$  se le agrega un término que sea una derivada total respecto del tiempo. En este caso, la acción sólo se ve modificada por términos que dependen exclusivamente de los bordes. Esta observación implica que la función de Lagrange no es única.

Se puede verificar además que, manteniendo el tiempo invariante, estas ecuaciones son covariantes frente a transformaciones arbitrarias de las coordenadas  $q_i$ . En particular, son covariantes frente a transformaciones ortogonales de las coordenadas espaciales (rotaciones), desde que la función de Lagrange  $L$ , es un invariante.

Un ejemplo muy interesante del formalismo de Lagrange, que nos proponemos estudiar, es el caso de una partícula de carga  $e$  en un campo electromagnético. El lagrangiano correspondiente se escribe

$$L(q, \dot{q}, t) = \sum_j \left[ \frac{m}{2} \dot{q}_j \dot{q}_j - e \phi + \kappa'' e \dot{q}_j A_j \right], \quad (2.183)$$

que es de la forma

$$L = T - U,$$

donde  $T$  es la energía cinética de la partícula y  $U$  es el potencial generalizado.  $U$  no sólo depende de las coordenadas de la partícula sino también de su velocidad y de allí el nombre de potencial generalizado.

Sustituyendo el lagrangiano en la ecuación de Euler-Lagrange, tenemos

$$\frac{d}{dt} (m\dot{q}_i + \kappa'' e A_i) + e \frac{\partial \phi}{\partial q_i} - \kappa'' e \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} = 0.$$

Si usamos ahora

$$\frac{d}{dt} A_i = \frac{\partial A_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial A_i}{\partial q_j} \dot{q}_j$$

la ecuación anterior resulta

$$m\ddot{q}_i = e \left( -\frac{\partial V}{\partial q_i} - \kappa'' \frac{\partial A_i}{\partial t} \right) + \kappa'' e \sum_j \left( \dot{q}_j \frac{\partial A_j}{\partial q_i} - \dot{q}_i \frac{\partial A_j}{\partial q_j} \right) = e \left( \vec{E} + \kappa'' \vec{v} \times \vec{B} \right)_i,$$

que reproduce correctamente la ecuación de Newton del problema bajo consideración, ya que reconocemos a la fuerza de Lorentz en el segundo miembro. Es importante observar que si bien las ecuaciones de movimiento dependen de los campos, el lagrangiano a partir del cual éstas se derivan es función de los potenciales. Como sabemos, los potenciales están definidos a menos de transformaciones de gauge, pero es fácil comprobar que frente a una transformación de gauge, el lagrangiano (2.183) cambia sólo en una derivada temporal total y, como dijimos más arriba, esta ambigüedad no modifica las ecuaciones de movimiento y por lo tanto puede ser ignorada.

Si derivamos la función de Lagrange  $L$  respecto a  $\dot{q}_i$ , obtenemos una nueva variable del movimiento, el *impulso generalizado*. Es decir,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(q, \dot{q}, t). \quad (2.184)$$

Por otra parte, si suponemos que la ecuación es invertible, podemos expresar las velocidades en término de impulsos y coordenadas. Esto es posible cuando el jacobiano de la transformación no se anula

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 L}{\partial q_i \partial q_j} \right\} \neq 0.$$

Mencionemos, sin embargo, que existen sistemas físicos de interés en presencia de vínculos, donde esta condición sobre el jacobiano no se satisface.

Finalmente, recordemos que la función de Hamilton, o *hamiltoniano* del sistema, se obtiene por medio de una transformación de Legendre

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(q, p) - L(q, \dot{q}(q, p)).$$

Derivando el hamiltoniano respecto de sus argumentos, es fácil obtener el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad ; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (2.185)$$

que son las *ecuaciones canónicas de la mecánica* o ecuaciones de Hamilton. En las ecuaciones de Hamilton se trabaja con coordenadas e impulsos generalizados. De modo que si en la versión lagrangiana se tenían  $n$  grados de libertad, ahora se tendrá un conjunto de  $2n$  variables que definen las coordenadas del *espacio de fase*  $2n$ -dimensional. En general, la variación de una función  $f(q, p)$  definida en el espacio de fase es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial p_i} \right] = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}, \quad (2.186)$$

donde hemos introducido el *corchete de Poisson*, definido por

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right]. \quad (2.187)$$

Luego se concluye de la ecuación (2.186), que una función que no dependa del tiempo en forma explícita y su corchete de Poisson con el hamiltoniano  $H$  sea nulo, es una cantidad conservada, es decir, una constante de movimiento. En particular, el hamiltoniano es una constante de movimiento si no es una función explícita del tiempo. Para una gran clase de sistemas físicos, el hamiltoniano es precisamente la energía total del sistema.

Es interesante notar que, a partir de la definición (2.187), los corchetes de Poisson de las variables canónicas resultan

$$\begin{aligned} [q_i, q_j] &= 0 \\ [p_i, p_j] &= 0 \\ [q_i, p_j] &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

Recordemos que esta última expresión es la base del postulado de cuantificación de Dirac o cuantificación canónica. En efecto, el tratamiento de Dirac de la mecánica cuántica parte de considerar a este último corchete de Poisson como una relación entre operadores cuánticos, incluyendo la constante de Planck  $\hbar$ , en el miembro derecho.

Retornamos nuevamente al ejemplo de una partícula cargada en presencia del campo electromagnético. Las componentes cartesianas del impulso canónicamente conjugado son

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} = m \dot{q}_r + \kappa'' e A_r \quad ; \quad r = 1, 2, 3,$$

que no es simplemente el producto de una masa por una velocidad; no coincide con el impulso cinético. Más aún, se trata de una magnitud que cambia frente a transformaciones de gauge y por lo tanto no representa un observable físico.

En la gran mayoría de los casos, la transformación (2.184) es invertible, de modo que el hamiltoniano se puede escribir en función de las variables del espacio de fase. En el caso electromagnético se tiene

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L = \frac{m}{2} \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \dot{q}_i + e\phi \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^n \left( \vec{p}_i - \kappa'' e \vec{A} \right)^2 + e\phi. \end{aligned} \quad (2.188)$$

A partir de la primera igualdad observamos que el hamiltoniano es la suma de la energía cinética y la energía potencial  $e\phi$ . Este resultado era de esperar si recordamos que las fuerzas magnéticas no realizan trabajo ya que actúan a ángulos rectos con la dirección de movimiento. Se podría pensar que el hamiltoniano presenta la misma dificultad que el impulso, respecto de las transformaciones de gauge. Sin embargo, la transformación de gauge que sufre el impulso canónico  $\vec{p}$  es exactamente cancelada

por la que sufre  $\vec{A}$ , de manera de hacer a la energía una magnitud invariante de gauge. Es decir, un observable físico como era de esperar.

Hemos presentado un resumen de la mecánica clásica no relativista de un sistema con un número finito de grados de libertad. Nuestro próximo objetivo será incluir la dinámica de campos y la extensión relativista del tratamiento. Esta generalización nos permitirá presentar la electrodinámica de partículas puntuales y la dinámica de interacción entre campos.

Para adquirir una idea de cómo tratar sistemas continuos, es conveniente comenzar con el análisis de una colección de partículas puntuales alineadas en una dimensión, como se muestra la Figura (2.11), que interactúan vía una fuerza elástica caracterizada por el parámetro  $k$

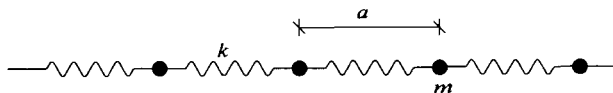


FIGURA 2.11: Cadena lineal de partículas

Este sistema es, ciertamente, un modelo discreto para una cuerda elástica. Llamando  $\eta_i$  al desplazamiento de la  $i$ -ésima partícula a partir de su posición de equilibrio, el lagrangiano del sistema de  $N$  partículas resulta

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [m \dot{\eta}_i^2 - k (\eta_{i+1} - \eta_i)^2].$$

Es conveniente introducir la escala, definida por la distancia  $a$  entre partículas vecinas en reposo y escribir el lagrangiano de la siguiente manera

$$L = \sum_{i=1}^N a \frac{1}{2} \left[ \frac{m}{a} \dot{\eta}_i^2 - ka \left( \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^N a \mathcal{L}_i$$

$\mathcal{L}_i$  es la densidad lineal lagrangiana, esto es, la densidad de la función de Lagrange por unidad de longitud.

Podemos pasar del sistema mecánico discreto antes mencionado, a un sistema mecánico continuo, cuando el número de grados de libertad tiende a infinito y la distancia de separación entre partículas se hace infinitesimal. Así

$$\begin{aligned} a \rightarrow dx, & \quad ; \quad \frac{m}{a} \rightarrow \mu = \text{densidad de masa lineal} \\ \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{a} \rightarrow \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x}, & \quad ; \quad ka \rightarrow Y = \text{módulo de Young} \end{aligned}$$

El lagrangiano entonces es

$$L = \int \mathcal{L} dx,$$

donde el integrando está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \mu \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - Y \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right], \quad (2.189)$$

que es la densidad lagrangiana de una cuerda elástica. Notemos que  $\eta$  es una función de las variables continuas espacio  $x$  y tiempo  $t$ , respectivamente. En el formalismo lagrangiano de campos que estamos introduciendo, la variable de campo  $\eta(x, t)$  juega el papel de la coordenada generalizada, tal como  $q_i$  lo hacía en el caso de la mecánica de partículas puntuales. También es interesante señalar que la densidad lagrangiana depende de  $\partial\eta/\partial x$ , hecho que refleja la localidad de la interacción, ya que cada partícula puntual interactúa sólo con su vecina más próxima.

Para formular el principio variacional en el espacio tridimensional continuo, consideraremos la acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int \mathcal{L} d^3x dt,$$

donde suponemos que la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}$  es una función de los campos y sus derivadas. La dinámica clásica de los campos se obtiene nuevamente del principio de mínima acción de Hamilton

$$\delta S = 0.$$

Supondremos que las densidades lagrangianas de interés son aquellas que dependen del campo y sus derivadas primeras, no siendo funciones explícitas del tiempo, es decir,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\Psi, \dot{\Psi}, \vec{\nabla}\Psi), \quad (2.190)$$

donde  $\Psi(\vec{x}, t)$  es un campo genérico. Más adelante tendremos oportunidad de presentar ejemplos concretos. En estas condiciones, el principio de mínima acción conduce a

$$\delta S = \int dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \delta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} \delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)} \delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right) \right]$$

e intercambiando la variación con la derivada parcial resulta

$$\delta S = \int dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} \delta \Psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} \frac{\partial}{\partial t} (\delta \Psi) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)} \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta \Psi) \right].$$

Integrando ahora por partes y suponiendo que la contribución de los bordes a las integrales se anula, tenemos que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int dt \int d^3x \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)} \right] \delta \Psi \\ &= \int dt \int d^3x \frac{\delta S}{\delta \Psi} \delta \Psi. \end{aligned}$$

De modo que el principio de mínima acción conduce a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} - \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)} = 0, \quad (2.191)$$

que son las *ecuaciones de Euler-Lagrange* para la dinámica de los sistemas continuos o campos. No está de más comentar que la densidad lagrangiana es una función de los campos que debe ser conocida o, si se quiere, debe elegirse de manera que reproduzca las ecuaciones dinámicas conocidas.

Tomemos como ejemplo la densidad lagrangiana para el caso de la cuerda elástica (2.189). Si calculamos las derivadas parciales que aparecen en la ecuación de Euler-Lagrange (2.191) y las sustituimos, tenemos la ecuación dinámica que describe el comportamiento de las perturbaciones en un medio elástico unidimensional

$$\mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - Y \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0.$$

Esta es la ecuación de las ondas para la propagación de una perturbación del medio con velocidad  $v = \sqrt{Y/\mu}$ .

Como en el caso de partículas puntuales, definimos el impulso canónico conjugado del campo  $\Psi$  por medio de

$$\Pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Psi}{\partial t}} \quad (2.192)$$

y la densidad hamiltoniana  $\mathcal{H}$  por:

$$\mathcal{H} = \Pi \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \mathcal{L}, \quad (2.193)$$

siendo el hamiltoniano

$$H = \int \mathcal{H} d^3x. \quad (2.194)$$

Si la ecuación (2.192), que define el impulso canónico del campo, puede ser invertida, para expresar  $\partial \Psi / \partial t$  como función de  $\Pi$  y  $\partial \Psi / \partial x_i$ , y luego es substituida en la ecuación (2.193) tenemos que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Pi, \vec{\nabla} \Psi).$$

Por lo tanto, resulta que el hamiltoniano es una funcional del campo  $\Psi$  y su impulso conjugado  $\Pi$ , de manera que

$$\delta H = \int \left( \frac{\delta H}{\delta \Psi} \delta \Psi + \frac{\delta H}{\delta \Pi} \delta \Pi \right) d^3x, \quad (2.195)$$

Por otra parte, de la ecuación (2.193) tenemos también que

$$\begin{aligned} \delta H = & \int \left( \Pi \delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \delta \Pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)} \delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right)} \delta \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \right) \right) d^3x \end{aligned}$$



y si recurrimos a las ecuaciones (2.191) y (2.192), esta última se simplifica a

$$\delta H = \int \left( \dot{\Psi} \delta \Pi - \dot{\Pi} \delta \Psi \right) d^3 x.$$

Comparando ahora con la ecuación (2.195) se obtiene

$$\dot{\Psi} = \frac{\delta H}{\delta \Pi} \quad ; \quad \dot{\Pi} = -\frac{\delta H}{\delta \Psi}, \quad (2.196)$$

que constituyen las *ecuaciones canónicas del campo*.

Por otra parte, recordemos que el corchete de Poisson de dos funcionales  $F[\Psi, \Pi]$  y  $G[\Psi, \Pi]$  está definido por la expresión

$$[F, G] = \int \left\{ \frac{\delta F}{\delta \Psi(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \Pi(\vec{x}, t)} - \frac{\delta F}{\delta \Pi(\vec{x}, t)} \frac{\delta G}{\delta \Psi(\vec{x}, t)} \right\}. \quad (2.197)$$

Como

$$\frac{\delta \Psi(\vec{x}, t)}{\delta \Psi(\vec{y}, t)} = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \quad y \quad \frac{\delta \Psi(\vec{x}, t)}{\delta \Pi(\vec{y}, t)} = 0$$

debido a que  $\Psi$  y  $\Pi$ , en un mismo instante, son dos campos independientes, se obtiene finalmente

$$[\Psi(\vec{x}, t), H] = \int \frac{\delta \Psi(\vec{x}, t)}{\delta \Psi(\vec{y}, t)} \frac{\delta H}{\delta \Pi(\vec{y}, t)} d^3 y = \frac{\delta H}{\delta \Pi(\vec{x}, t)},$$

donde se hizo uso de la expresión (2.197). Por consiguiente, las ecuaciones canónicas (2.196) pueden ser escritas de la siguiente forma

$$\frac{\partial \Psi(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\Psi(\vec{x}, t), H] \quad ; \quad \frac{\partial \Pi(\vec{x}, t)}{\partial t} = [\Pi(\vec{x}, t), H]. \quad (2.198)$$

A su vez, los corchetes de Poisson de las variables canónicas de campo resultan

$$[\Psi(\vec{x}, t), \Psi(\vec{y}, t)] = 0 \quad ; \quad [\Pi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = 0 \quad (2.199)$$

$$[\Psi(\vec{x}, t), \Pi(\vec{y}, t)] = \delta(\vec{x} - \vec{y}). \quad (2.200)$$

Las ecuaciones (2.198)-(2.200) describen la dinámica clásica de los campos en la representación de Hamilton. Ellas son el punto de partida de la cuantificación canónica de los campos que desemboca en la teoría cuántica de campos, base formal de la comprensión actual de las interacciones fundamentales de la Naturaleza.

En lo que sigue extendemos los métodos lagrangianos al caso relativista. En primer lugar observemos que, si la acción es invariante con respecto a transformaciones de Lorentz, las ecuaciones de movimiento que se deriven de ella serán obviamente covariantes. Por lo tanto,  $S$  debe ser un escalar de Lorentz. Sin embargo, es importante indicar que la invariancia de la acción no es una condición necesaria para la invariancia de las ecuaciones de movimiento, ya que es suficiente con que la variación de la acción sea invariante.

La construcción del lagrangiano relativista para partículas puntuales es un poco más complicada de concretar que en el caso de campos. En la definición de la acción para partículas, dada en la ecuación (2.182), el  $dt$  no es un invariante de Lorentz. Parecería que la variable apropiada debiera ser el tiempo propio de la partícula. Sin embargo, como veremos, esta elección conduce a su vez a otro problema. Ya que el lagrangiano debe ser una función escalar de Lorentz, a construirse a partir del tetravector posición de la partícula, la propuesta más simple que podemos escribir es

$$L = \sum_{\mu=0}^3 m_0 c \sqrt{u_\mu u^\mu}. \quad (2.201)$$

Sin embargo, la condición reduce el lagrangiano a una constante y por lo tanto sería trivial. En la literatura se presentan dos remedios potenciales a esta situación. Uno es adoptar este lagrangiano sin la inclusión explícita del vínculo (2.117), de manera que al variar la acción para determinar las ecuaciones de movimiento, la condición vincular se agrega mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. La otra posibilidad, muy cómoda para el caso de muchas partículas, es introducir un nuevo parámetro  $p$  invariante de Lorentz, de tal forma que quede definido un tetravector, con dimensiones de velocidad, dado por

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dp}.$$

Este tetravector no satisface necesariamente el vínculo (2.117). La conexión entre  $u^\mu$  y  $v^\mu$  es simple, ya que

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{dp} = \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{d\tau}{dp} = u^\mu \frac{d\tau}{dp}. \quad (2.202)$$

Si ahora calculamos su módulo, tenemos

$$\sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu = \sum_{\mu=0}^3 u^\mu u_\mu \left( \frac{d\tau}{dp} \right)^2 = c^2 \left( \frac{d\tau}{dp} \right)^2,$$

de donde se sigue

$$\frac{d\tau}{dp} = \frac{1}{c} \left( \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Volviendo a la ecuación (2.202), se obtiene

$$u^\mu = \frac{c}{\left( \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu \right)^{\frac{1}{2}}} v^\mu, \quad (2.203)$$

de modo que la ecuación de Euler-Lagrange se escribe ahora como

$$\frac{d}{dp} \left( \frac{\partial L}{\partial v^\mu} \right) - \left( \frac{\partial L}{\partial x^\mu} \right) = 0. \quad (2.204)$$

Como ejemplo de este formalismo, consideramos el caso particular de una partícula cargada en presencia de un campo electromagnético. Consideramos el lagrangiano

$$L = m_0 c \sum_{\mu=0}^3 \sqrt{v^\mu v_\mu} + \frac{e}{c} v^\mu A_\mu(x^\nu)$$

que llevado a la ecuación (2.204) conduce a

$$\frac{d}{dp} \left( m_0 \frac{v_\mu}{\left( \sum_{\mu=0}^3 v^\mu v_\mu \right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{e}{c} A_\mu(x^\nu) \right) - \frac{e}{c} v^\mu \frac{\partial A_\mu(x^\nu)}{\partial x^\mu} = 0.$$

Si reemplazamos ahora

$$\frac{d}{dp} \rightarrow \frac{d}{d\tau} \frac{d\tau}{dp}$$

y hacemos uso de la ecuación (2.203), tenemos

$$\frac{d}{d\tau} m_0 u_\mu = \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) u^\nu = \frac{e}{c} F_{\mu\nu} u^\nu,$$

que es la ecuación de Minkowski (2.126) para fuerzas de origen electromagnético. Es inmediato que el miembro derecho de esta ecuación coincide con la tetrafuerza (2.132) discutida previamente.

La acción de sistemas con infinitos grados de libertad, campos, queda determinada a partir del conocimiento de la densidad lagrangiana (2.190). La covarianza de la acción se ve satisfecha si la densidad lagrangiana cumple con la condición de ser un escalar de Lorentz, ya que el elemento de volumen es un invariante de Lorentz. Luego, supondremos que la densidad lagrangiana depende sólo de los campos  $\Psi$ , y de sus gradientes  $\partial\Psi/\partial x^\mu$ , es decir,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left( \Psi, \frac{\partial\Psi}{\partial x^\mu} \right).$$

Como en el caso no relativista, este lagrangiano será único a menos de una tetradivergencia. La ecuación de movimiento está determinada por el principio de mínima acción de Hamilton, que conduce a la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} = 0$$

para la dinámica del campo.

Como ilustración de las ideas precedentes, consideremos la siguiente densidad lagrangiana para un campo  $\Phi$ , escalar de Lorentz

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \right) - U(\Phi), \quad (2.205)$$

que es a su vez un escalar de Lorentz. Si escribimos el primer término en forma explícita

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right)^2 \right] - U(\Phi)$$

vemos que se trata de una generalización directa de la densidad lagrangiana para la cuerda elástica en tres dimensiones (2.189). El último término puede ser interpretado como una densidad de energía potencial. Este término podría haber sido incluido también en el modelo de la cuerda elástica discreta si hubiésemos supuesto que cada partícula estaba sometida a un potencial externo. Más adelante haremos uso de esta densidad lagrangiana cuando discutamos campos en interacción.

Ahora nuestro interés se dirige a la densidad lagrangiana del campo electromagnético. A partir del tensor de campos  $F_{\mu\nu}$ , pueden ser construidos dos invariantes Lorentz, que son, obviamente, invariantes de gauge

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad y \quad \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}.$$

Estos invariantes, en función de los campos eléctrico y magnético, son proporcionales a

$$2(\kappa'^2 c^2 B^2 - E^2) \quad y \quad \vec{E} \cdot \vec{B}.$$

Ya que el segundo de ellos no es invariante frente a inversiones espaciales, es decir, cambia frente a transformaciones de paridad, no lo tendremos en cuenta.

Entonces, consideramos como densidad lagrangiana para el campo electromagnético en presencia de fuentes externas, a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \left( \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) + 4\pi\kappa' \sum_{\mu=0}^3 j^\mu A_\mu. \quad (2.206)$$

La presencia de las fuentes externas  $j^\mu$  en esta densidad lagrangiana la tornaría a priori no invariante de gauge. En efecto, bajo transformaciones de gauge de la forma

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu}$$

la densidad adquiere una contribución adicional. Sin embargo, esta contribución, en virtud de la conservación de la corriente, resulta ser una divergencia, ya que a partir de

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial j^\mu}{\partial x_\mu} = 0$$

podemos, ciertamente, escribir

$$\sum_{\mu=0}^3 j^\mu \frac{\partial \Lambda}{\partial x^\mu} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial (j^\mu \Lambda)}{\partial x^\mu}.$$

Como ya hemos comentado, una tetradivergencia no modifica las ecuaciones del movimiento y por lo tanto puede ser ignorada. Concluimos entonces que la conservación de la corriente es una condición necesaria y suficiente para la invarianza de gauge de la teoría.

Tomando las componentes  $A_\mu$  como variables de campo independientes, podemos escribir por un lado

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} \left[ \left( \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} \right) \left( \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \right) \right] \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left\{ \frac{\partial}{\partial \left( \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} \right)} \left( 2 \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial x_\lambda} \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\sigma} \right) \right\} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left( 4 \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} - 4 \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\nu} F_{\mu\nu} \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = 4\pi \kappa' j_\mu.$$

Así las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada componente reproducen las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell. El segundo par de ecuaciones de Maxwell se satisface una vez que se introduce la relación entre el tetrapotencial y el tensor de campo.

### 2.5.1. Problema

- Uno de los intentos para evitar las divergencias causadas por la presencia de cargas puntuales en la teoría fue introducir electrodinámicas no lineales como la de Born-Infeld, definida a través de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{E_0^2}{4\pi} \left[ 1 - \sqrt{1 - [(E^2 - B^2)/E_0^2] - [(\vec{E} \cdot \vec{B})^2/E_0^4]} \right],$$

donde  $E_0$  es una constante que tiene el significado de un campo eléctrico máximo.

1. Probar que si los campos  $E$  y  $B$  son mucho menores que la escala  $E_0$ , la densidad lagrangiana de Born-Infeld se reduce a la de la electrodinámica ordinaria.
2. En el caso simplificado de  $B = 0$ , obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange y por comparación con la relación constitutiva ordinaria, hallar el valor de la constante dieléctrica, que resulta función del campo  $E$ .
3. Hallar la solución de las ecuaciones de movimiento, para el caso de simetría esférica en función de la distancia característica  $r_0^2 = e/E_0$ .
4. Mostrar que el valor del campo eléctrico en el origen de coordenadas es finito y su valor máximo está dado por la constante  $E_0$ .

## 2.6. SIMETRÍAS

La historia de la Física muestra que el análisis de las simetrías de un sistema ha sido siempre de gran importancia y utilidad para desentrañar las leyes de la Naturaleza. En la actualidad, la simetría constituye la base de la formulación de las teorías físicas de las interacciones fundamentales. En esta sección presentaremos las simetrías básicas, su origen y sus consecuencias formales.

Comenzamos analizando un ejemplo simple relacionado con la transformación de paridad que ya habíamos mencionado. Tratamos un sistema físico con una configuración espacial simétrica con respecto a un cierto plano  $E$ . Es decir, mediante una reflexión especular respecto de  $E$ , el sistema se transforma en otro idéntico al original. Para precisar esta operación de reflexión, tomemos una recta cualquiera  $l$  perpendicular a  $E$  y un punto genérico  $P$  sobre ella; entonces existe un y sólo un punto  $P'$  sobre  $l$  que está a la misma distancia de  $E$  pero del lado opuesto del plano. La reflexión en  $E$  es la aplicación  $S : P \rightarrow P'$  que lleva el punto arbitrario  $P$  a su imagen especular,  $P'$ , con respecto a  $E$ . El punto  $P'$  coincide con  $P$  solamente si  $P$  está sobre el plano  $E$ .

Otro ejemplo cotidiano de simetrías geométricas son las rotaciones de un cierto ángulo alrededor de un eje particular.

Es fácil ver que el conjunto de transformaciones relacionadas con una simetría geométrica forman grupo.

A partir de los ejemplos mencionados arriba, podemos introducir una primera clasificación de las simetrías en: *simetrías discretas* y *simetrías continuas*. Las inversiones espaciales y las inversiones temporales son claramente ejemplos del primer tipo, en tanto que las rotaciones espaciales ejemplifican el segundo tipo.

Las simetrías continuas admiten a su vez otra posible clasificación. Ésta distingue las *simetrías geométricas*, como son las traslaciones y rotaciones que están relacionadas al espacio y al tiempo, de las *simetrías internas*, no relacionadas con transformaciones de coordenadas, como es el caso de la conservación de la carga eléctrica.

Las simetrías continuas juegan un papel central en el marco de las teorías clásicas de partículas y campos, ya que están íntimamente ligadas a las leyes de conservación. Esta conexión es refrendada por el teorema de Noether y constituye el motivo de estudio de esta sección.

La formulación de las ecuaciones dinámicas de movimiento a partir de un principio de mínima acción, como fue desarrollada al estudiar la mecánica relativista, tiene la gran ventaja de establecer una conexión inmediata entre principios de simetría y leyes de conservación. Para ilustrar estas ideas vamos a tratar brevemente la mecánica clásica no relativista de un sistema de partículas en interacción y en primer lugar nos ocuparemos de la invarianza del sistema bajo traslaciones temporales. Es decir, mostraremos que la no existencia del tiempo absoluto implica la conservación de la energía. Esta es sin duda una ley básica en la descripción física de la Naturaleza. Remarquemos que estamos considerando sistemas cerrados o aislados: sin intercambio de energía con el medio externo.

Desde que la dinámica del sistema se puede resumir en el lagrangiano  $L$ , la simetría bajo traslaciones del tiempo implica que

$$L(t + \tau) = L(t)$$

y en particular si  $\tau$  es infinitesimal, se tiene

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

y por lo tanto el lagrangiano no debe ser una función explícita del tiempo. Es fácil ahora obtener la magnitud conservada que surge de esta simetría. Para ello basta con calcular la derivada total del lagrangiano

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \ddot{x}_i + \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \dot{x}_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N p_i \dot{x}_i \\ &\frac{d}{dt} \left( L - \sum_{i=1}^N p_i \dot{x}_i \right) = \frac{dH}{dt} = 0, \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las ecuaciones de movimiento y de la definición del hamiltoniano.

En la mecánica clásica existen otras dos leyes de conservación fundamentales, que son consecuencia de dos simetrías muy generales de la Naturaleza: homogeneidad e isotropía del espacio.

Para estudiar estos casos, es conveniente partir de la acción en lugar de hacerlo con el lagrangiano. Si el espacio es homogéneo, la acción de un sistema de partículas debe ser invariante frente a transformaciones de traslación espacial

$$S(q_{\text{inicial}} + a, t_1; q_{\text{final}} + a, t_2) = S(q_{\text{inicial}}, t_1; q_{\text{final}}, t_2). \quad (2.207)$$

Como consecuencia de esta condición, el origen del sistema de referencia en el espacio de configuración, donde evoluciona el sistema, puede ser elegido en forma arbitraria. Es decir, a priori, no existe ninguna razón que determine un origen de coordenadas absoluto y por lo tanto, la posición absoluta de las partículas no es observable.

Las traslaciones espaciales son transformaciones continuas y en consecuencia es suficiente estudiar la invarianza para cambios infinitesimales del parámetro  $a$ . Vale entonces un desarrollo en serie de Taylor del miembro derecho de la ecuación 2.207 que da lugar a

$$\left[ \sum_{i=1}^N \frac{\partial S(q_{\text{inicial}}, t_1; q_{\text{final}}, t_2)}{\partial q_{i \text{ inicial}}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial S(q_{\text{inicial}}, t_1; q_{\text{final}}, t_2)}{\partial q_{i \text{ final}}} \right] a + \dots = 0,$$

donde los puntos suspensivos indican potencias superiores de  $a$ , que por tratarse de una magnitud infinitesimal pueden despreciarse, reduciendo la expresión de la invarianza a

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial S(q_{\text{inicial}}, t_1; q_{\text{final}}, t_2)}{\partial q_{i \text{ inicial}}} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial S(q_{\text{inicial}}, t_1; q_{\text{final}}, t_2)}{\partial q_{i \text{ final}}} = 0. \quad (2.208)$$

Para analizar las consecuencias de este resultado, recurrimos a la variación de la acción cuando los límites no son fijos (ver el apéndice sobre análisis funcional, donde

debemos identificar la función  $F$  con el lagrangiano, la variable  $x$  con el tiempo  $t$  y considerar el caso de  $n$  funciones). Se tiene entonces

$$\tilde{\delta S} = \left( L - \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta t + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} + \sum_{i=1}^N \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta q_i(t)} \delta q_i dt.$$

Si ahora restringimos esta variación a la trayectoria estacionaria de evolución del sistema entre los estados inicial y final, el último término se anula y por lo tanto tenemos

$$\tilde{\delta S} = \left( L - \sum_{i=1}^N \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta t + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Más aún, las definiciones de hamiltoniano y de impulso lineal permiten simplificar la expresión de esta variación y escribir

$$\tilde{\delta S} = H \delta t + \sum_{i=1}^N p_i \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2}.$$

Vemos entonces que la invariancia expresada en (2.208) implica la conservación del impulso lineal del sistema

$$\sum_{i=1}^N p_i \text{ inicial} = \sum_{i=1}^N p_i \text{ final}. \quad (2.209)$$

Las leyes de conservación que hemos obtenido resultan como consecuencia de la existencia de un grupo de transformaciones continuas e ilustran la interdependencia entre tres aspectos referidos a un principio de simetría: i) alguna cantidad física no es observable; ii) invarianza de la acción  $S$  (o del lagrangiano) bajo un grupo de transformaciones, y iii) leyes de conservación o reglas de selección.

Una forma alternativa de presentar la condición de simetría (2.207) surge de recordar que la acción es una funcional de las coordenadas. Por lo tanto, la mencionada condición de invarianza se puede escribir como

$$S[q + a] = S[q],$$

lo que implica que el lagrangiano no puede cambiar frente a esta transformación. Omitiendo, por simplicidad, la dependencia temporal, imponemos la invarianza del lagrangiano frente a la traslación de coordenadas:

$$L(q + a, \dot{q}) = L(q, \dot{q}). \quad (2.210)$$

Se sigue de esta expresión, debido a que las velocidades permanecen inalteradas bajo traslaciones uniformes del sistema de coordenadas, que la energía potencial debe ser función sólo de diferencias de coordenadas de las partículas. Esto es cierto en realidad si el lagrangiano se expresa como la diferencia entre energía cinética y energía potencial.



Si restringimos el estudio a una transformación infinitesimal, la última condición se expresa como

$$L(q, \dot{q}) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} a + \dots = L(q, \dot{q}),$$

es decir,

$$\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

donde las potencias superiores de  $a$  han sido ignoradas por tratarse de un desplazamiento infinitesimal. Apelando a las ecuaciones de Euler-Lagrange, es fácil concluir que

$$\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N p_i \right) = 0,$$

que indica nuevamente que el impulso lineal total del sistema de partículas es una magnitud conservada.

Concluimos entonces que la conservación del impulso lineal, en un sistema de partículas descrito en términos de un lagrangiano, es una consecuencia de la invarianza de  $L$  bajo traslaciones del sistema de coordenadas, y viceversa. Verdaderamente, la prueba usando el lagrangiano es más útil que la que se realiza usando las ecuaciones del movimiento. En el caso del lagrangiano nos dice cómo definir el impulso total aun en el caso de potenciales dependiente de la velocidad, como ocurre en presencia de la fuerza de Lorentz entre partículas cargadas, donde el impulso canónico ya no es más el impulso cinético  $m\dot{q}_i$ . Por lo tanto, el impulso total definido como

$$P = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.211)$$

suma de impulsos canónicos cartesianos es conservado si el lagrangiano  $L$  obedece la ecuación (2.210).

Estas dos presentaciones de la ley de conservación del impulso lineal de un sistema de partículas ejemplifican el *teorema de Noether*. Este teorema, como veremos, establece en general la relación de una simetría con una ley de conservación. Es importante destacar nuevamente que el teorema se refiere a simetrías continuas, sean de carácter geométrico o internas.

La otra simetría fundamental de la mecánica surge de la invarianza del lagrangiano frente a rotaciones, consecuencia directa de la isotropía del espacio para un sistema cerrado de partículas. No existe un sistema de coordenadas con orientación privilegiada para describir el sistema. La magnitud conservada correspondiente es el impulso angular del sistema mecánico. El razonamiento a seguir es el mismo que en caso de impulso lineal. Como en aquel caso, se restringe el análisis a transformaciones infinitesimales de los ejes coordenados. Aquí se realiza una rotación en la cantidad  $\delta\theta$ , alrededor de un eje  $\vec{n}$ . Las coordenadas y velocidades de las partículas en el sistema del centro de masa cambian en consecuencia de acuerdo a

$$\delta\vec{r} = \delta\theta \vec{n} \wedge \vec{r}; \quad \delta\dot{\vec{r}} = \delta\theta \vec{n} \wedge \dot{\vec{r}};$$

por lo tanto,

$$L(\vec{r} + \delta\theta \vec{n} \wedge \vec{r}, \dot{\vec{r}} + \delta\theta \vec{n} \wedge \dot{\vec{r}}) = L(\vec{r}, \dot{\vec{r}}).$$

Desarrollando en serie a primer orden, usando la definición de impulso generalizado, las ecuaciones de movimientos y suponiendo además que  $\delta\theta$  y  $\vec{n}$  son arbitrarios, después de un poco de álgebra se obtiene la cantidad conservada

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \wedge \vec{p}_i, \quad (2.212)$$

que es el impulso angular del sistema de  $N$  partículas medido en el sistema del centro de masa. Respecto de un sistema inercial arbitrario, en el cual el centro de masa tiene coordenada  $\vec{a}$ , el impulso angular, obviamente también conservado, tiene la forma

$$\vec{J}' = \vec{J} + \vec{a} \wedge \vec{P},$$

donde  $\vec{P}$  es el impulso del centro de masa del sistema de partículas.

### 2.6.1. Simetrías de campos clásicos

En esta sección exploraremos la conexión entre transformaciones de simetría y leyes de conservación para campos clásicos, en forma equivalente al tratamiento que hicimos para sistemas de partículas. Este análisis nos conducirá a la construcción del tensor de energía-impulso de un campo como consecuencia de las simetrías. Restringiremos el estudio a los casos simples de campos escalares y campos vectoriales. Obviamente, este último corresponde al campo electromagnético. El estudio de estos dos casos particulares es suficiente para introducir las ideas modernas sobre interacciones fundamentales. Notemos, sin embargo, que existen otras representaciones del grupo de Lorentz que no hemos explorado. Tal es el caso de las espinoriales, base de la teoría de Pauli del electrón en términos de la ecuación de Schrödinger y luego de la teoría relativista de Dirac.

Clásicamente, campos y partículas son objetos diferentes. Por lo tanto, sus descripciones no están en un mismo pie de igualdad. La teoría cuántica de campos es el camino actual para sintetizar estos dos conceptos y constituye el marco adecuado para la descripción de las interacciones fundamentales de la materia. En este contexto, las interacciones son mediadas por campos y por sus partículas asociadas, que surgen del proceso de cuantificación. Como siempre, el campo electromagnético y sus partículas asociadas, los fotones, son el ejemplo característico.

Aunque los campos que aparecen en una teoría cuántica son magnitudes que tienen el carácter de operadores, nosotros nos restringiremos al análisis de la interacción entre campos clásicos, que son funciones ordinarias. Mostraremos fundamentalmente cómo la invarianza de gauge y la ecuación de continuidad de la corriente eléctrica están ligadas a un principio de simetría. Este punto de vista constituye la forma contemporánea de introducir las interacciones de las partículas elementales.

Sea entonces un sistema de campos cuyas ecuaciones de movimiento están determinadas por la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L} \left( \Phi_\alpha, \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu} \right),$$

donde el índice  $\alpha$  rotula el número del componentes del campo. Se ha supuesto que la densidad lagrangiana no es función explícita de las coordenadas espacio-temporales.

Supongamos ahora que el sistema de campos representado por esta acción permanece invariante bajo un cierto grupo de transformaciones de las coordenadas y de los campos

$$\begin{aligned}x_\mu &\rightarrow x'_\mu \\ \Phi_\alpha(x) &\rightarrow \Phi'_\alpha(x')\end{aligned}$$

o dicho en otros términos, que las ecuaciones de movimiento determinadas por la acción, son invariantes frente a un grupo de transformaciones de las coordenadas, de los campos, o bien de ambos simultáneamente. Exigir esto es equivalente a pedir que la acción permanezca sin cambios, es decir,

$$\int_{R'} d^4x' \mathcal{L} \left( \Phi_\alpha(x'), \frac{\partial \Phi_\alpha(x')}{\partial x'_\mu} \right) = \int_R d^4x \mathcal{L} \left( \Phi_\alpha(x), \frac{\partial \Phi_\alpha(x)}{\partial x_\mu} \right). \quad (2.213)$$

Esta igualdad puede ser modificada por la integral de una cuadrivergencia. Esta posibilidad no será tomada en cuenta, por razones de simplicidad y porque en la mayoría de los problemas de interés físico carece de importancia.

Como fue el caso al tratar un sistema de partículas, si las transformaciones están ligadas a un grupo continuo de simetría, basta con considerar cambios infinitesimales

$$\begin{aligned}x_\mu &\rightarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \\ \Phi_\alpha(x) &\rightarrow \Phi'_\alpha(x') = \Phi_\alpha(x) + \delta \Phi_\alpha(x).\end{aligned} \quad (2.214)$$

Buscamos ahora las consecuencias de la invarianza manifestada a través de la ecuación (2.213). Para ello comenzamos por transformar la integral sobre el dominio  $R'$  en una integral sobre el dominio  $R$ . Este proceso requiere el análisis del jacobiano de la transformación

$$d^4x' = \det \left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| d^4x. \quad (2.215)$$

Si hacemos uso de la identidad

$$\det M = e^{\text{Traza}(\ln M)}$$

en relación con

$$M = \left\| \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \right\| = \left\| \delta_\nu^\mu + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu} \right\|$$

tenemos que

$$(\ln M)_\nu^\mu = \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\nu},$$

donde se hizo uso explícito de la transformación infinitesimal (2.214). Luego, en la misma aproximación

$$\det M = 1 + \sum_\mu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\mu}$$

de modo que la ecuación (2.215) se reduce a

$$d^4 x' = \left( 1 + \sum_{\mu} \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right) d^4 x. \quad (2.216)$$

El próximo paso es desarrollar en serie el argumento de la densidad lagrangiana en el primer miembro de la ecuación (2.213). Para ello debemos recordar que hemos hecho un cambio de variables de  $x' \rightarrow x$  y por lo tanto debemos ser cuidadosos al realizar las variaciones.

El cambio que sufre una función arbitraria, cuando se somete a una variación infinitesimal como la propuesta en (2.214), es

$$\delta g = \tilde{g}(x_{\mu} + \delta x_{\mu}) - g(x_{\mu}) = \tilde{g}(x_{\mu}) - g(x_{\mu}) + \delta x_{\mu} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial x_{\mu}} + \mathcal{O}(\delta x)^2$$

A  $\mathcal{O}(\delta x)$ , podemos reemplazar  $\partial \tilde{g} / \partial x_{\mu}$  por  $\partial g / \partial x_{\mu}$ . Luego

$$\delta g = \delta_x g + \delta x_{\mu} \frac{\partial g}{\partial x_{\mu}}, \quad (2.217)$$

donde se ha introducido la variación funcional en el mismo punto del espacio-tiempo, mediante

$$\delta_x g = \tilde{g}(x_{\mu}) - g(x_{\mu}).$$

Vemos entonces que la operación  $\delta$  es equivalente a efectuar una variación de la función, manteniendo fijas las coordenadas, sumadas al cambio proveniente de la variación de las coordenadas.

Por lo tanto, la densidad lagrangiana variada se escribe como

$$\begin{aligned} & \mathcal{L} \left( \Phi_{\alpha} + \delta_x \Phi_{\alpha}, \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \delta_x \left( \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right) \right) = \\ & = \mathcal{L} \left( \Phi_{\alpha}, \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha}} \delta_x \Phi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \delta_x \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}. \end{aligned} \quad (2.218)$$

Usando ahora las ecuaciones (2.216) y (2.218) en (2.213) y reteniendo sólo los términos de primer orden, obtenemos

$$\int_R d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha}} \delta_x \Phi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \delta_x \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \mathcal{L} \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right\} = 0. \quad (2.219)$$

Ya que  $\mathcal{L}$  no depende explícitamente de las coordenadas, el último término de la igualdad anterior se puede escribir

$$\mathcal{L} \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} [\mathcal{L} \delta x^{\mu}]. \quad (2.220)$$

A su vez, ya que  $x_{\mu}$  no cambia para variaciones funcionales  $\delta_x$ , podemos intercambiar variación con derivada parcial, de tal forma que la ecuación anterior resulta

$$\int_R d^4 x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{\alpha}} \delta_x \Phi_{\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}}} \frac{\partial \delta_x \Phi_{\alpha}}{\partial x_{\mu}} + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\mathcal{L} \delta x^{\mu}) \right\} = 0.$$

Invirtiendo el segundo término de esta expresión, obtenemos

$$\int_R d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_\alpha} \delta_x \Phi_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \right) \delta_x \Phi_\alpha + \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta_x \Phi_\alpha \right) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\mathcal{L} \delta x^\mu) \right\} = 0.$$

Los campos de interés satisfacen las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange y por lo tanto los dos primeros términos de la última expresión se cancelan, dando lugar a

$$\int_R d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta_x \Phi_\alpha + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} = 0.$$

Ahora volvemos a expresar la variación  $\delta_x \Phi_\alpha$  en función de  $\delta \Phi_\alpha$ , como en la ecuación (2.217), de modo que

$$\int_R d^4x \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta \Phi_\alpha - \delta x_\mu \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu} + \mathcal{L} \delta x^\mu \right\} = 0.$$

Teniendo presente que el dominio  $R$  es arbitrario, esta última expresión conduce finalmente al resultado

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.221)$$

donde

$$J_\mu = \left( \mathcal{L} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu} \right) \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta \Phi_\alpha. \quad (2.222)$$

La condición (2.221) es la forma diferencial de la ley de conservación, expresada mediante una ecuación de continuidad. Vemos que la simetría no sólo provee la ley de conservación, sino también la forma específica de la corriente conservada en función del lagrangiano.

Teniendo presente que cualquier corriente que satisface una ley de conservación, como la ecuación (2.221), permite definir una carga conservada, resulta que

$$Q = \int J^0 d^3x \quad (2.223)$$

es una constante de movimiento. En otras palabras, la condición

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad (2.224)$$

representa la forma integral de la ley de conservación.

Hemos llegado a un importante resultado que podemos resumir así: cualquier grupo continuo de simetría da lugar a una ley de conservación para una carga  $Q$  que puede ser

construida, de acuerdo con (2.222) y (2.223), a partir del conocimiento del lagrangiano. Esta conexión entre un grupo continuo de simetría y una ley de conservación fue establecido, en el marco de la teoría clásica de campos, por Emmy Noether en el año 1918.

Una última consideración es de importancia: la corriente conservada no está unívocamente determinada. En efecto, cualquier término de la forma

$$\sum_{\rho=0}^3 \frac{\partial T^{\rho\mu}}{\partial x_\rho},$$

donde  $T^{\rho\mu}$  es un tensor de segundo rango antisimétrico, puede ser agregado sin modificar la ecuación de continuidad (2.221). Este hecho se debe a que la densidad lagrangiana está determinada a menos de una tetradivergencia, y consecuentemente, si bien las ecuaciones de movimiento no cambian por ese agregado, la carga conservada sí lo hace.

**2.6.2. Simetrías geométricas**

Recordemos que las simetrías más relevantes de un sistema con un número finito de grados de libertad surgen de la homogeneidad y de la isotropía del espacio-tiempo. Implementaremos ahora estas simetrías continuas al caso de campos, sistemas con infinitos grados de libertad y apelaremos al teorema de Noether previamente presentado.

Si la densidad lagrangiana no es función explícita de las coordenadas, entonces es invariante frente a traslaciones infinitesimales del espacio-tiempo

$$x_\nu \rightarrow x'_\nu = x_\nu + \varepsilon_\nu$$

y

$$\Phi'_\alpha(x') = \Phi_\alpha(x), \tag{2.225}$$

donde  $\varepsilon_\nu$  es un infinitésimo arbitrario, independiente de las coordenadas. Debemos puntualizar que las componentes del campo, satisfacen la condición dada en (2.225), independientemente de la representación del grupo de Lorentz a la que pertenezcan: escalar, vectorial, espinorial o, en general, tensorial. Por lo tanto

$$\delta x_\nu = \varepsilon_\nu \quad \delta \Phi_\alpha = 0.$$

Luego, a partir de las ecuaciones (2.221) y (2.222), tenemos

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L} \delta_{\mu\nu} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\nu}$$

y

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = 0,$$

donde hemos eliminado la constante  $\varepsilon_\nu$  de la definición. La cantidad conservada  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía-impulso del campo, que ya habíamos introducido.

En este caso, la forma integral de la ecuación de movimiento es la conservación del cuadvivector

$$P_\nu = \int \mathcal{P}_\nu d^3x \equiv \int T_{0\nu} d^3x,$$

donde

$$T_{0\nu} = \mathcal{L} \delta_{0\nu} - \sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_0}} \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\nu}.$$

Recordando entonces la definición de impulso canónico del campo, podemos escribir

$$T_{0\nu} = \mathcal{L} \delta_{0\nu} - \sum_{\alpha=1}^N \Pi_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\nu}.$$

La parte espacial de este tensor

$$P_i = - \int d^3x \sum_{\alpha=1}^N \Pi_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} \quad (2.226)$$

se identifica con el impulso lineal del campo, que en general no coincide con el impulso canónico. Por otro lado, la componente temporal

$$P_0 = \int d^3x \left( \sum_{\alpha=1}^N \Pi_\alpha \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_0} - \mathcal{L} \right) \quad (2.227)$$

se identifica con la energía, es decir, con el hamiltoniano del campo correspondiente a la descripción canónica.

Consideramos ahora rotaciones espacio-temporales infinitesimales, es decir, transformaciones infinitesimales homogéneas de Lorentz de la forma

$$x'_\mu = x_\mu + \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_\mu^\nu x_\nu \quad ; \quad \delta x_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_\mu^\nu x_\nu, \quad (2.228)$$

donde  $\varepsilon_\mu^\nu$  son parámetros arbitrarios constantes y pequeños. Estas transformaciones deben dejar invariante  $x \cdot x$

$$\delta \left( \sum_{\mu=0}^3 x^\mu x_\mu \right) = 0$$

y por lo tanto

$$\sum_{\mu=0}^3 x^\mu \delta x_\mu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_\mu^\nu x^\mu x_\nu = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 x^\mu x^\nu \varepsilon_{\mu\nu} = 0.$$

Como el producto  $x^\mu x^\nu$  es simétrico, la igualdad de arriba indica que  $\varepsilon_{\mu\nu}$  debe ser un tensor antisimétrico  $\varepsilon_{\mu\nu} = -\varepsilon_{\nu\mu}$ .

El siguiente paso es analizar cómo se transforman los campos. A diferencia del caso de las traslaciones, en este caso debemos tomar en cuenta el carácter tensorial de los campos frente a transformaciones de Lorentz.

Para el caso escalar, la respuesta es simple ya que la variación es nula

$$\delta\Phi = 0.$$

Para el caso vectorial, la ley de transformación es la misma que verifican las coordenadas

$$\delta V^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \varepsilon_\nu^\mu V^\nu,$$

es decir,

$$\delta V^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 g^{\mu\rho} \varepsilon_{\rho\nu} V^\nu.$$

Pero como  $\varepsilon_{\rho\nu}$  es antisimétrico, la parte simétrica de  $g^{\rho\mu} V^\nu$  no contribuye y tenemos

$$\delta V^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \varepsilon_{\rho\nu} \left( \frac{g^{\mu\rho} V^\nu - g^{\nu\mu} V^\rho}{2} \right);$$

más aún,

$$\delta V^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\alpha=0}^3 (g^{\mu\rho} \delta_\alpha^\nu - g^{\nu\mu} \delta_\alpha^\rho) \varepsilon_{\rho\nu} V^\alpha,$$

que escribimos como

$$\delta V^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \sum_{\alpha=0}^3 \Omega_\alpha^{\mu,\rho\nu} \varepsilon_{\rho\nu} V^\alpha, \quad (2.229)$$

donde

$$\Omega_{\mu\alpha}^{\rho\nu} = g^{\rho\mu} \delta_\alpha^\nu - g^{\nu\mu} \delta_\alpha^\rho. \quad (2.230)$$

En realidad, la ecuación (2.229) sirve como forma general para analizar la transformación de un tensor de cualquier rango. En efecto, se puede escribir

$$\delta\Theta^a = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \sum_b \Omega_b^{a,\rho\nu} \varepsilon_{\rho\nu} \Theta^b, \quad (2.231)$$

donde  $a$  y  $b$  representan al conjunto de índices que caracterizan al tensor  $\Theta$ .

Para los casos analizados el tensor  $\Omega_b^{a,\rho\nu}$  toma las formas particulares

$$\text{escalar: } \Omega^{\rho\nu} = 0 \quad ; \quad \text{vectorial: } \Omega_{b=\alpha}^{a=\mu,\rho\nu} = g^{\rho\mu} \delta_\alpha^\nu - g^{\nu\mu} \delta_\alpha^\rho,$$

mientras que para tensores superiores, el caso vectorial sirve de modelo para su construcción.



Reemplazando ahora en la ecuación (2.222) las variaciones de coordenadas y campos dados en (2.228) y (2.231), respectivamente, se obtiene

$$J^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 T^{\mu\nu} \varepsilon_\nu^\rho x_\rho + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Theta^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \varepsilon_{\rho\nu} \Theta^b.$$

En esta expresión usamos explícitamente la definición del tensor energía-impulso. Intercambiando el índice  $\rho$  en el primer término del miembro derecho y usando el carácter antisimétrico del tensor  $\varepsilon_{\rho\nu}$ , podemos reescribir esta ecuación como

$$J^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \left( \frac{T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu}{2} \right) \varepsilon_{\nu\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Theta^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \varepsilon_{\rho\nu} \Theta^b.$$

Finalmente, podemos factorizar  $\varepsilon_{\rho\nu}$  y si se tiene en cuenta que este tensor es constante, puede eliminarse para definir el tensor de tercer rango

$$M^{\mu\nu\rho} = T^{\mu\nu} x^\rho - T^{\mu\rho} x^\nu + \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Theta^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Theta^b,$$

que es un tensor conservado

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial M^{\mu\nu\rho}}{\partial x_\mu} = 0.$$

Debemos encontrar un significado físico a este nuevo tensor. Como su tetradivergencia es nula, la integral, extendida a todo el espacio, de la componente correspondiente a  $\mu = 0$

$$J^{\rho\nu} = L^{\rho\nu} + S^{\rho\nu}$$

es constante. Aquí

$$L^{\rho\nu} = \int d^3x T^{0\nu} x^\rho - T^{0\rho} x^\nu \quad ; \quad S^{\rho\nu} = \int d^3x \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Theta^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Theta^b.$$

Estos tensores son antisimétricos y por ello sus componentes espaciales están representadas como trivectores

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} = \int d^3x \vec{l} + \int d^3x \vec{s},$$

donde  $\vec{l}$  tiene como componentes

$$l^k = l^{ij} = T^{0j} x^i - T^{0i} x^j$$

y  $\vec{s}$  a

$$s^k = s^{ij} = \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Theta^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Theta^b = \sum_{a,b} \Pi^a \Omega_b^{a,ij} \Theta^b.$$

Teniendo en cuenta que  $\mathcal{P}_i = T_{0j}$  es claro que

$$\vec{l} = \vec{r} \wedge \vec{\mathcal{P}}.$$

Vemos entonces que  $\vec{l} d^3x$  es la contribución del elemento de volumen al impulso angular total y por lo tanto la integral

$$\vec{L} = \int \vec{l} d^3x$$

resulta el impulso angular del campo con respecto al origen. Más precisamente,  $\vec{L}$  es el *impulso angular orbital* del campo y  $\vec{l}$  la densidad de impulso angular orbital. Es importante resaltar que, excepto en el caso de campos escalares,  $\vec{L}$  no es una constante del movimiento. Para obtener una magnitud conservada, constante de movimiento, es preciso adicionar al impulso angular orbital, una nueva cantidad  $\vec{S}$  que caracteriza las propiedades de polarización del campo. Esta cantidad corresponde al spin de la partícula descrita por el campo y por ello a esta magnitud se la denomina impulso angular de spin o simplemente *spin del campo*.

El impulso angular de un campo, de manera similar al de un sistema de partículas, que se compone del impulso de angular del centro de masa respecto de un origen más la contribución del impulso angular del sistema respecto de su centro de masa, no es una cantidad invariante frente a traslaciones.

Finalmente hacemos una observación: reemplazando la expresión para  $M^{\mu\nu\rho}$  en la ecuación de continuidad, se tiene

$$T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho} + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Phi^b$$

o

$$T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho} + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial H^{\mu\rho\nu}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (2.232)$$

donde

$$H^{\mu\rho\nu} = \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Phi^b.$$

Es fácil ver entonces, al menos para el caso vectorial, que a partir de la ecuación que define  $\Omega_{ab}^{\rho\nu}$

$$H^{\mu\rho\nu} = -H^{\mu\nu\rho}. \quad (2.233)$$

En realidad, esta propiedad es válida en general.

Construyamos ahora un tensor  $G^{\mu\nu\rho}$  que satisfaga las siguientes condiciones

$$G^{\mu\rho\nu} = -G^{\rho\mu\nu} \quad (2.234)$$

y

$$\frac{1}{2} (G^{\mu\rho\nu} - G^{\mu\nu\rho}) = H^{\mu\rho\nu}. \quad (2.235)$$

Este tensor  $G^{\mu\nu\rho}$ , unívocamente determinado por las condiciones anteriores, está dado por

$$G^{\mu\nu\rho} = H^{\mu\rho\nu} + H^{\rho\nu\mu} + H^{\nu\rho\mu}.$$

Reemplazando la ecuación (2.235) en la (2.232), tenemos

$$T^{\rho\nu} - T^{\nu\rho} + \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{(G^{\mu\rho\nu} - G^{\mu\nu\rho})}{2} = 0$$

o

$$T^{\rho\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial G^{\mu\rho\nu}}{\partial x_\mu} = T^{\nu\rho} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial G^{\mu\nu\rho}}{\partial x_\mu},$$

relación que permite definir un nuevo tensor de energía-impulso

$$\tilde{T}^{\rho\nu} = T^{\rho\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial G^{\mu\rho\nu}}{\partial x_\mu}, \quad (2.236)$$

que resulta simétrico, contrariamente al tensor canónico, que no tiene ninguna simetría definida. La diferencia entre ellos es una tetradivergencia. Más aún, la ecuación (2.234) implica que

$$\sum_{\mu=0}^3 \sum_{\rho=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x_\rho} G^{\mu\rho\nu} = 0,$$

de modo que derivando con respecto a  $\rho$ , ambos miembros de la ecuación (2.236) se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial x_\rho} \tilde{T}^{\rho\nu} = 0.$$

Es decir, el nuevo tensor es conservado al igual que  $T^{\rho\nu}$ . Además, el tetravector energía-impulso puede calcularse a partir de ambos tensores

$$P^\nu = \int d^3x T^{0\nu} = \int d^3x \tilde{T}^{0\nu};$$

la prueba de esta igualdad surge de observar que el índice de suma  $\mu$  de la ecuación (2.236), para el caso particular de  $\rho = 0$ , sólo puede tomar valores espaciales y por lo tanto se reduce a una divergencia. Consecuentemente, si los campos caen rápidamente a cero en infinito, el término que diferencia ambos tensores, no da contribución neta a  $P^\nu$ .

Ahora reemplazamos el tensor  $T^{\rho\nu}$ , dado en (2.236), en la expresión de la densidad de impulso angular  $M^{\mu\nu\rho}$ , para obtener

$$M^{\mu\nu\rho} = \tilde{T}^{\mu\nu} x^\rho - \tilde{T}^{\mu\rho} x^\nu + \sum_{a,b} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi^a}{\partial x_\mu}} \Omega_b^{a,\rho\nu} \Phi^b + \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 x^\nu \frac{\partial G^{\beta\mu\rho}}{\partial x_\beta} - \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 x^\rho \frac{\partial G^{\beta\mu\nu}}{\partial x_\beta}$$

y en vista de la ecuación (2.235), se tiene

$$M^{\mu\nu\rho} = \tilde{T}^{\mu\nu}x^\rho - \tilde{T}^{\mu\rho}x^\nu - \frac{1}{2} \sum_{\beta=0}^3 \frac{\partial}{\partial x_\beta} (G^{\beta\mu\nu}x^\rho - G^{\beta\mu\rho}x^\nu).$$

Por lo tanto, el impulso angular definido por

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x M^{0\nu\rho}$$

se reduce a

$$J^{\nu\rho} = \int d^3x (\tilde{T}^{0\nu}x^\rho - \tilde{T}^{0\rho}x^\nu). \quad (2.237)$$

La contribución proveniente de la tetradivergencia da lugar a una divergencia y por lo tanto transformable en una integral sobre una superficie en el infinito, donde se supone que los campos se anulan.

Resumiendo, hemos dado el procedimiento canónico para construir el tensor de energía-impulso simétrico. Además se comprobó que el impulso al que da lugar no difiere del obtenido a partir del tensor no simétrico. Por último, expresamos el tensor densidad de impulso angular en función del tensor de energía-impulso simétrico que, debido a la simetría de este último, se conserva automáticamente. Esta fue la razón última para construir un tensor de energía-impulso simétrico; aunque como vimos, la interpretación de las componentes de impulso angular orbital y de spin se obtiene en la versión canónica.

### 2.6.3. Simetrías internas

Nuevas leyes de conservación se obtienen si la densidad lagrangiana posee simetrías internas, esto es, simetrías que no están relacionadas con el grupo de transformaciones de Lorentz. En este caso, supondremos que las coordenadas geométricas permanecen inalteradas en la transformación y sólo las funciones se transforman. Para apreciar mejor el significado de estas nuevas simetrías, es conveniente introducir dos ejemplos simples.

Consideremos en primer lugar un campo escalar complejo, teniendo en cuenta que la densidad lagrangiana correspondiente es real. De este modo, los tensores canónicos que de él se deriven y por consiguiente las cantidades físicas como energía, impulso, impulso angular, etc., resultan también reales. Supondremos además que la densidad lagrangiana es una función del campo  $\Phi(x)$ , del campo complejo conjugado  $\Phi^*(x)$  y de las respectivas derivadas. Consideremos por ejemplo la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}(\Phi^*, \Phi, \partial_\mu \Phi^*, \partial^\mu \Phi) = \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial x^\mu} - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (2.238)$$

donde el parámetro  $m$  tiene dimensiones de longitud inversa. Es fácil verificar que esta densidad lagrangiana es invariante frente a las transformaciones

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{i\alpha} \Phi(x) \quad (2.239)$$

$$\Phi^*(x) \rightarrow \Phi'^*(x) = e^{-i\alpha} \Phi^*(x), \quad (2.240)$$

donde se supone que el parámetro  $\alpha$ , que define la transformación, no depende de las coordenadas espacio-temporales, es simplemente una constante. Consecuentemente

$$\mathcal{L}(\Phi^*, \Phi, \partial_\mu \Phi^*, \partial^\mu \Phi) = \mathcal{L}(\Phi'^*, \Phi', \partial_\mu \Phi'^*, \partial^\mu \Phi')$$

de manera que la transformación anterior constituye una simetría que, al actuar sólo sobre los campos, es llamada *interna*. Este tipo de simetrías internas en las que el parámetro de la transformación es independiente del espacio-tiempo son llamadas *simetrías globales*, ya que involucran las mismas transformaciones de los campos en todos los puntos  $x$  del espacio-tiempo.

Es interesante hacer notar que las transformaciones que inducen un factor de fase en los campos como en (2.239) constituyen el grupo unitario  $U(1)$ . Los elementos del grupo son entonces

$$g = e^{i\alpha}$$

y satisfacen las reglas de composición de grupo, dadas por

$$g_1 g_2 = g_3 ; e^{i\alpha_1} e^{i\alpha_2} = e^{i\alpha_3} ; \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3.$$

La  $U$ , en la denominación del grupo, indica el carácter unitario, esto es, los elementos tienen módulo 1. El número 1 indica la dimensión de la representación más baja del grupo. Ciertamente se trata de un grupo continuo. En resumen, se dice que la densidad lagrangiana (2.238) tiene una simetría  $U(1)$ .

El teorema de Noether nos permite entonces construir la densidad de corriente conservada debida a esta simetría. A partir de las ecuaciones (2.239) y (2.240) podemos calcular la variación de los campos bajo la transformación. Si ésta es infinitesimal y como el grupo es continuo, podemos desarrollar en serie el exponencial y mantener sólo el término de orden más bajo en  $\alpha$ . Por lo tanto

$$\Phi'(x) = (1 + i\alpha)\Phi(x) ; \delta\Phi(x) = i\alpha\Phi(x)$$

y para el campo complejo conjugado

$$\delta\Phi^*(x) = -i\alpha\Phi^*.$$

Luego la ecuación (2.222) provee para la corriente la expresión

$$J_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha^*}{\partial x_\mu}} \delta\Phi_\alpha^* + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_\mu}} \delta\Phi_\alpha.$$

Ya que los elementos que constituyen esta corriente están dados, tenemos que

$$J_\mu = i \left[ \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_\mu} \right) \Phi - \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_\mu} \right) \Phi^* \right].$$

Observemos que la corriente es independiente de  $m^2$ . En general, esto será cierto aun cuando se agreguen términos al lagrangiano, siempre que ellos sean sólo función de los campos y respeten la simetría.

Por otra parte, como la simetría está conservada

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial J_{\mu}}{\partial x_{\mu}} = 0$$

existe una carga

$$Q = \int J_0 d^3x,$$

que es una constante de movimiento. Estamos tentados a identificar esta carga con una eventual carga eléctrica que transportaría el campo complejo. Debe quedar claro, sin embargo, que esta identificación no está justificada, a menos que se incluyan interacciones de este campo con el campo electromagnético y se haga un análisis cuántico.

Discutimos ahora un ejemplo, un poco más complejo que el anterior, que va a permitir la introducción, en su momento, de los campos de Yang-Mills, generalización del campo electromagnético para grupos de simetría mayores que  $U(1)$ .

Sea  $\Phi$  una matriz escalar de Lorentz

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

La densidad lagrangiana que define el modelo a estudiar es

$$\mathcal{L}(\Phi, \Phi^{\dagger}, \partial_{\mu}\Phi, \partial_{\mu}\Phi^{\dagger}) = \frac{\partial\Phi^{\dagger}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial\Phi}{\partial x^{\mu}} - m^2\Phi^{\dagger}\Phi, \quad (2.241)$$

donde  $\Phi^{\dagger}$  indica la matriz adjunta. En este caso, la densidad lagrangiana es invariante frente a transformaciones de la forma

$$\Phi \rightarrow \Phi' = U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\Phi = e^{i\vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}} \Phi, \quad (2.242)$$

donde las  $\tau^a$  están ligadas a las matrices de Pauli

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

por la relación  $\tau^a = \sigma^a/2$  y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son tres parámetros arbitrarios e independientes de las coordenadas espacio-temporales. Las  $U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  son los elementos del grupo  $SU(2)$ , o sea matrices unitarias de dimensión 2 con determinante 1. La ley de composición del grupo es el producto usual de matrices.

Las matrices  $\tau^a$  son los generadores del grupo. Como dijimos, tenemos tres parámetros para especificar cualquier elemento del grupo, por ello  $SU(2)$  es un grupo a tres parámetros.

Nuevamente, para determinar las corrientes conservadas a partir del teorema de Noether, de igual manera que se hizo para el caso  $U(1)$ , debemos determinar la variación que sufren los campos. De la ecuación (2.242) tenemos, para valores infinitesimales de los parámetros, que

$$\Phi'_j = \Phi_j + \delta\Phi_j \quad \text{con} \quad \delta\Phi_j = i \sum_{a=1}^3 \sum_{i=1}^2 \alpha^a \tau_{ji}^a \Phi_i; \quad j, i = 1, 2,$$

donde  $\tau_{ji}^a$  indican los elementos de las matrices de Pauli correspondientes, arriba explicitadas. Luego, la ecuación (2.222) brinda para la corriente

$$J_\mu = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\mu}} \delta \Phi_i = i \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\mu}} \sum_{a=1}^3 \sum_{i=1}^2 \alpha^a \tau_{ji}^a \Phi_i = i \sum_{a=1}^3 \alpha^a \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\mu}} \tau_{ji}^a \Phi_i,$$

que induce la definición

$$J_\mu^a = i \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_\mu}} \tau_{ji}^a \Phi_i, \quad (2.243)$$

de modo que

$$J_\mu = \sum_{a=1}^3 \alpha^a J_\mu^a.$$

Como los parámetros infinitesimales  $\alpha^a$  son arbitrarios y la corriente  $J_\mu$  debe conservarse, se deduce inmediatamente la conservación de cada una de las componentes  $J_\mu^a$

$$\frac{\partial J_\mu^a}{\partial x_\mu} = 0,$$

propiedad que da lugar, a su vez, a tres cargas conservadas

$$Q^a = \int d^3x J_0^a.$$

Estas cargas, que constituyen los generadores del grupo  $SU(2)$ , a diferencia del caso  $U(1)$ , no tienen conexión directa con la carga eléctrica. Su estudio e importancia se enmarcan en el contexto de las simetrías fundamentales para la descripción de fenómenos a nivel microscópico, donde los efectos cuánticos juegan un papel esencial. En este contexto,  $SU(2)$  es llamada simetría de isospin.

Hemos introducido estas simetrías de gauge generalizadas, que trascienden al electromagnetismo, con el objetivo de familiarizarnos con las ideas que subyacen a la comprensión actual de las interacciones a nivel microscópico. Ellas están ligadas a los campos de Yang-Mills que representan a las fuerzas básicas de la naturaleza. Es claro que podemos generalizar aún más los conceptos introducidos, considerando transformaciones ligadas a grupos unitarios más generales. Estos casos implican complicaciones formales de envergadura, sin que su análisis amplíe el panorama conceptual. Por ello no los incluimos en la presente discusión.

#### 2.6.4. Simetrías de gauge

Las simetrías discutidas en la sección anterior son simetrías globales, algunas veces llamadas también simetrías de gauge de primera especie. Los parámetros de las transformaciones de simetría son en ese caso independientes de las coordenadas espacio-temporales. Es decir, los campos se transforman de la misma manera y en la misma cantidad en todos los puntos del espacio-tiempo. Ahora consideraremos transformaciones cuyos parámetros son dependientes del espacio y del tiempo. Estas son llamadas *simetrías locales* o simetrías de gauge de segunda especie. Tales simetrías,

como veremos, se usan como generadoras de interacciones entre campos, las que, consecuentemente, se denominan *interacciones de gauge*. El ejemplo sobresaliente de este mecanismo de interacción lo constituye la electrodinámica. Hoy se supone que todas las interacciones fundamentales de la naturaleza son descriptas por alguna teoría de gauge. En todos los casos, se parte de una densidad lagrangiana invariante frente a ciertas transformaciones globales y luego se extiende la simetría a transformaciones locales. Esta extensión no es inmediata ya que, para mantener esa invarianza en la teoría, es necesario introducir nuevos campos, los llamados campos de gauge. Como veremos, cuando a un lagrangiano que describe la dinámica de un campo de materia se le exige invarianza de gauge local, necesariamente debe incluir un campo de gauge que se acopla con el anterior, provocando interacciones. El caso paradigmático lo constituye, como dijimos, la interacción electromagnética.

Para ilustrar estos principios, consideraremos el caso de un campo escalar complejo, que se transforman de acuerdo a la ecuación (2.239)

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U \Phi(x) = e^{i\alpha} \Phi(x) \quad (2.244)$$

para cambios de fase ligados a transformaciones  $U(1)$  globales de gauge. Ahora bien, si la transformación de gauge es *local*, es decir, si el parámetro  $\alpha$  pasa a ser función del espacio-tiempo, en lugar de (2.244) se tiene

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = U(x) \Phi(x) = e^{i\alpha(x)} \Phi(x), \quad (2.245)$$

donde  $\alpha(x)$  es una función real arbitraria. Esto es, las transformaciones de gauge en diferentes puntos ahora son diferentes y en principio no están conectadas unas con otras. En este caso, la derivada del campo se transforma de acuerdo a

$$\frac{\partial \Phi'(x)}{\partial x_\mu} = U(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\mu} + \Phi(x) \frac{\partial U(x)}{\partial x_\mu} = U(x) \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_\mu} + i \Phi(x) U(x) \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_\mu}.$$

Luego la densidad lagrangiana (2.241) deja de ser invariante frente a la transformación de gauge local, como consecuencia del término  $\Phi(x) \partial U(x) / \partial x_\mu$  que se ha agregado a la derivada del campo escalar.

Para hacer la teoría localmente invariante, debemos reemplazar la derivada  $\partial \Phi(x) / \partial x_\mu$  por alguna generalización adecuada, de manera de absorber el término extra producido por la transformación local. Como la derivada del campo escalar es un tetravector de Lorentz, se puede recurrir a un campo  $A_\mu(x)$  con carácter de tetravector que, para compensar el término extra, debe cambiar bajo una transformación local de gauge de acuerdo a

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \alpha(x)}{\partial x_\mu},$$

Este campo  $A_\mu(x)$  es el *campo de gauge*. Podemos definir entonces una derivada modificada mediante

$$\frac{D\Phi(x)}{Dx_\mu} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\lambda A_\mu(x) \right] \Phi(x) \quad (2.246)$$



En estas expresiones  $\lambda$  es un dado número real que fija la escala de  $A_\mu(x)$  relativa a  $\Phi(x)$  llamada *derivada covariante*. Ella permite compensar los cambios locales inducidos por la transformación y de esa manera hace posible comparar el campo escalar complejo en dos puntos cercanos para calcular efectivamente la derivada. Es fácil verificar que la derivada covariante del campo escalar se transforma de la misma manera que el campo  $\Phi(x)$ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{D\Phi'(x)}{Dx_\mu} &\equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i\lambda A'_\mu(x) \right] \Phi' = \\ &= U(x) \frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_\mu} + i\Phi(x) U(x) \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu} - i\lambda \left( A_\mu(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\alpha}{\partial x_\mu} \right) U\Phi(x) \\ \frac{D\Phi'(x)}{Dx_\mu} &= U(x) \frac{D\Phi(x)}{Dx_\mu} \end{aligned}$$

y análogamente para el complejo conjugado. En consecuencia, la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_\Phi = \sum_\mu \left[ \frac{D\Phi(x)}{Dx_\mu} \right]^* \frac{D\Phi(x)}{Dx_\mu} - m^2 \Phi^* \Phi \quad (2.247)$$

permanece invariante frente a transformaciones locales de gauge de la forma

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x) \quad (2.248)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu}. \quad (2.249)$$

En la discusión previa,  $A_\mu(x)$  aparece actuando como un campo externo. Sin embargo, para definir un sistema dinámico cerrado desde el punto de vista canónico es necesario incorporar un término que involucre la dinámica propia del campo de gauge, preservando la invariancia local. El término invariante de gauge más simple, que involucra  $\partial A_\mu(x)/\partial x_\mu$  es

$$\mathcal{L}_{e.m.} = -\frac{1}{4} \sum_\mu \sum_\nu F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (2.250)$$

donde

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} \quad (2.251)$$

es precisamente el tensor de campo electromagnético. El factor  $-1/4$  es convencional. La simetría global  $U(1)$  que fue promovida a una simetría local, se dice que ha sido «gaugeada».

Resumiendo, la teoría dinámica construida, la llamada *electrodinámica escalar*, está definida por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_\mu \sum_\nu F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \sum_\mu \left( \frac{D\Phi}{Dx_\mu} \right)^* \frac{D\Phi(x)}{Dx_\mu} - m^2 \Phi^* \Phi, \quad (2.252)$$

que determina las tres ecuaciones clásicas de movimiento a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x_\mu} = j^\nu$$

$$\sum_{\mu=0}^3 D_\mu D^\mu \Phi = 0.$$

Esta última se escribe explícitamente como

$$\left( \square^2 - 2i\lambda \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} - \lambda^2 \sum_{\mu=0}^3 A_\mu(x) A^\mu(x) \right) \Phi(x) = 0$$

y la tercera, que es la compleja conjugada de la anterior

$$\left( \sum_{\mu=0}^3 D_\mu D^\mu \Phi \right)^* = 0.$$

La corriente que aparece en la primera de estas ecuaciones es

$$j^\nu = i\lambda [\Phi^* D^\nu \Phi - (D^\nu \Phi)^* \Phi] = i\lambda \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x^\nu} \Phi - \Phi^* \frac{\partial \Phi}{\partial x^\nu} \right) - 2\lambda^2 \Phi^* \Phi A^\nu$$

y se conserva

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial j^\nu}{\partial x^\nu} = 0$$

debido a las ecuaciones de movimiento y a la antisimetría del tensor de campo  $F^{\mu\nu}$ . Podríamos decir entonces que, a partir del principio de invarianza de gauge, hemos «deducido» la interacción de la materia, representada en este caso por el campo escalar, con el campo electromagnético. Es decir, hemos aprendido a construir una densidad lagrangiana de interacción a partir de un principio general de invarianza. Es importante aclarar que si bien la simetría global fue transformada en una local, no aparecen nuevas corrientes conservadas. En efecto, la aplicación del teorema de Noether provee nuevamente la corriente  $j^\nu$  del caso global, sumada a alguna tetradivergencia arbitraria.

En este punto es interesante notar que la constante  $\lambda$ , en el tratamiento cuántico, podrá ser relacionada con la carga eléctrica observable  $q$  que transportan las partículas, cuantos del campo, a través de  $q = \hbar \lambda$ .

El principio básico de invarianza de gauge local que hemos presentado, puede ser extendido, sin dificultad, a otros campos de «materia». En particular, a campos con carácter espinorial, con los que se representa al electrón. Estos campos espinoriales pertenecen a representaciones del grupo de Lorentz que no hemos discutido en detalle. Ellas son imprescindibles, dentro de un esquema microscópico, para formalizar la Electrodinámica Cuántica, paradigma de teoría para las interacciones fundamentales.

Es interesante avanzar en la consideración del principio de gauge y analizar el caso del grupo  $SU(2)$ , ya que allí aparecerán nuevas propiedades del campo de gauge.

Para construir la densidad lagrangiana invariante de gauge para el caso  $SU(2)$ , seguimos un procedimiento análogo al caso abeliano  $U(1)$ . Primero introducimos los campos de gauge mediante el tetravector  $A_\mu^a$ , ( $a = 1, 2, 3$ ). Este índice  $a$  indica que se trata en realidad de tres campos de gauge. La regla general es que se necesita introducir un campo tetravector de Lorentz por cada generador del grupo de simetría. En el caso de  $SU(2)$  existen, como sabemos, tres generadores. El próximo paso es construir la derivada covariante correspondiente

$$\frac{D}{Dx_\mu} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \left[ I \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right] \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.253)$$

Aquí  $\vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu = \sum_{a=1}^3 \tau^a A_\mu^a$ , además  $I$  es la matriz unidad de  $2 \times 2$ , y  $g$  es la constante de acoplamiento equivalente a  $\lambda$ . De ahora en más llamaremos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$$

y usamos el campo

$$\tilde{B}_\mu = \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu, \quad (2.254)$$

que es una matriz en el espacio de parámetros del grupo  $SU(2)$ .

Para continuar, debemos exigir que  $D\Phi/Dx_\mu$  tenga la misma propiedad de transformación que  $\Phi$ , de modo que

$$\frac{D\Phi}{Dx_\mu} - \left( \frac{D\Phi}{Dx_\mu} \right)' = U(x) \frac{D\Phi}{Dx_\mu},$$

donde  $U(x) = e^{i\tilde{\alpha}(x)\cdot\vec{\tau}}$ . Esta exigencia asegura la invarianza de la densidad lagrangiana escrita en términos de la derivada covariante y a su vez define las transformaciones de gauge. Tenemos entonces

$$\left[ I \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu \right] (U(x)\Phi) = U(x) \left[ I \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \right] \Phi,$$

de donde

$$\left[ I \frac{\partial U(x)}{\partial x_\mu} - ig \vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu U(x) \right] \Phi = -ig U(x) \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu \Phi$$

y consecuentemente

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_\mu = U(x) \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g} \left[ \frac{\partial U(x)}{\partial x_\mu} \right] U^{-1}(x),$$

que puede reescribirse finalmente como

$$\tilde{B}'_\mu = U(x) \tilde{B}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g} \left[ \frac{\partial U(x)}{\partial x_\mu} \right] U^{-1}(x). \quad (2.255)$$

Esta es la ley de transformación de los campos de gauge. Aún podemos ir un poco más lejos, construyendo la ley de transformación de los campos frente a transformaciones infinitesimales, es decir,

$$U(x) \simeq 1 + i \vec{\alpha}(x) \cdot \vec{\tau} + \dots$$

Reemplazando en la ecuación anterior y manteniendo el orden lineal en  $\alpha$ , tenemos que

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_{\mu} = \vec{\tau} \cdot \vec{A}_{\mu} + i \sum_{a,b} \alpha^a A_{\mu}^b [\tau^a, \tau^b] + \frac{1}{g} \left( \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \cdot \vec{\tau} \right), \quad (2.256)$$

donde

$$[\tau^a, \tau^b] = \tau^a \tau^b - \tau^b \tau^a$$

es el conmutador de los generadores que satisfacen

$$[\tau^a, \tau^b] = i \varepsilon^{abc} \tau^c \quad (2.257)$$

definiendo el álgebra del grupo caracterizada por las constantes de estructura  $\varepsilon^{abc}$ . Estas constantes resultan ser en este caso las componentes del tensor totalmente antisimétrico en el espacio de tres dimensiones. Luego, la ecuación (2.256) se escribe

$$\vec{\tau} \cdot \vec{A}'_{\mu} = \vec{\tau} \cdot \vec{A}_{\mu} - (\vec{\alpha} \wedge \vec{A}_{\mu}) \cdot \vec{\tau} + \frac{1}{g} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_{\mu}} \cdot \vec{\tau}.$$

Ya que los tres componentes ( $a = 1, 2, 3$ ) de los campos de gauge son independientes, para una transformación infinitesimal se tiene

$$\vec{A}'_{\mu} = \vec{A}_{\mu} - \vec{\alpha} \wedge \vec{A}_{\mu} + \frac{1}{g} \frac{\partial \vec{\alpha}}{\partial x_{\mu}}.$$

Los resultados muestran que la transformación depende de las constantes de estructura del grupo, contenidas en el producto vectorial y además que los campos se transforman según una representación específica (la representación adjunta) del grupo bajo análisis. Esto lo diferencia del caso electromagnético y tiene su origen en la no conmutatividad del álgebra del grupo ligada a la naturaleza no Abelianiana del grupo de simetría.

Deberíamos ahora construir un tensor de campo y a partir de él un término cinético para los campos de gauge. Hay métodos muy elegantes para su construcción, e interpretación, basados en conceptos de la geometría diferencial. Su análisis excede largamente los objetivos de esta introducción.

Observemos que existe la siguiente forma simple para expresar el tensor de campo en el caso electromagnético

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} \left[ \frac{D}{Dx_{\mu}}, \frac{D}{Dx_{\nu}} \right],$$

donde el corchete indica nuevamente el conmutador. Debemos notar que, a pesar de su apariencia, la expresión anterior no tiene carácter de operador, ya que las derivadas se cancelan. Esta forma permite la extensión al caso no abeliano. Escribimos entonces

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{ig} \left[ \left( I \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \tilde{B}_\mu \right), \left( I \frac{\partial}{\partial x_\nu} - ig \tilde{B}_\nu \right) \right]$$

o

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{B}_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial \tilde{B}_\mu}{\partial x_\nu} + ig \left[ \tilde{B}_\mu, \tilde{B}_\nu \right]. \quad (2.258)$$

Vemos que en el caso no abeliano, el tensor de campo adquiere un término adicional originado en la no conmutatividad del álgebra del grupo. En general, el tensor del campo tiene una descomposición matricial de la forma

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \sum_{a=1}^3 F_{\mu\nu}^a \tau^a = \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{\tau}. \quad (2.259)$$

Consecuentemente, se propone para el término cinético de la densidad lagrangiana, que define la dinámica del campo de gauge, la forma

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{F}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} Tr \left( \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right), \quad (2.260)$$

donde  $Tr$  indica la traza del producto matricial y su objetivo es producir un escalar. La última igualdad se obtiene a partir de la identidad que satisfacen las matrices  $\tau^a$

$$Tr (\tau^a \tau^b) = \delta^{ab}.$$

Ahora debemos probar que este lagrangiano es invariante frente a transformaciones locales de gauge del grupo  $SU(2)$ , dadas por (2.255). No es difícil verificar, aunque sí un poco tedioso, que el tensor de campo se transforma de acuerdo a

$$\tilde{F}'_{\mu\nu} = U(x) \tilde{F}_{\mu\nu} U^{-1}(x).$$

Luego, reemplazando esta ley de transformación en la densidad lagrangiana, recordando que la matriz  $U$  es unitaria y que la traza permanece invariante con respecto a la rotación cíclica de las matrices, se obtiene la invarianza buscada.

La densidad lagrangiana para el campo escalar acoplado a los campos de gauge de  $SU(2)$ , llamados campos de Yang-Mills, se escribe entonces

$$\mathcal{L} = \left( \frac{D\Phi}{Dx^\mu} \right)^\dagger \frac{D\Phi}{Dx^\mu} - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{1}{4} Tr \left( \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} \right).$$

Las correspondientes ecuaciones de movimiento surgen, como es habitual, de las ecuaciones de Euler-Lagrange y resultan

$$D_\mu D^\mu \Phi = 0 \quad (D_\mu D^\mu \Phi)^\dagger = 0$$

$$\frac{\partial F^{\mu\nu,a}}{\partial x_\mu} - g \varepsilon^{abc} A_\mu^b F_{\mu\nu}^c = j^{\nu,a}, \quad (2.261)$$

donde la corriente  $j^{\nu,a}$  contiene tantos campos de materia como campos de gauge a través de la derivada covariante

$$j^{\nu,a} = -ig \left[ \left( \frac{D\Phi}{Dx^\nu} \right)^\dagger \tau^a \Phi - \Phi^\dagger \tau^a \left( \frac{D\Phi}{Dx^\nu} \right) \right].$$

Esta corriente es invariante de gauge, pero no es conservada. Por lo tanto, no es la corriente de Noether. Sin embargo, a partir de la ecuación de movimiento del campo de gauge (2.261), es fácil construir la corriente conservada de interés. Como  $F_a^{\mu\nu}$  es un tensor antisimétrico, tomando derivada en ambos miembros con respecto a  $\nu$ , tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} (j^{\nu,a} + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu,c}) = 0.$$

Luego

$$J^{\nu,a} = j^{\nu,a} + g \varepsilon^{abc} A_\mu^b F^{\mu\nu,c} \quad (2.262)$$

son las corrientes de Noether conservadas. Ellas no son invariantes de gauge como podría haberse sospechado. La segunda particularidad de esta corriente, que la diferencian nítidamente del caso abeliano, es que contiene una parte que sólo depende de los campos de gauge. Esto muestra que el campo de gauge no abeliano transporta carga, a diferencia del campo electromagnético que no lleva consigo carga eléctrica. Por lo tanto, las ecuaciones del campo de gauge contienen fuentes que son sus propios campos. En notación vectorial ellas son

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}^a + g \varepsilon^{abc} \vec{A}^b \cdot \vec{E}^c = j^{0,a} \quad (2.263)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}^a - \frac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} + g \varepsilon^{abc} (A^{0,b} \vec{E}^c + \vec{A}^b \wedge \vec{B}^c) = \vec{j}^a. \quad (2.264)$$

Estas ecuaciones generalizan a las ecuaciones de Maxwell. A diferencia de aquéllas, dependen de los campos y de los potenciales. Son no lineales aún sin fuentes de materia y por ello se torna muy complicado hallar sus soluciones.

### 2.6.5. Ruptura de simetría

Después de haber estudiado la simetría de gauge del electromagnetismo, es pertinente indagar si esta invarianza es verificada exactamente en la Naturaleza. Para el análisis de esta cuestión, estudiamos las eventuales consecuencias de una ruptura explícita de la simetría mediante la inclusión, en la densidad lagrangiana, del término

$$L_{rot} = \sum_{\mu=0}^3 \frac{1}{2} m^2 A^\mu A_\mu.$$

Es evidente que este término de masa no respeta la invarianza de gauge, ya que frente a una transformación

$$A^\mu A_\mu \rightarrow \left( A^\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x^\mu} \right) \left( A_\mu + \frac{\partial \alpha}{\partial x_\mu} \right) \neq A^\mu A_\mu.$$

Por lo tanto, la invarianza local no es compatible con un campo electromagnético masivo. Sin embargo, es interesante la verificación experimental de esta conclusión teórica. Para ello recordemos que, a partir de la densidad lagrangiana, podemos determinar las ecuaciones dinámicas del campo haciendo uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange, para obtener

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + m^2 A_\nu = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\nu,$$

que se conocen con el nombre de *ecuaciones de Proca*. En notación tridimensional estas ecuaciones se escriben

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0} \rho - m^2 \Phi \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= -\kappa'' \mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 4\pi\kappa' \left( \vec{J} + \frac{\epsilon_0}{4\pi\kappa} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) - m^2 \kappa'' c \vec{A}.\end{aligned}$$

En ellas, el término  $m^2 \kappa'' c \vec{A}$  produce modificaciones sobre diversas magnitudes medibles, las que a su vez pueden establecer límites sobre los posibles valores de la masa del fotón. Entre los métodos empleados para ese propósito, podemos mencionar la búsqueda de posibles desviaciones a la ley de Coulomb y medidas tendentes a verificar la relación de dispersión entre la energía y el vector de onda. La medida que ha establecido la cota más baja para la masa del fotón proviene de la determinación del campo magnético de Júpiter, realizada por la sonda espacial Pioneer 10 (L. Davis, A. S. Goldhaber, M. M. Nieto, *Physical Review Letters*, 35, 1402 (1975)). Allí se determinó

$$m < 4.5 \cdot 10^{-16} \frac{eV}{c},$$

que corresponde a un potencial de Coulomb modificado, de la forma

$$\Phi \sim \frac{e^{-\frac{r}{r_0}}}{r}$$

con  $r_0 > 4.4 \cdot 10^5$  Km. Notemos que la ruptura de la invarianza de gauge hace aparecer, en la ley de Coulomb modificada, esta longitud característica  $r_0$ , ligada a la inversa de una eventual masa del fotón.

Concluimos entonces, a partir de los resultados mencionados, que no existe ninguna evidencia experimental que indique una ruptura explícita de la invarianza de gauge del campo electromagnético.

Sin embargo, la posible ruptura de la simetría de gauge no se cierra con la discusión previa. En efecto, es sabido que el campo magnético en un superconductor es, en general, expulsado de su interior por el llamado efecto Meissner. Este fenómeno no ocurre de manera abrupta en la superficie del superconductor; el campo se atenúa

hacia el interior siguiendo una ley exponencial con una longitud característica, tal como si se tratase de un campo masivo. Aparece entonces la posibilidad de un mecanismo que produzca el efecto equivalente a una ruptura de la simetría de gauge sin que, en realidad, la simetría se haya roto explícitamente. Esto es, podría aparecer un mecanismo mediante el cual un campo de gauge adquiere masa, sin que la simetría se haya roto por el agregado de un término ad-hoc en el lagrangiano. Como veremos, la simetría no se pierde totalmente y podemos decir que ella queda *latente*.

Para visualizar cómo se puede producir el fenómeno mencionado, comenzaremos con un ejemplo simple correspondiente a la mecánica.

Consideremos una partícula de masa  $m$  en reposo, ubicada entre dos resortes iguales y que puede desplazarse sólo en la dirección del eje  $x$ , tal como se muestra en la parte a) de la figura (2.12).

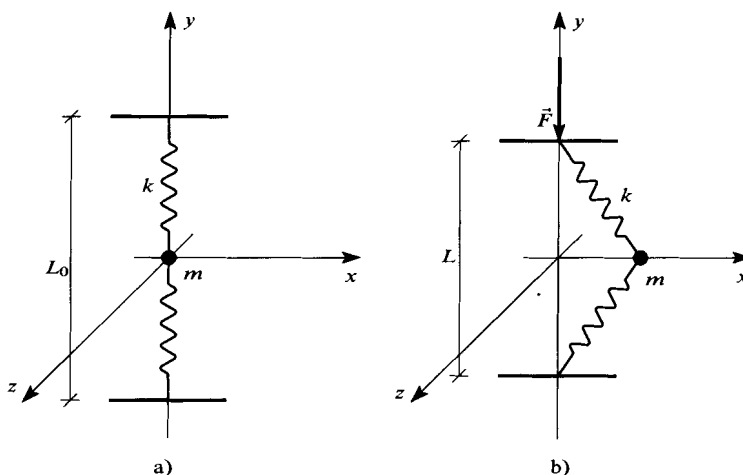


FIGURA 2.12: *Simetría latente en la mecánica.*

Es claro que este sistema presenta una simetría de reflexión respecto del plano  $y, z$ , que contiene los resortes.

Supongamos también que existe una fuerza aplicada en la dirección de los resortes, que tiene como efecto la modificación de la distancia entre sus extremos y, por ende, un cambio en la posición de equilibrio de la partícula [situación b) de la figura (2.12)].

Para analizar las diferentes posiciones de equilibrio del sistema, como función de la fuerza aplicada, basta con construir y analizar el potencial que actúa sobre la partícula. Si consideramos sólo pequeños desplazamientos a partir del plano, el potencial puede aproximarse por

$$V(x) = V_0 + ax^2 + bx^4 + \dots, \quad (2.265)$$

donde los parámetros están dados por

$$a = 2k(L - L_0) \quad ; \quad b = \frac{4kL_0}{L}.$$

Aquí  $L_0$  representa la longitud de los resortes antes de la aplicación de la fuerza y  $L$  la correspondiente longitud luego de que ella actuara. La constante  $k$  caracteriza los



resortes. En el potencial (2.265), el signo de  $b$  debe ser positivo, para garantizar la existencia de una cota inferior para la energía potencial. Por otra parte, el signo de  $a$ , que puede ser tanto positivo como negativo, conduce a dos posibles situaciones de equilibrio. Si  $a > 0$ , el potencial presenta un mínimo en el origen como se representa en la parte a) de la figura (2.13).

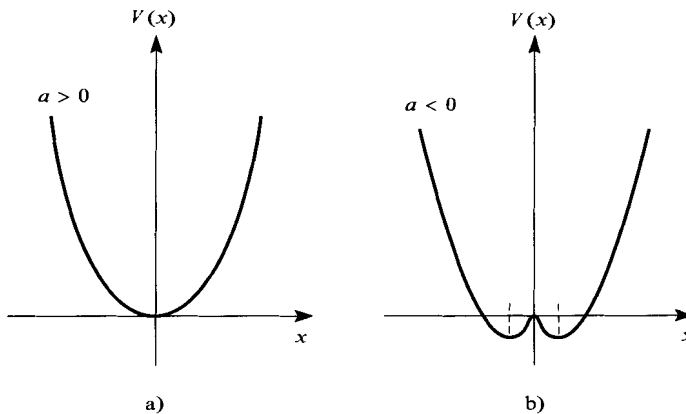


FIGURA 2.13: Potencial como función del signo de  $a$ .

Por el contrario, si  $a < 0$ , el potencial desarrolla dos mínimos como se indica en la parte b) de la figura mencionada. En ambos casos, el sistema mantiene la simetría de reflexión. Es decir, el lagrangiano que describe el movimiento de la partícula no perdió la simetría.

Notemos que en el primer caso, el sistema puede realizar pequeñas oscilaciones alrededor del origen. En el segundo, pequeños apartamientos del origen, llevarán la partícula hacia uno de los dos mínimos laterales. Sólo podrán existir pequeñas oscilaciones alrededor de alguno de estos mínimos. Claramente, la situación de equilibrio en el caso b) no tiene la simetría de reflexión inicial. Se habla entonces de ruptura espontánea de simetría, ya que si bien el lagrangiano es simétrico, las soluciones de equilibrio no lo son.

Estas ideas se pueden generalizar fácilmente al caso de simetrías continuas. Observemos que el plano de simetría, al que nos referimos en el ejemplo anterior, es realmente arbitrario ya que el sistema tiene, en principio, una simetría mayor. En efecto, si la partícula puede moverse ahora en el plano  $(x, z)$ , en lugar de estar confinada al eje  $x$ , la simetría de reflexión se vuelve una simetría axial alrededor del eje  $y$  determinado por los dos resortes. Ahora la forma del potencial resulta la figura de revolución alrededor de este eje de cada uno de los casos de la Figura (2.13). Las ecuaciones correspondientes surgen de reemplazar  $x$  por la coordenada radial, en el potencial anterior dado en (2.265). La simetría se manifiesta por el hecho que este potencial no depende de la coordenada angular.

Siguiendo un análisis similar al caso anterior, vemos que para  $a$  positivo, el origen es una posición de equilibrio a partir de la cual se pueden estudiar pequeñas oscilaciones. En el caso de  $a$  negativo, correspondiente a la Figura (2.14), el origen es inestable y existe entonces un continuo de estados de equilibrio.

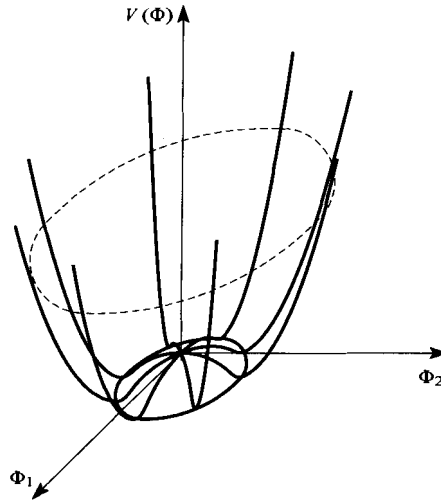


FIGURA 2.14: *Potencial con simetría continua latente.*

Notemos que este ejemplo simple constituye la esencia de lo que, en la teoría de la elasticidad, se conoce con el nombre de pandeo de una viga vertical, que sucede cuando una viga es sometida a un esfuerzo axial. Existe un valor del esfuerzo por encima del cual la viga se curva en una dirección cualquiera, que corresponde a algún valor sobre el círculo mínimo del potencial con simetría latente.

Veamos ahora cómo extender estas ideas a sistemas relativistas con infinitos grados de libertad. Analizaremos entonces los mecanismos para incorporar masa a los campos de gauge, sin perder la simetría a la altura de la densidad lagrangiana.

Recordemos que un sistema unidimensional de partículas en interacción elástica nos condujo, cuando el número de partículas crece sin límite, a la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - Y \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x}.$$

Suponemos que las características elásticas son isótropas, es decir, el módulo de Young es el mismo en ambas direcciones  $x$  y  $y$ . Entonces, la densidad lagrangiana se escribe

$$\mathcal{L} = \rho \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - Y \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right),$$

donde  $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$ . Observemos que en realidad,  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  se corresponden, en el caso mecánico anterior, a los desplazamientos a lo largo de los ejes  $x$  y  $z$ .

En el presente análisis debemos incorporar, previo al paso al límite, la posibilidad de que las partículas de masa  $m$  estén sometidas al potencial  $V$  dado en (2.265), en cada punto del retículo. Las ecuaciones anteriores se ven modificadas entonces por un término extra ligado a un potencial, función del campo escalar.

$$\mathcal{L} = \rho \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - Y \sum_{i=1}^2 \left( \frac{\partial \Phi^*}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \right) + V(\Phi),$$

donde  $V(\Phi)$ , en el modelo que estamos estudiando, es de la forma

$$V(\Phi) = \mu^2 \Phi^* \Phi + \lambda (\Phi^* \Phi)^2.$$

La extensión de esta densidad lagrangiana a una teoría de campos relativista invariante de gauge es inmediata, ya que sólo se incorpora el término  $\lambda (\Phi^* \Phi)^2$ , que obviamente no destruye la simetría  $U(1)$ .

Notemos que en el ámbito de una teoría clásica,  $\mu$  debe verse sólo como un parámetro con dimensión de inversa de longitud. No se lo debería considerar como una «masa». Esta identificación sólo queda justificada en el marco de una teoría cuántica.

Volviendo al potencial, vemos que el estado de equilibrio del sistema ocurre para  $\Phi = cte$ , mínimo de  $V(\Phi)$ . Estos mínimos ocurren sólo si  $\lambda > 0$ . En este caso, la posición del mínimo depende del signo de  $\mu^2$ . Para  $\mu^2 \geq 0$ , éste se encuentra en  $\Phi = 0$ , pero para  $\mu^2 < 0$  hay un círculo de mínimos en el plano complejo  $\Phi$  como se indica en la Figura (2.14), cuyo radio es

$$v^2 = -\frac{\mu^2}{2\lambda}. \quad (2.266)$$

Ahora bien, si se pretenden estudiar las pequeñas oscilaciones que realiza el campo alrededor de su valor de equilibrio, tenemos que, para el caso  $\mu^2 \geq 0$ , la densidad lagrangiana se reduce a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x^\nu} - \mu^2 \Phi_1^2 \right] + \frac{1}{2} \left[ \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial \Phi_2}{\partial x_\nu} \frac{\partial \Phi_2}{\partial x^\nu} - \mu^2 \Phi_2^2 \right],$$

donde los términos no lineales se han despreciado. Por consiguiente, el sistema presenta dos modos con igual longitud o «masa» característica, como surge de las ecuaciones de movimiento para los campos

$$(\square^2 + \mu^2)(\Phi_1 \quad \text{ó} \quad \Phi_2) = 0.$$

Si se ensayan soluciones del tipo

$$\Phi_1 \quad \text{ó} \quad \Phi_2 \cong e^{i k \cdot x}$$

entonces  $\omega^2 = c^2 k^2 + \mu^2$  es la correspondiente relación de dispersión.

La situación cambia drásticamente para  $\mu^2 < 0$ . En este caso se debe adoptar alguna solución entre el continuo de mínimos y en este procedimiento se rompe espontáneamente la simetría. La elección de un mínimo particular es inevitable para calcular las pequeñas fluctuaciones del sistema. Escribimos entonces

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \Psi(x) + i\Theta(x)],$$

que llevada a la densidad lagrangiana (2.6.5.), da lugar a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_\mu} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right) + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x_\mu} \right) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x^\mu} \right) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \Psi^2$$

$$-\lambda v \Psi (\Psi^2 + \Theta^2) - \frac{\lambda}{4} (\Psi^2 + \Theta^2)^2.$$

Despreciando ahora términos de orden cúbico y superiores, obtenemos para la densidad lagrangiana que describe las pequeñas oscilaciones

$$\mathcal{L}_{\text{aprox}} = \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mu}} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \Psi^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x_{\mu}} \right) \left( \frac{\partial \Theta}{\partial x^{\mu}} \right).$$

Concluimos que, a diferencia del caso anterior correspondiente a ( $\mu^2 \geq 0$ ), ahora existen dos tipos diferentes de modos en el sistema. Uno con una escala característica dada por ( $2\lambda v^2$ ) y otro que no tiene ninguna escala. Dicho de otra forma, si construimos las ecuaciones de movimientos para los campos y buscamos las relaciones de dispersión se obtiene

$$\omega^2 = c^2 k^2 + (2\lambda v^2) \quad \text{para el campo } \Psi$$

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \text{para el campo } \Theta,$$

de modo que el campo  $\Psi$  ejecuta oscilaciones radiales donde existe una fuerza de recuperación del tipo de oscilador armónico, mientras que el campo  $\Theta$ , que no tiene ningún tipo de fuerza restauradora, realiza oscilaciones angulares. Vemos también que existe una relación directa entre el parámetro  $v$  y la existencia del modo carente de escala o sin «masa». La existencia de un modo escalar sin «masa» debido a la ruptura espontánea de una simetría global o de primera especie es el contenido del *teorema de Goldstone*. El modo particular sin escala asociada se denomina, consecuentemente, *bosón de Goldstone*. Debemos insistir en que la simetría que está espontáneamente rota continúa siendo una simetría del sistema a nivel del lagrangiano. Es decir, si bien el estado base elegido no es invariante, la simetría está latente y se preserva precisamente debido a la existencia del modo de Goldstone. Este modo conecta todas las soluciones con la misma energía potencial mínima y por ello tiene energía de excitación nula. Esta conexión la realiza a través de la operación de simetría en cuestión.

Observamos finalmente que los términos que se despreciaron en la densidad lagrangiana corresponden a la interacción entre los dos modos que hemos descripto. Notemos también que el lagrangiano aproximado no es más simétrico. La consecuencia de eliminar términos es que la simetría aparece rota explícitamente.

Debemos recordar que el estudio del mecanismo de ruptura espontánea de simetría fue motivado por el interés de introducir una masa a los campos vectoriales de gauge y eventualmente al campo electromagnético. Observemos que este objetivo aún no fue logrado y parecería que sólo hemos complicado el formalismo con la adición de nuevos campos no masivos, los bosones escalares de Goldstone. Sin embargo, veremos de inmediato que se puede producir una especie de «milagro». En efecto, cuando ambos objetos son combinados apropiadamente, dan lugar a un campo de gauge masivo. A fin de visualizar este remarcable mecanismo, estudiamos la ruptura espontánea de una simetría de gauge  $U(1)$ ; esto es, una teoría de campos escalares complejos en presencia de un campo de gauge de tipo electromagnético.

La densidad lagrangiana con simetría de gauge está dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \left[ \frac{D\Phi(x)}{Dx_{\mu}} \right]^* \frac{D\Phi(x)}{Dx_{\mu}} - \mu^2 \Phi^* \Phi - \lambda (\Phi^* \Phi)^2, \quad (2.267)$$

que coincide con el modelo de la electrodinámica escalar tratado en la sección anterior y donde se ha incorporado el término  $\lambda(\Phi^*\Phi)^2$  necesario para tratar la ruptura espontánea de la simetría de gauge. Es obvio que el agregado del término extra no modifica la densidad lagrangiana frente a las transformaciones locales de gauge

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{iq\alpha(x)}$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{\partial\alpha(x)}{\partial x_\mu}.$$

Como ya discutimos previamente, hay dos casos posibles a considerar, dependiendo de los parámetros del potencial escalar. Para  $\mu^2 > 0$ , el potencial tiene un mínimo en  $\Phi = 0$ . Esto reduce el problema a un campo de gauge sin parámetro de masa y a dos bosones escalares cargados con parámetros de masa iguales. La situación cambia drásticamente cuando  $\mu^2 < 0$ . Como vimos, en este caso el potencial tiene un continuo de mínimos absolutos iguales, correspondientes a la ecuación (2.266). Para estudiar los modos clásicos de los campos, seguimos el procedimiento anterior y hacemos una traslación del campo escalar referido al mínimo del potencial. Éste es parametrizado convenientemente como

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= e^{i\frac{\Theta(x)}{v}} [v + \Psi(x)] \\ &= [v + \Psi(x) + i\Theta(x)] + \text{términos de orden superior.}\end{aligned}\quad (2.268)$$

Luego, la densidad lagrangiana, en la aproximación válida para el estudio de pequeñas oscilaciones, es

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{aprox}} &= -\frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} \sum_{\mu} A_{\mu} A^{\mu} + qv \sum_{\mu} A_{\mu} \frac{\partial\Theta}{\partial x^{\mu}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x_{\mu}} \right) \left( \frac{\partial\Psi}{\partial x^{\mu}} \right) - \frac{1}{2} (2\lambda v^2) \Psi^2 + \frac{1}{2} \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial\Theta}{\partial x_{\mu}} \right) \left( \frac{\partial\Theta}{\partial x^{\mu}} \right).\end{aligned}$$

Como esperábamos a partir del fenómeno de Goldstone, el campo escalar  $\Psi$ , que corresponde a oscilaciones radiales, tiene una masa  $2\lambda v^2 > 0$ . El campo de gauge parece haber adquirido una masa, aunque aparece mezclado con el campo escalar  $\Theta$ , correspondiente al modo no masivo. Sin embargo, todavía tenemos la posibilidad de efectuar una transformación de gauge, dado que la densidad lagrangiana tiene esa simetría local. La elección astuta de esta transformación, ligada a la parametrización (2.268) elegida arriba, es

$$\begin{aligned}\Phi \rightarrow \Phi' &= e^{-\frac{\Theta(x)}{v}} \Phi(x) \\ A_{\mu} \rightarrow A'_{\mu} &= A_{\mu} + \frac{1}{qv} \frac{\partial\Theta}{\partial x_{\mu}}.\end{aligned}$$

La primera es una rotación de fase del campo escalar, que lo transforma en un campo real, de modo que reemplazando la parametrización mencionada, tenemos

$$\Phi \rightarrow \Phi' = v + \Psi(x).$$

Si ahora volvemos a la densidad lagrangiana (2.267) y efectuamos esta transformación de gauge

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} + i q A'_{\mu} \right) (v + \Psi(x)) \right] \left[ \left( \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - i q A_{\mu} \right) (v + \Psi(x)) \right] - \mu^2 [v + \Psi(x)]^2 - \lambda [v + \Psi(x)]^4,$$

donde, como siempre,

$$F'_{\mu\nu} = \frac{\partial A'_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial A'_{\mu}}{\partial x_{\nu}}.$$

Desarrollando los distintos términos y en la aproximación de pequeñas oscilaciones, la densidad lagrangiana se reduce a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \sum_{\mu} \sum_{\nu} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} \sum_{\mu} A_{\mu} A^{\mu} + \frac{1}{2} \left[ \sum_{\mu=0}^3 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x_{\mu}} \right) \left( \frac{\partial \Psi}{\partial x^{\mu}} \right) + 2\mu^2 \Psi^2 \right]$$

más un término constante, irrelevante a la dinámica. Los demás términos, que no se toman en cuenta, constituyen la interacción entre modos.

Son oportunas algunas reflexiones sobre esta densidad lagrangiana: observemos que tenemos un modo escalar masivo, normalmente denominado bosón de Higgs; el campo de gauge ha adquirido masa proporcional a la ruptura del potencial y el campo de Goldstone no masivo ha desaparecido. Esto último induce a preguntarse dónde se encuentra ese grado de libertad. La respuesta es simple si recordamos que, al haber adquirido masa, el campo de gauge debe poseer también una componente de polarización longitudinal. Recordemos que, en su momento, habíamos discutido que el campo electromagnético libre tiene sólo dos grados de polarización. El campo de gauge masivo tiene, sin embargo, tres grados de polarización: dos transversales y uno longitudinal. En el ámbito de la teoría cuántica de campo, se acostumbra decir que el campo de gauge ha «comido» al bosón de Goldstone, para transformarse en un campo masivo y adquirir la componente longitudinal. Para comprobar que todo está en orden, notemos que antes de la ruptura existían cuatro grados de libertad: dos de los campos escalares  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  y dos correspondientes a las polarizaciones transversales del campo de gauge no masivo. Después de la ruptura espontánea, resta un campo escalar masivo que mantiene un grado de libertad, más un campo de gauge masivo con tres grados de libertad. De modo que en total se tienen nuevamente cuatro grados de libertad como en el estado inicial, tal como debía esperarse.

En conclusión, hemos mostrado que en una ruptura espontánea de la simetría, los campos de gauge adquieren masa y los bosones de Goldstone se desacoplan y desaparecen. Sus grados de libertad fueron usados para hacer posible la transición de campos no masivos a campos masivos. Este fenómeno, ya conocido en la teoría de la superconductividad, es llamado *mecanismo de Higgs*. En la teoría de la superconductividad, el modelo que hemos expuesto se identifica con la ecuación de Ginzburg-Landau para el parámetro de orden  $\Phi$ , acoplado al campo electromagnético y describe el comportamiento macroscópico de un superconductor.

Es importante destacar que el mecanismo de Higgs se extiende, sin dificultades, a los campos de Yang-Mills y está en la base de la teoría contemporánea de las fuerzas fundamentales de la Naturaleza. Si bien nuestro análisis se restringió a los aspectos clásicos de la teoría, debemos decir que el mecanismo adquiere su importancia fundamental en el ámbito de la teoría cuántica de campos. Allí permite construir la teoría de Glashow, Salam y Weinberg, modelo estándar de las interacciones electromagnéticas y débiles.

### 2.6.6. Problemas

- El lagrangiano

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x})^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 - \frac{1}{4} \lambda x^4$$

describe un oscilador armónico lineal sometido a una fuerza atractiva si  $\lambda > 0$  y si  $\omega$  es un número real, la masa  $m$  siendo positiva.

- 1. ¿Cuáles son los valores de  $x$  que minimizan la energía potencial si  $m > 0$ ,  $\lambda > 0$  y  $\omega^2 < 0$ ?
- 2. Romper la simetría del problema eligiendo uno de esos valores mínimos, para definir una nueva coordenada  $x'$  que se anula en el mínimo de la energía potencial y mostrar que en esa nueva variable, el lagrangiano define un oscilador con frecuencia real y fuerzas proporcionales a  $x'^2$  y  $x'^3$ . [LI,VII,1]

## 2.7. APÉNDICE CON ELEMENTOS DEL ANÁLISIS FUNCIONAL

Una funcional es una correspondencia entre una función y un número que se indica con

$$E[f],$$

donde el corchete reemplaza, para evitar confusiones, el paréntesis usual en la notación de funciones. Según esta notación,  $E$ , el valor de la funcional es un número y  $f$ , la variable, una función. Un ejemplo simple de una funcional en la física es el trabajo realizado a lo largo de una curva por una fuerza. Esta última oficia de función y el trabajo correspondiente es el valor de la funcional. Otro ejemplo simple, ahora en la matemática, es el valor de la derivada de una función genérica en un punto.

Los problemas variacionales relacionados con valores extremos de funcionales integrales, funcionales que dependen de todos los valores que una función toma en un intervalo, constituyen un capítulo especial del Análisis Funcional llamado *Cálculo de Variaciones*. Su objetivo fundamental es la búsqueda de extremos: máximos y mínimos, de una funcional. Este problema es análogo a la búsqueda de los extremos de una función en el cálculo diferencial.

El análisis riguroso de extremos de una funcional se fundamenta en el concepto de *diferencial funcional* introducido por Frechet y cuya definición está basada en la elección de una métrica adecuada en el espacio de funciones. Sin embargo y sin dejar de reconocer que la diferencial de Frechet provee el marco robusto para el análisis referido, por razones de simplicidad utilizaremos el punto de vista de Volterra, que

introdujo el concepto de *derivada funcional*. Este concepto simplifica notablemente las operaciones con las funcionales requeridas en la física, ligadas a principios de mínima acción.

Supongamos una función  $f(x)$  definida en un espacio de funciones en el intervalo  $[a,b]$  en el que existe una base apropiada  $\omega_n(x)$ . En consecuencia, la función  $f(x)$  puede ser desarrollada en la base según

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N c_n \omega_n(x).$$

Un ejemplo de este tipo de desarrollo es la serie de Fourier, donde las funciones base son senos y cosenos. Bajo las condiciones mencionadas, una funcional queda expresada por

$$E = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[ \sum_{n=1}^N c_n \omega_n(x) \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} e(c_1, c_2, \dots, c_N).$$

El miembro derecho de esta expresión indica que la funcional puede ser aproximada por una función,  $e$ , de un número indefinido de variables  $c_i$ . Precisamente, a partir de esta observación y basándose en el análisis de funciones de muchas variables, se puede definir la *derivada funcional* como la derivada parcial respecto de alguno de los infinitos coeficientes del desarrollo. Podemos avanzar en esta propuesta eligiendo como base, en general sobreabundante, una definida por funciones fuertemente concentradas en puntos y evaluar la derivada parcial respecto de alguno de los coeficientes de un tal desarrollo. Esto será equivalente a analizar la variación de la funcional cuando la función varía casi exclusivamente alrededor del punto correspondiente. De una manera más directa consideremos el cociente incremental de la funcional dividido por el valor del área bajo la función, variada en el entorno de un punto, cuando el área en cuestión tiende a cero tal como se indica en la Figura (2.15).

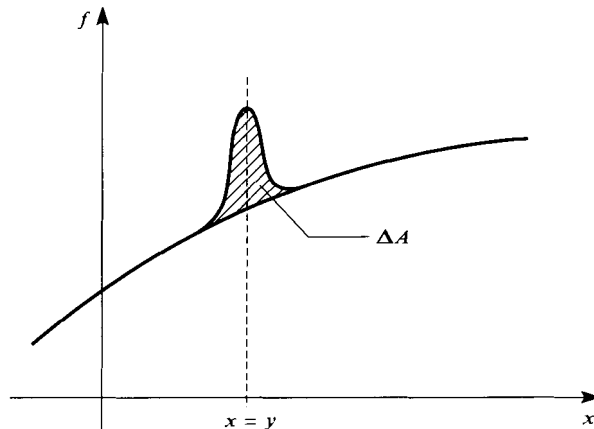


FIGURA 2.15: *Definición de la derivada funcional.*



Esta operación puede ser escrita matemáticamente de la siguiente forma

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{E[f + \delta f] - E[f]}{\Delta A},$$

donde  $\Delta A$  es el área sombreada de la Figura (2.15). Una forma de realizar una variación local, poco rigurosa pero práctica desde un punto de vista operativo, es

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{E[f + \varepsilon \delta(x - y)] - E[f]}{\varepsilon}.$$

El uso de la  $\delta$  de Dirac concentra la variación específicamente en el punto elegido y a la vez reduce el límite al de un parámetro que tiende a cero.

Es interesante notar que la derivada funcional es, a su vez, una función del punto alrededor del cual se realizó la variación.

Las reglas de derivación de una funcional son análogas a las de la derivada parcial de una función, de las cuales mencionamos

1. La derivada de una funcional constante es nula

$$\frac{\delta cte}{\delta f} = 0.$$

2. La derivada funcional de la suma de dos funcionales es la suma de las derivadas funcionales

$$\frac{\delta}{\delta f} (aE[f] + bF[f]) = a \frac{\delta E[f]}{\delta f} + b \frac{\delta F[f]}{\delta f}.$$

3. La derivada del producto de funcionales está dada por

$$\frac{\delta}{\delta f} (E[f]F[f]) = \frac{\delta E[f]}{\delta f} F[f] + E[f] \frac{\delta F[f]}{\delta f}.$$

4. La derivada funcional de una funcional sigue la regla de la cadena semejante a la derivada de una función de función en el análisis ordinario:

$$\frac{\delta}{\delta f} E[F[f]] = \int \frac{\delta E}{\delta F} \frac{\delta F}{\delta f} dx.$$

Algunos ejemplos ilustrativos sirven para aclarar estas propiedades:

- La derivada funcional de una función es por definición

$$\frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x) + \varepsilon \delta(x - y) - f(x)}{\varepsilon} = \delta(x - y).$$

- La derivada de la integral de una función, usando nuevamente la definición, es

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} \int f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\int \{f(x) + \varepsilon \delta(x - y)\} dx - \int f(x) dx}{\varepsilon} = 1.$$

Este resultado también se obtiene haciendo uso del primer ejemplo

$$\frac{\delta}{\delta f(y)} \int f(x) dx = \int \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} dx = \int \delta(x - y) dx = 1.$$

- Un caso particular muy interesante, desde el punto de vista práctico, es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(y)} \int \frac{\partial^m f^n(x)}{\partial x^m} dx &= \int \frac{\partial^m}{\partial x^m} \frac{\delta f^n(x)}{\delta f(y)} dx \\ &= \int \frac{\partial^m}{\partial x^m} \left\{ n f^{n-1}(x) \frac{\delta f(x)}{\delta f(y)} \right\} dx \\ &= [1 + (-1)^m] n \frac{\partial^m f^{n-1}(y)}{\partial y^m}. \end{aligned}$$

### *Diferencial funcional*

Veamos ahora cómo pasar de la derivada funcional a la diferencial de la funcional, es decir, el análogo a la relación entre derivadas parciales y la diferencial total de una función de varias variables. De acuerdo a la definición de derivada funcional, la expresión

$$\frac{\delta E[f]}{\delta f(y)} \delta f(y) dy$$

representa el incremento  $\delta_y E \equiv E[f + \delta f] - E[f]$ , para  $\delta f(y)$  diferente de cero solamente en la vecindad del punto  $y$ . Por lo tanto, el incremento total o diferencial de la funcional  $\delta E$ , cuando  $f(y)$  varía a  $f(y) + \delta f(y)$ , se obtiene por integración

$$\delta E[f] = \int \frac{\delta E[f]}{\delta f(y)} \delta f(y) dy. \quad (2.269)$$

Con el mismo espíritu vamos a introducir las derivadas funcionales de orden superior que escribimos

$$\frac{\delta^n E[f]}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)},$$

que resulta, como es evidente, una funcional de  $f$  y a su vez una función de las  $n$  variables  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Finalmente, se puede introducir, como en el caso de funciones ordinarias, el desarrollo en serie del tipo de Taylor para las funcionales

$$E[f + \delta f] = E[f] + \sum \frac{1}{n!} \int \frac{\delta^n E[f]}{\delta f(x_1) \cdots \delta f(x_n)} f(x_1) \cdots \delta f(x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

### *Extremos de una funcional*

A continuación vamos a analizar el problema de extremos de una funcional integral. Consideremos

$$E[f] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx,$$

donde  $F$  es una función continua de los tres argumentos, con derivadas continuas hasta segundo orden. Vamos a deducir la condición necesaria que debe satisfacer  $f$ , para que la funcional  $E[f]$  tenga un extremo. Para ello introducimos una nueva

función  $f + \delta f$ , variación en el entorno de la función que se supone hace extrema la funcional. Calculamos a partir de ésta, la variación o diferencial de la funcional, para obtener

$$\delta E = E[f + \delta f] - E[f] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, f + \delta f, f' + \delta f') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx.$$

Hacemos un desarrollo en serie de la función  $F$  y mantenemos el primer orden en  $\delta f$ . Suponemos además que las variaciones  $\delta f$  son nulas en los extremos y que vale la permutación  $\delta f' = d\delta f/dx$ . Mediante operaciones sencillas, básicamente integraciones por partes, resulta entonces

$$\delta E = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f dx, \quad (2.270)$$

luego los extremos ocurren para funciones  $f$  que aseguran que

$$\delta E = 0.$$

Comparando la expresión (2.270) con la ecuación (2.269), surge de inmediato que la derivada funcional es

$$\frac{\delta E}{\delta f} = \left( \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right)$$

y entonces la condición necesaria para la existencia de un extremo es precisamente

$$\frac{\delta E}{\delta f} = 0.$$

Consecuentemente, el problema de encontrar los extremos de una funcional integral diferenciable, en variaciones que no involucran a los extremos de integración, ha sido reducido a encontrar las soluciones de una ecuación diferencial que se denomina *ecuación de Euler*.

El procedimiento que acabamos de resumir puede ser extendido, sin dificultad, al caso más general de funciones  $F$  de varias variables y derivadas de orden superior.

Consideremos nuevamente la funcional (2.7) y admitamos ahora que no sólo varía la función  $f$  sino también los extremos de integración. Por lo tanto, la variación de la integral contiene, además del término usual, uno extra debido al cambio en el dominio de integración. Siendo más precisos, escribimos

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} E &= E[f + \delta f] - E[f] = \\ &= \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_1 + \delta x_1} F(x, f + \delta f, f' + \delta f') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx, \end{aligned}$$

que a su vez puede ser puesta en la forma

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}E = & \int_{x_0}^{x_1} F(x, f + \delta f, f' + \delta f') dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x, f, f') dx + \\ & + \int_{x_0 + \delta x_0}^{x_0} F(x, f + \delta f, f' + \delta f') dx + \int_{x_1}^{x_1 + \delta x_1} F(x, f + \delta f, f' + \delta f') dx \end{aligned}$$

los dos últimos términos proveen la contribución por variación del dominio, mientras que los dos primeros, la contribución usual. Sin embargo, ambos contribuyen con valores en los bordes. Sin entrar en los detalles del cálculo (para ello consultar: *A Course of Higher Mathematics*, volumen IV, Smirnov, Addison Wesley), presentamos el resultado de esta variación

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}E = & \left[ F(x_1, f_1, \left. \frac{df}{dx} \right|_1) - \left. \frac{df}{dx} \right|_1 \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_1 \right] \delta x_1 + \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_1 \delta f_1 - \\ & - \left[ F(x_0, f_0, \left. \frac{df}{dx} \right|_0) - \left. \frac{df}{dx} \right|_0 \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_0 \right] \delta x_0 + \left. \frac{\partial F}{\partial f'} \right|_0 \delta f_0 + \\ & + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial F}{\partial f} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial f'} \right) \delta f dx. \end{aligned}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a los valores de las variables, de las funciones y de sus derivadas evaluadas en los bordes. Este tipo de variaciones más generales son esenciales en la discusión de las leyes de conservación y el teorema de Noether.

### 3.1. GUÍAS DE ONDA

En esta sección estudiamos la propagación de ondas electromagnéticas guiadas por conductos o caños huecos de paredes conductoras. Consideramos el caso de sección transversal uniforme y de longitud suficientemente grande como para asegurar la presencia de simetría cilíndrica. Consecuentemente, la física de interés puede ser estudiada sobre cualquier plano perpendicular al eje del tubo. Este tipo de dispositivos se denominan guías de onda.

Ya que existen diferentes posibilidades referentes al tipo de sección del cilindro en cuestión, en cada caso surgirá el sistema de coordenadas adecuado para el tratamiento analítico del problema. En el interior de la guía supondremos un dieléctrico cualquiera, que en particular puede ser el vacío.

La propiedad importante a recordar en el estudio de guías de onda es que allí las ondas son estacionarias en la dirección transversal al eje de la guía, pero se propagan a lo largo de esta última dirección.

Como es fácil imaginar, el tratamiento de guías de onda puede llegar a grados de sofisticación muy grandes, ya que puede tratarse de tubos de sección simplemente conexa o sección múltiplemente conexa (con agujeros); tubos coaxiales, paredes perfectamente conductoras o paredes de conductividad finita con la consiguiente pérdida por absorción, etc. Vale la pena mencionar también que existen guías de onda puramente dieléctricas. Aquí la pared exterior del tubo cilíndrico está definida por la interfase entre dos dieléctricos, por ejemplo, algún plástico apropiado y aire. El ejemplo más relevante de este caso lo constituyen las fibras ópticas de uso extendido en la transmisión de señales electromagnéticas del rango óptico.

Una guía de onda puede transformarse en una cavidad resonante si se le colocan «tapas», es decir, si se define un volumen cerrado. En este último caso, al que dedicaremos posteriormente un estudio detallado, el sistema sólo mantiene en su interior ondas estacionarias si las pérdidas óhmicas en las paredes son despreciables.

Estamos interesados entonces en la solución de la ecuación homogénea de las ondas en presencia de fronteras conductoras. Este es un problema de gran interés práctico. Es el caso, por ejemplo, de ondas electromagnéticas de longitudes de onda del orden de los centímetros, llamadas microondas, que tienen diversas aplicaciones tecnológicas. Para su propagación, se necesita precisamente disponer de tubos conductores de secciones apropiadas, de dimensiones similares a las longitudes de onda en cuestión.

El análisis que sigue lo realizamos en el caso de superficies conductoras perfectas, de conductividad infinita. Las condiciones de contorno discutidas en la sección (1.3.5) nos enseñan que en la región inmediata a la superficie de esos conductores ideales, sólo pueden existir la componente normal del campo eléctrico  $E_{\perp}$  y la componente tangencial de intensidad magnética  $H_{\parallel}$ .

Si la conductividad de los conductores que definen la guía fuera finita, se debe tomar en cuenta el decaimiento exponencial de los campos hacia el interior de los mismos. Este hecho, como vimos al estudiar el efecto pelicular, provee diferencias de fase entre los campos e implica que inmediatamente sobre la superficie de los conductores existan pequeñas componentes de los campos, tangencial de  $\vec{E}$  y normal de  $\vec{H}$ . Estas componentes darán lugar a pérdidas óhmicas, las que en principio pueden asimilarse a corrientes superficiales de manera de continuar con el tratamiento que desarrollamos para conductores perfectos.

A fin de analizar las posibles oscilaciones electromagnéticas que pueden propagarse por el interior de la guía de ondas, comenzamos por suponer, como es habitual, que los campos dependen armónicamente del tiempo. Además usamos la notación exponencial compleja, como en otras oportunidades, a fin de simplificar el tratamiento. Al final del cálculo deberemos tomar la parte real o imaginaria del resultado, según corresponda, en acuerdo con una señal de entrada coseno o seno.

Tomando al eje  $x$  como la dirección longitudinal de la guía, suponemos para los campos la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.2)$$

y vamos con ellos a las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones vectoriales resueltas en componentes conducen a las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r H_x \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - ik E_z &= i\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r H_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - ik E_y &= -i\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r H_z \end{aligned} \quad (3.3)$$

a partir de la ley de Faraday y a las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi \kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi \kappa} \right) E_x \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - ik H_z &= 4\pi \kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi \kappa} \right) E_y \end{aligned}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} - ik H_y = -4\pi\kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi\kappa} \right) E_z \quad (3.4)$$

como consecuencia de la ley de Ampère-Maxwell.

A continuación comprobamos que las ondas que se propagan en la guía satisfaciendo las ecuaciones anteriores pueden ser divididas en principio en dos tipos con existencia independiente. Estos tipos de ondas llevan usualmente el nombre de modos *transversal eléctrico (TE)* y *transversal magnético (TM)*, respectivamente.

### a) Modo transversal eléctrico

Está constituido por las llamadas ondas  $H$ , debido a que está caracterizado por la condición

$$E_x = 0 \quad ; \quad H_x \neq 0. \quad (3.5)$$

Es decir, sólo el campo magnético posee componente en la dirección de propagación. Cuando se aplica la condición (3.5) a las ecuaciones anteriores, resultan de inmediato los dos conjuntos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= i\omega\kappa'' \mu_0 \mu^r H_x \\ -ik E_z &= i\omega\kappa'' \mu_0 \mu^r H_y \\ ik E_y &= i\omega\kappa'' \mu_0 \mu^r H_z \end{aligned} \quad (3.6)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - ik H_z &= 4\pi\kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi\kappa} \right) E_y \\ \frac{\partial H_x}{\partial y} - ik H_y &= -4\pi\kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi\kappa} \right) E_z. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Eliminando ahora  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  y  $H_z$  entre esos dos grupos de relaciones, surge para la componente  $H_x$ , la ecuación

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = \left[ k^2 - 4\pi\kappa' \left( \sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi\kappa} \right) i\omega\kappa'' \mu_0 \mu^r \right] H_x. \quad (3.8)$$

Esta ecuación puede aún simplificarse si recordamos que el interior de la guía contiene un dieléctrico y por lo tanto allí se verifica que

$$\sigma \ll \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi\kappa},$$

de manera que podemos escribir

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} = -\mathcal{H}^2 H_x \quad (3.9)$$

con la definición

$$\mathfrak{H}^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - k^2, \quad (3.10)$$

donde recordamos que

$$v^2 = \frac{\kappa/(\epsilon_0 \epsilon^r)}{\kappa' \mu_0 \mu^r \kappa''}$$

es la velocidad de propagación de la onda en el medio dieléctrico sin fronteras. Usando ahora las ecuaciones (3.6) y (3.7), se obtienen de inmediato las restantes componentes de los campos eléctrico y magnético

$$H_y = \frac{ik}{\mathfrak{H}^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$H_z = \frac{ik}{\mathfrak{H}^2} \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (3.12)$$

$$E_y = \mu_0 \mu^r \kappa'' \frac{\omega}{k} H_z \quad (3.13)$$

$$E_z = -\mu_0 \mu^r \kappa'' \frac{\omega}{k} H_y. \quad (3.14)$$

Estas expresiones pueden escribirse en forma más compacta en términos de las componentes transversales de los campos. Introduciendo el operador

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \equiv \frac{\partial \cdot}{\partial y} \check{j} + \frac{\partial \cdot}{\partial z} \check{k}$$

resulta

$$\vec{H}_\perp \equiv H_y \check{j} + H_z \check{k} = \frac{ik}{\mathfrak{H}^2} \vec{\nabla}_\perp H_x \quad (3.15)$$

$$\vec{E}_\perp \equiv E_y \check{j} + E_z \check{k} = \mu_0 \mu^r \kappa'' \frac{\omega}{k} \check{i} \wedge \vec{H}_\perp. \quad (3.16)$$

En definitiva, una vez conocida la componente longitudinal  $H_x$  de  $\vec{H}$  los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  quedan completamente determinados. Este es el origen del nombre de ondas  $H$ . Solamente resta entonces exigir a las soluciones las adecuadas condiciones de contorno.

Si, como hemos supuesto, las paredes de la guía son perfectamente conductoras, entonces la componente tangencial  $E_\parallel$  del campo eléctrico se debe anular en la superficie. Si se trata de una guía de ondas de sección rectangular cuyas paredes son paralelas a los ejes  $y$  y  $z$ , debemos entonces exigir la anulación de  $E_y$  y de  $E_z$  en la superficie de la guía. Las ecuaciones (3.11)-(3.14) implican que

$$\frac{\partial H_x}{\partial y} = \frac{\partial H_x}{\partial z} = 0 ; \text{ en la superficie}$$



o en general, para guías con paredes de conductividad infinita se debe tener

$$\frac{\partial H_x}{\partial n} = 0 ; \text{ en la superficie,} \quad (3.17)$$

donde  $n$  indica la normal a la pared de la guía.

Las coordenadas  $y$  y  $z$  pueden ser llamadas transversales y consecuentemente a partir del operador transversal

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.18)$$

la ecuación (3.9) para  $H_x$  puede escribirse en general como

$$\nabla_{\perp}^2 H_x + \mathcal{K}^2 H_x = 0 \quad (3.19)$$

sujeta a la condición de contorno (3.17). Es interesante notar que esta ecuación tiene exactamente la misma forma que la correspondiente a la amplitud de vibración de una membrana. Sin embargo en este último caso las condiciones de contorno son diferentes.

Estamos en presencia entonces de un típico problema de autovalores. En otras palabras, habrá soluciones para  $H_x$  sólo para ciertos valores de  $\mathcal{K}$ . Los autovalores

$$\mathcal{K}_m^2 ; m = 1, 2, \dots$$

que definen los diferentes modos  $TE$  de la guía. Es claro que para una dada frecuencia  $\omega$ , la constante de propagación o número de onda  $k$  quedará determinado para cada modo  $m$  a partir de (3.10) por

$$k_m^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \mathcal{K}_m^2. \quad (3.20)$$

Debe notarse que, dependiendo de la geometría de la guía bajo consideración, puede resultar de interés práctico usar un índice múltiple para individualizar los modos, en lugar del  $m$  único indicado arriba.

Debido a que buscamos soluciones oscilantes dentro de la guía, debemos garantizar que  $k_m^2$  no sea negativo. Consecuentemente se define la *frecuencia de corte*, del modo en cuestión, mediante

$$\omega_{c,m} = v \mathcal{K}_m, \quad (3.21)$$

donde la última igualdad surge de recordar la definición de velocidad de propagación de la onda electromagnética. Volviendo a la expresión (3.20), se puede escribir

$$k_m = \frac{1}{v} \sqrt{\omega^2 - \omega_{c,m}^2}, \quad (3.22)$$

donde queda claro que para  $\omega > \omega_{c,m}$  el número de onda es positivo y por lo tanto hay oscilación. Para frecuencias menores que la de corte,  $k_m$  se hace imaginario y el modo correspondiente se dice que está cortado ya que resulta exponencialmente atenuado y no puede propagarse.

A partir de la expresión (3.22) para el número de onda, es inmediato calcular la velocidad de grupo de la onda en el interior de la guía. Usando la definición resulta

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = v \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.23)$$

recordando que  $v$  es la velocidad de fase de la onda electromagnética en ausencia de contornos, es decir, en el espacio libre. La velocidad de grupo es siempre menor que la correspondiente a un medio sin fronteras y se anula para la frecuencia de corte.

Finalmente podemos calcular la velocidad de fase de cada modo  $m$

$$v_{f,m} = \frac{\omega}{k_m} = \frac{v}{\sqrt{1 - (\omega_{c,m}/\omega)^2}}. \quad (3.24)$$

Vemos entonces que dentro de la guía la velocidad de fase de cada modo es siempre mayor que la velocidad que tendría la onda en ausencia de contornos. Además, la velocidad  $v_{f,m}$  diverge cuando la frecuencia de la onda se acerca a la frecuencia de corte, de modo que al superar  $c$ , pierde significado físico.

Un cálculo simple muestra que

$$v_f v_g = v^2,$$

es decir, el producto de las velocidades de fase y de grupo es una constante que sólo depende de los parámetros característicos del dieléctrico contenido en la guía.

### b) *Modo transversal magnético*

Está constituido por las llamadas ondas  $E$  debido a que está caracterizado por la condición

$$H_x = 0 \quad ; \quad E_x \neq 0. \quad (3.25)$$

Es decir, sólo el campo eléctrico posee componente en la dirección de propagación. Cuando se aplica la condición (3.25) a las ecuaciones anteriores, resultan de inmediato los dos conjuntos

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - ik E_z &= i\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r H_y \\ \frac{\partial E_x}{\partial y} - ik E_y &= -i\omega \kappa'' \mu_0 \mu^r H_z \end{aligned} \quad (3.26)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} &= 4\pi \kappa' (\sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi \kappa}) E_x \\ -ik H_z &= 4\pi \kappa' (\sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi \kappa}) E_y \\ ik H_y &= 4\pi \kappa' (\sigma - i\omega \frac{\epsilon_0 \epsilon^r}{4\pi \kappa}) E_z. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Eliminando ahora  $E_y$ ,  $E_z$ ,  $H_y$  y  $H_z$  entre esos dos grupos de relaciones, surge para la componente  $E_x$  la ecuación

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = -\mathcal{K}^2 E_x \quad (3.28)$$

con la definición (3.10) para  $\mathcal{K}$  y que es válida en el interior del dieléctrico contenido en la guía. Como en el caso anterior, esta última ecuación puede escribirse

$$\nabla_{\perp}^2 E_x + \mathcal{K}^2 E_x = 0. \quad (3.29)$$

Pero, ya que el campo  $\vec{E}$  tiene componente tangencial nula sobre la superficie de la guía, supuesta conductora perfecta, la condición de contorno, en este caso  $TM$ , es

$$E_x = 0 \quad ; \quad \text{en la superficie.} \quad (3.30)$$

Es interesante destacar que ahora la ecuación de autovalores (3.29), con la condición de contorno (3.30), definen exactamente el mismo problema que el de una membrana vibrante. Este hecho fue puesto de manifiesto por Lord Rayleigh en 1897.

Ciertamente en este caso de ondas guiadas  $TM$ , vale una discusión similar a la que hicimos en conexión con las ondas  $TE$ , referida a los posibles modos de propagación conectados con las correspondientes frecuencias de corte. Además, como antes, los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  quedan completamente determinados, una vez conocida la componente longitudinal, en este caso de  $\vec{E}$ . Este es por cierto el origen del nombre de ondas  $E$  con que se las conoce.

### c) Modo transversal electromagnético

La aseveración hecha arriba sobre la existencia de dos tipos de ondas o modos de propagación en una guía de ondas necesita de una aclaración. En efecto, existe un tercer modo «degenerado», llamado *transversal electromagnético*,  $TEM$  que es también solución del problema de contorno puesto por una guía. La distinción respecto de los modos  $TE$  y  $TM$ , como veremos en seguida, surge de la necesidad de contar con guías de sección múltiplemente conexa para mantener estas ondas  $TEM$ . En este modo degenerado las componentes longitudinales de ambos campos son siempre nulas, es decir,

$$E_x = 0 \quad ; \quad H_x = 0. \quad (3.31)$$

Por lo tanto, a partir de las ecuaciones (3.3) y (3.4) resulta que la única manera de tener campos no triviales es que se satisfaga la relación

$$k = \frac{\omega}{v}, \quad (3.32)$$

es decir, las ondas  $TEM$  tienen la misma relación de dispersión que las de una onda en el espacio libre infinito sin condiciones de contorno. Los campos  $\vec{E}_{TEM}$  y  $\vec{H}_{TEM}$  son siempre perpendiculares y están relacionados, como en el caso de las ondas planas, por

$$\vec{H}_{TEM} = \frac{1}{v} \vec{i} \wedge \vec{E}_{TEM},$$

donde, como es usual, llamamos  $\vec{i}$  al versor que define la coordenada  $x$ . Finalmente, de las mismas ecuaciones mencionadas surge de inmediato que los campos transversales verifican la ecuación de Laplace

$$\begin{aligned}\nabla_{\perp}^2 \vec{E}_{TEM} &= 0 \\ \nabla_{\perp}^2 \vec{H}_{TEM} &= 0.\end{aligned}\tag{3.33}$$

Debido a esta propiedad, para mantener el modo *TEM*, resulta necesaria una guía con sección múltiplemente conexas: por lo menos dos superficies cilíndricas. En efecto, una única superficie conductora perfecta, siendo equipotencial, exige que el campo eléctrico que satisface la ecuación de Laplace sea nulo en su interior. Por lo tanto, es precisamente en un conductor coaxial y en una línea formada por dos conductores paralelos, donde este modo *TEM* es el dominante.

#### d) *Transporte de energía en la guía*

Estudiamos el promedio temporal del flujo de energía que transporta cada modo por separado en el interior de la guía. Para ese fin calculamos el vector de Poynting complejo, introducido en la sección (1.3.2).

*Modo TE.* A partir de la expresión para los campos transversales (3.11)-(3.14) y un «poco» de álgebra, resulta

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu' \kappa''}{4 \pi \kappa'} \frac{\omega k}{\mathfrak{H}^4} |\vec{\nabla}_{\perp} H_x|^2 \vec{i}.$$

Este resultado muestra nuevamente que en el caso de una guía de paredes perfectamente conductoras, sólo hay transporte de energía, flujo del vector de Poynting, en la dirección del eje de la guía. Si analizamos el caso más realista de conductores de conductividad finita, aparecería una componente transversal de  $\vec{S}_c$  responsable de pérdidas óhmicas en las paredes de la guía.

*Modo TM.* Resulta una expresión enteramente análoga a la anterior, con  $H_x$  reemplazado por  $E_x$  y con el factor  $\mu_0 \mu' \kappa'' / \kappa'$  reemplazado por  $\epsilon_0 \epsilon' / \kappa$ .

En cada caso el flujo total de energía por unidad de tiempo, el flujo de potencia, está dado por la integral del vector de Poynting  $\vec{S}_c$  en una superficie transversal al eje de la guía

$$P = \int_A \vec{S}_c \cdot d\vec{\sigma}.$$

Para llevar a cabo esta integral explícitamente, conviene recordar la expresión de la primera integral de Green

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \Psi + \vec{\nabla} \Psi \cdot \vec{\nabla} \Phi) dv = \int_{\Sigma_V} \Phi \vec{\nabla} \Psi \cdot d\vec{\sigma},$$

donde  $\Sigma_V$  es la superficie cerrada que limita al volumen  $V$ . Usando esta integral de Green escrita para dos dimensiones en conexión con las expresiones correspondientes

del vector de Poynting y luego de otro «poco» de álgebra, se obtiene

$$P = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu^r \kappa''}{4 \pi \kappa'} \frac{\omega k}{\Re^4} \left\{ \oint_C H_x^* \frac{\partial H_x}{\partial n} d\ell - \int_A H_x^* \nabla_{\perp}^2 H_x d\sigma \right\}$$

para el modo  $TE$  y una expresión similar para el modo  $TM$  con los reemplazos detallados más arriba. En la expresión anterior,  $C$  indica el contorno de la superficie  $A$ , es decir, el contorno de la guía de onda. Para ambos modos, la integral curvilínea sobre  $C$  se anula debido a las condiciones de contorno. Usando finalmente la ecuación de autovalores (3.19) (o la correspondiente (3.29) para el caso  $TM$ ), surge el resultado

$$P = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 \mu^r \kappa''}{4 \pi \kappa'} N v \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_{c,m}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (3.34)$$

para cada modo  $TE$ . El reemplazo de  $\mu_0 \mu^r \kappa'' / \kappa'$  por el factor  $\epsilon_0 \epsilon^r / \kappa$  provee el correspondiente resultado para los modos  $TM$ . En la expresión de  $P$ , el factor  $N$  representa la integral de superficie del cuadrado del módulo de los campos transversales correspondientes. La ecuación arriba muestra que la potencia transmitida se anula para la frecuencia de corte correspondiente al modo  $m$  en cuestión. Además,  $P$  pierde sentido para frecuencias menores que  $\omega_{c,m}$ , ya que se torna imaginaria.

### 3.1.1. Problemas

- Demostrar que la componente del campo

$$E_x = E_0 \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)}$$

corresponde a una de las ondas  $TE$  propagadas en la dirección  $z$ , en una guía de onda rectangular cuya amplitud en la dirección de  $y$  es  $b$ . Demostrar que la componente  $E$  en la onda es cero. Determinar la frecuencia de corte de la onda. [GP,12,1]

- Determinar las amplitudes máxima y mínima de una guía de sección eficaz cuadrada diseñada para transmitir ondas de longitud de onda de espacio libre  $\lambda$  sólo en el modo  $TE_{01}$ . [GP,12,2]
- ¿Cuál es la potencia promedio máxima que puede transmitir una guía llena de aire en el modo  $TE_{01}$  si las dimensiones de la guía son  $a = 1$  cm,  $b = 2$  cm y la frecuencia es de  $10^{10}$  Hz. El campo eléctrico de ruptura en el aire es  $30 \text{ kV cm}^{-1}$ . [GP,12,3]
- Calcular cómo varían con la frecuencia las velocidades de grupo y de fase de la onda  $TE_{01}$  en una guía rectangular con  $a = 1$  cm,  $b = 2$  cm. [GP,12,5]
- Demostrar explícitamente que la suposición de que una onda  $TEM$  puede propagarse dentro de un tubo de metal hueco lleva a contradicciones con la teoría electromagnética. [GP,12,8]
- Discutir los modos  $TM$  en una guía de sección transversal circular encontrando las constantes de propagación y las componentes de campo para cada modo. [EY,15,9]

- Una línea coaxial consiste en un cilindro conductor interno sólido de radio  $a$ , concéntrico con un conductor exterior cilíndrico circular de radio interior  $b$ . Dado que hay un modo *TEM* posible para el cual

$$E_{\omega\rho} = \frac{E_0}{\rho} e^{ikz}$$

(( $\rho, \phi, z$ ) son coordenadas cilíndricas), hallar todas las otras componentes del campo y determinar  $k$ . [EY,15,10]

- Obtener los tres primeros modos de transmisión de una guía de onda de sección cilíndrica. Hallar explícitamente las frecuencias de corte y calcular los valores posibles de la velocidad de propagación del primer modo si el radio de la guía es de 2 cm.
- Una línea de transmisión consiste de dos cilindros circulares metálicos, concéntricos, de conductividad  $\sigma$  y longitud de penetración pelicular  $\delta$ . El radio del cilindro interior es  $a$  y el radio interno del cilindro exterior es  $b$ . El espacio entre conductores se llena con un dieléctrico uniforme y sin pérdidas de parámetros  $\epsilon^r$  y  $\mu^r$ . Un modo *TEM* se propaga a lo largo de esta línea.

1. Demostrar que el promedio temporal del flujo de potencia a lo largo de la línea es

$$P = \sqrt{\frac{\mu^r}{\epsilon^r}} \pi a^2 |H_0|^2 \log(b/a),$$

donde  $H_0$  es el valor pico del campo magnético azimutal en la superficie del conductor interno.

2. Demostrar que la potencia transmitida es atenuada a lo largo de la línea según la ley

$$P(z) = P_0 e^{-2\gamma z},$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{2a\delta} \sqrt{\frac{\mu^r}{\epsilon^r}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right).$$

3. La impedancia característica  $Z_0$  de la línea está definida como la razón entre el voltaje entre los cilindros y el flujo axial de corriente en uno de ellos en cualquier posición  $z$ . Demostrar que para esta línea

$$Z_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu^r}{\epsilon^r}} \log(b/a).$$

4. Demostrar que la resistencia en serie y la inductancia por unidad de longitud de la línea son

$$R = \frac{1}{2\pi\sigma\delta} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$L = \left[ \frac{\mu}{2\pi} \log(b/a) + \frac{\mu_c\delta}{4\pi} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right],$$

donde  $\mu_c$  es la permeabilidad del conductor. La corrección a la inductancia proviene de la penetración del flujo en los conductores en una distancia del orden de  $\delta$ . [JA,8,1]

- Ondas transversales eléctrica y magnética se propagan a lo largo de un cilindro de bronce circular recto y hueco con radio interior  $R$ .
  1. Encontrar las frecuencias de corte de los distintos modos  $TE$  y  $TM$ . Determinar numéricamente la frecuencia de corte más baja (el modo dominante) en términos del radio del tubo y la razón de frecuencias de corte de los cuatro modos mayores siguientes con respecto al modo dominante.
  2. Calcular la constante de atenuación de la guía de onda como función de la frecuencia para los dos modos más bajos y dibujarla como función de la frecuencia. [JA,8,3]

### 3.2. CAVIDADES RESONANTES

Un trozo de guía de onda, de cualquier sección transversal, con bases perpendiculares al eje, define el caso más simple de cavidad resonante. Analizaremos brevemente el comportamiento de los campos electromagnéticos en estas condiciones, bajo la suposición de que las paredes que definen el volumen de la cavidad son perfectamente conductoras. Consideramos que en el interior de la cavidad existe un dieléctrico de parámetros  $\epsilon^r$  y  $\mu^r$ .

Las cavidades resonantes son fundamentales para la producción de oscilaciones en el rango de las microondas (frecuencias superiores a  $10^{11}$  Hertz). En efecto, las cavidades, de dimensión y forma apropiadas, forman parte central de magnetrones y klystrons, que son los dispositivos generadores de microondas.

La existencia de bases en la guía truncada que estamos analizando como ejemplo simple de una cavidad provoca la reflexión de las ondas electromagnéticas. Por esta razón aparecen ondas estacionarias también en la dirección  $x$ . Es decir, la amplitud de la solución tendrá una dependencia en la que fue la variable longitudinal en las guías, de la forma

$$A \operatorname{sen}(k_m x) + B \operatorname{cos}(k_m x)$$

y si las bases mencionadas están ubicadas en  $x = 0$  y en  $x = L$ , la condición de onda estacionaria exigirá que el número de onda  $k_m$  tome sólo los valores discretos  $k_{m,n}$  determinados por

$$k_{m,n} L = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

Por ello se habla de la «cuantificación» de  $k$ . Estudiamos entonces cada modo por separado.

#### **Modo transversal eléctrico, $TE$**

Recordamos que en ese caso  $E_x = 0$  siempre. Por otra parte, la componente longitudinal  $H_x$  debe anularse en las bases, de modo que tendrá la forma

$$H_x = F(y, z) \operatorname{sen} \left( \frac{\pi n x}{L} \right) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.36)$$

con  $F(y, z)$  solución de

$$(\nabla_t^2 + \mathcal{K}^2) F(y, z) = 0 \quad (3.37)$$

como exige la ecuación (3.19). Además, la cuantificación (3.35) de  $k$ , debida a la presencia de las bases, implica que el autovalor  $\mathcal{K}$  en la ecuación (3.37) debe tomar valores dependientes de dos índices  $m$  y  $n$ . Vemos así que para cada valor del entero  $n$  aparece, debido a las condiciones de contorno ya estudiadas para la guía de onda, un conjunto de autovalores  $\mathcal{H}_{m,n}$ . Estos autovalores determinan, a su vez, cada una de las frecuencias características de la cavidad resonante, dadas por

$$\omega_{m,n}^2 = v^2 \left[ \mathcal{H}_{m,n}^2 + \left( \frac{\pi}{L} \right)^2 n^2 \right]. \quad (3.38)$$

Estas son las únicas frecuencias de la radiación electromagnética que pueden mantenerse en el seno de la cavidad y determinan los correspondientes campos de ese modo resonante. Es importante remarcar que estas frecuencias están directamente determinadas por la geometría del sistema.

Mediante las relaciones (3.11)-(3.14) pueden obtenerse ahora las componentes transversales de los campos que quedarán unívocamente determinadas.

### **Modo transversal magnético, *TM***

En este caso, como sabemos,  $H_x = 0$  siempre. Debemos entonces imponer la condición de contorno sobre las bases, es decir:  $\vec{E}_t = 0$  en  $x = 0$  y en  $x = L$ . Teniendo en cuenta que la componente longitudinal  $E_x$  es de la forma

$$E_x = A F(y, z) \operatorname{sen} kx + B F(y, z) \operatorname{cos} kx$$

y que

$$\vec{E}_t = \frac{k}{\mathcal{H}^2} A \vec{\nabla}_t F(y, z) \operatorname{cos} kx + \frac{k}{\mathcal{H}^2} B \vec{\nabla}_t F(y, z) \operatorname{sen} kx,$$

la anulación de  $\vec{E}_t$  en  $x = 0$  implica necesariamente que  $A = 0$ . Por otra parte, la correspondiente anulación de  $\vec{E}_t$  en  $x = L$  conduce nuevamente a la condición (3.35). Por lo tanto

$$E_z = F(y, z) \operatorname{cos} \left( \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (3.39)$$

donde, como antes, la función  $F(y, z)$  verifica la ecuación (3.37). Continuando el argumento desarrollado en el caso del modo *TE*, surgen las posibles frecuencias  $\omega_{nm}$  de los modos *TM* que pueden ser sostenidas por la cavidad.

También de manera análoga al caso *TE*, mediante las relaciones (3.11)-(3.14), pueden obtenerse las componentes transversales de los campos que quedarán unívocamente determinadas.

### ***Q de la cavidad***

En el caso ideal que hemos venido tratando, la excitación de un dado modo requiere radiación de frecuencia exactamente igual a la del modo elegido. Sin embargo éste



no será el caso cuando existen pérdidas resistivas en las paredes. En efecto, si hay pérdidas, la excitación se producirá no sólo para la frecuencia deseada, sino también para un rango o banda de frecuencias de entrada, alrededor de la frecuencia elegida. El ancho de esta banda depende de la calidad de las paredes de la cavidad. Ante esta evidencia es conveniente introducir el concepto de  $Q$  (de «quality») de la cavidad. Este parámetro es una medida de la agudeza con la que se puede excitar la cavidad. A mayor valor de  $Q$ , menos frecuencias espurias son excitadas. Cuando se trate de pequeñas pérdidas, la definición adecuada del mencionado parámetro es

$$Q = \frac{1}{T} \frac{\text{energía almacenada}}{\text{pérdida de potencia}}, \quad (3.40)$$

donde  $T = 1/f_{\text{frecuencia}} = 2\pi/\omega_0$  es el tiempo de un ciclo de excitación.

Analizamos ahora la relación entre  $Q$  y la energía  $U$  almacenada en la cavidad. Para ello recordamos que las pérdidas óhmicas de potencia están medidas por  $-dU/dt$ , de manera que, a partir de la definición (3.40) de  $Q$ , podemos escribir

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\omega_0}{2\pi} \frac{1}{Q} U, \quad (3.41)$$

expresión que se puede integrar de inmediato y provee el comportamiento temporal de la energía almacenada en la cavidad resonante caracterizada por el factor  $Q$

$$U(t) = U_0 \exp\left[-\frac{1}{Q} \frac{t}{T}\right]. \quad (3.42)$$

Obviamente  $U_0$  indica la energía existente en el instante inicial.

La simple lectura de la ecuación (3.42) nos enseña que  $Q$  controla la *constante de tiempo* que caracteriza las pérdidas en la cavidad. Queda claro entonces que  $Q$  mide la calidad de respuesta del sistema a la excitación externa.

Recordando que la energía del campo electromagnético es proporcional al módulo al cuadrado de  $E$  y de  $H$ , concluimos que estos campos tienen una dependencia temporal, en el interior de la cavidad con pérdidas, que toma la forma, por ejemplo para el campo eléctrico

$$E(t) = E_0 \exp\left[-\frac{\omega_0}{4\pi} \frac{1}{Q} t\right] e^{-i\omega_0 t}.$$

Por otra parte, debido al amortiguamiento controlado por el factor  $Q$  de la cavidad, se presenta una superposición de frecuencias alrededor de  $\omega_0$ , es decir, se presenta un espectro de frecuencias. En consecuencia, el campo tiene la expresión

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} E(\omega) e^{-i\omega_0 t} d\omega \quad (3.43)$$

que implica

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} E_0 e^{-\frac{\omega_0}{4\pi} \frac{1}{Q} t} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt. \quad (3.44)$$

Realizando la integral concluimos que el comportamiento en frecuencia del campo (de la energía) tiene la forma «lorentziana»

$$|E(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\omega_0}{2Q}\right)^2} \quad (3.45)$$

mostrada en la Figura (3.1).

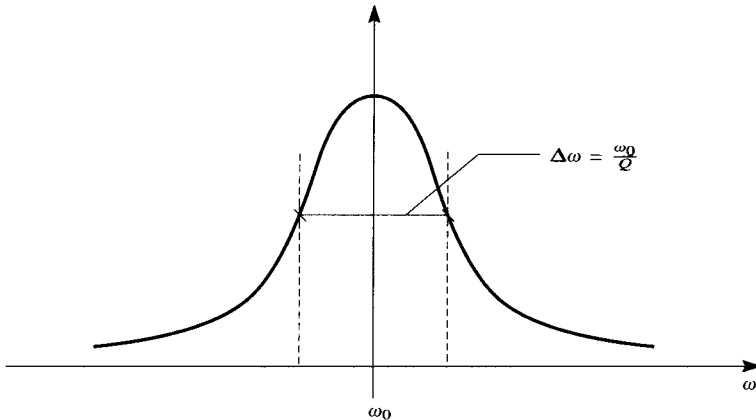


FIGURA 3.1: *Espectro de energía en una cavidad.*

Allí hemos explicitado el ancho del espectro, inversamente proporcional al  $Q$  de la cavidad resonante.

### 3.2.1. Problemas

- Una cavidad resonante rectangular tiene como dimensiones  $a = 2$  cm,  $b = 3$  cm,  $d = 4$  cm. ¿Cuántas resonancias hay dentro del rango de frecuencia que va de  $\nu = 2 \cdot 10^9$  Hz a  $\nu = 10^{10}$  Hz [GP,12,7]
  - Una cavidad resonante de cobre se construye con un cilindro circular recto de tapas planas de radio  $R$  y longitud  $h$ . Determinar las frecuencias de resonancia de la cavidad para todos los tipos de ondas.
  - Una cavidad resonante de cobre consiste en un cilindro circular recto y hueco de radio interior  $R$  y longitud  $L$  con tapas planas.
1. Determinar las frecuencias de resonancia de la cavidad para todo tipo de ondas. Con una unidad de frecuencia proporcional a  $R$ , dibujar las cuatro frecuencias menores resonantes de cada tipo como función de la relación  $R/L$ , para  $0 < R/L < 2$ . ¿Tiene el mismo modo la frecuencia más baja para todo  $R/L$ ?
  2. Si  $R = 2$  cm,  $L = 3$  cm y la cavidad es de cobre puro, ¿cuál es el valor numérico de  $Q$  para el modo resonante más bajo? (Usar los resultados de la sección (1.4.1) para evaluar el flujo del vector de Poynting correspondiente). [JA,8,5]

### 3.3. ÓPTICA

La propagación de la luz visible está asociada a campos eléctricos y magnéticos que oscilan muy rápidamente. De hecho, la luz corresponde a frecuencias del orden de  $10^{14}$  Hertz, es decir, longitudes de onda en la región de  $10^{-7}$  m. Por esta razón, para tratar una gran cantidad de problemas de la óptica, se puede trabajar en el límite de  $\lambda \rightarrow 0$ . Esta aproximación es llamada *óptica geométrica*, ya que las leyes que la rigen usan el lenguaje de la geometría. La idea subyacente es considerar que el transporte de energía se realiza a lo largo de ciertas líneas geométricas llamadas *rayos de luz*. La observación de apartamientos a la aproximación de la óptica geométrica implica experimentos cuidadosos que se agrupan bajo los nombres de *interferencia*, *difracción* y *polarización* de la luz. Estos apartamientos, respecto del límite de longitud de onda cero, se manifiestan por ejemplo en la aparición de franjas brillantes y oscuras en los bordes de las sombras geométricas, las llamadas franjas de difracción. La idea entonces es encontrar una descripción de los campos electromagnéticos en esas regiones particulares como aquéllas donde aparece difracción. El tratamiento ondulatorio de la luz, caracterizado por los campos eléctrico y magnético que verifican la ecuación de las ondas, comprende: la radiación ultravioleta (longitudes de onda de 0,01 a 0,4 micrones); la radiación visible ( $\lambda$  de 0,4 a 0,75 micrones) y la radiación infrarroja (con longitudes de onda entre 0,75 y  $10^2$  micrones).

Sobre la base de la discusión anterior, ha sido natural introducir los nombres de: *óptica ondulatoria* (o *física*) a aquella que se fundamenta en el concepto de onda luminosa y óptica geométrica la que se limita a la noción de rayo o haz luminoso.

Un análisis aún más profundo de los fenómenos ópticos necesita de la Teoría Cuántica donde la luz se representa por un flujo de *fotones*, los cuantos del campo electromagnético, que se denominan usualmente  $\gamma$ . Por su importancia, incluimos un breve paréntesis descriptivo sobre estas partículas.

**Los fotones.** Sus propiedades principales son las siguientes:

- En el lenguaje de la teoría cuántica de campos, son los portadores de la interacción electromagnética entre partículas cargadas.
- No transportan carga eléctrica.
- No poseen masa propia porque viajan siempre a la velocidad de la luz.
- La energía  $E_\gamma$  de un fotón correspondiente a una radiación de frecuencia angular  $\omega$  es

$$E_\gamma = \hbar \omega,$$

donde  $\hbar = 10^{-34}$  Joule seg, es la constante de Planck.

- El impulso  $\vec{p}_\gamma$  de un fotón está definido por

$$\vec{p}_\gamma = \hbar \vec{k},$$

donde  $\vec{k}$  es el vector de onda de la radiación electromagnética correspondiente. Las dos últimas ecuaciones constituyen de alguna manera una expresión de la dualidad onda-partícula ya que relacionan características corpusculares ( $E_\gamma$ ,  $\vec{p}_\gamma$ ) con características ondulatorias ( $\omega$ ,  $\vec{k}$ ).

- El espín del fotón es 1 en unidades de  $\hbar$ . Consecuentemente, un conjunto de fotones verifica la estadística de Bose-Einstein. Por esa razón se dicen *bosones* y como todos los bosones poseen una tendencia específica a «aglutinarse». Esta es una de las razones por las que un conjunto de fotones puede ser descripto mediante ondas clásicas.
- El fotón, a pesar de poseer espín 1, puede tener sólo dos polarizaciones independientes que se corresponden con la polarización de la onda en cuestión.

La descripción cuántica de la luz, de la radiación electromagnética en general, en términos de fotones, reemplaza generalizando la imagen clásica de onda, permitiendo así la comprensión de nuevos fenómenos. Este es el dominio de la *Óptica Cuántica*. El límite de validez de la representación clásica está ligado al número de fotones presentes. En efecto, así como una descripción cuántica deja su lugar a una clásica, con buenos resultados, cuando los números cuánticos son suficientemente grandes; el análisis de la luz en términos ondulatorios será satisfactorio si el número de fotones que se encuentran en el mismo estado es suficientemente grande, mucho mayor que uno. Bajo estas condiciones se puede dejar de lado la estructura cuántica del campo electromagnético y operar con ondas. Aquí podemos reiterar la condición básica para que esta aproximación sea posible: los fotones deben ser bosones. En efecto, si se tratara de partículas con espín semi-entero, fermiones, verificarían por el contrario la estadística de Fermi-Dirac. En este caso el número máximo de partículas por estado es sólo uno, no pudiendo satisfacer nunca la condición de validez de la aproximación clásica.

Los siguientes desarrollos corresponden a la *Óptica Física*. Haremos una descripción de los fenómenos a partir de la imagen clásica de la luz en términos de ondas electromagnéticas.

El espíritu del tratamiento formal del problema sigue los lineamientos dados por Huygens y Fresnel en su modelo de construcción de un frente de onda.

### 3.3.1. Principio de Huygens-Fresnel

La llamada construcción de Huygens surge de considerar que cada punto de un frente de onda puede ser considerado como fuente de una onda esférica secundaria. A partir de allí, el frente de onda en un tiempo posterior resulta definido por la envolvente de todas aquellas ondas secundarias. El aporte de Fresnel a la comprensión de la difracción en particular fue postular que las ondas secundarias de Huygens interfieren mutuamente.

El Principio de Huygens-Fresnel conduce a la expresión correcta para la propagación de una onda esférica en el vacío. La demostración de esta aseveración puede encontrarse en cualquier texto de *Óptica*. (Ver por ejemplo [JO].)

Es interesante notar que este principio perdería validez si el espacio-tiempo no fuese de  $(3+1)$  dimensiones.

### 3.3.2. Difracción

La idea central subyacente al formalismo de Huygens-Fresnel es que el estado luminoso (o la presencia electromagnética) en un dado punto  $P(x, y, z)$  es el resultado

de la superposición de ondas secundarias procedentes de una superficie que se encuentra entre este punto  $P$  y la fuente de ondas. La formalización matemática de este enunciado se encuentra en la Teoría de la Difracción de Kirchhoff.

El problema general de la difracción implica una onda incidente sobre uno o varios obstáculos o aberturas definidos por superficies conductoras o absorbentes. La onda es consecuentemente dispersada y eventualmente absorbida, dando lugar a propagación de radiación en direcciones diferentes a la de la onda inicial. Esta desviación de la luz (o de la radiación electromagnética en general) se conoce históricamente con el nombre de difracción, aunque la física que implica no difiere de la dispersión (scattering) de ondas electromagnéticas.

En realidad, existen sólo algunos problemas de este tipo que pueden ser resueltos exactamente. En particular se puede mencionar la dispersión por una esfera o un cilindro conductores y también por un disco. Volveremos sobre este punto en la sección dedicada precisamente a la dispersión de ondas electromagnéticas. Otro ejemplo de importancia lo constituye la dispersión (o difracción) de una onda plana por un semiplano perfectamente conductor. Problemas más generales de difracción por aberturas de formas arbitrarias en superficies conductoras desembocan en soluciones aproximadas. Un tratamiento aproximado de la difracción por aberturas, de gran utilidad en Óptica, es la mencionada Teoría de Kirchhoff que presentamos a continuación.

### a) Integral de Kirchhoff

Kirchhoff mostró que el Principio de Huygens-Fresnel es una forma aproximada de un teorema integral. Este teorema expresa la solución de la ecuación homogénea de las ondas, en un dado punto, en términos de los valores de la solución y de sus primeras derivadas en todos los puntos de una superficie cerrada arbitraria que rodee al punto.

Para obtener la integral de Kirchhoff consideramos una onda monocromática escalar

$$\eta(x, y, z; t) = \psi(x, y, z) e^{-i\omega t} \quad (3.46)$$

cuya parte espacial  $\psi$  verifica ciertamente la ecuación de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\psi(x, y, z) = 0 \quad (3.47)$$

con  $k = \omega/c$ . Notemos que al tratar una onda escalar, nos estamos refiriendo a cada una de las componentes cartesianas de los campos vectoriales. La descripción completa implicará entonces la aplicación del teorema que buscamos a cada componente por separado. Sin embargo, y afortunadamente, en la mayoría de los problemas de la Óptica la descripción en términos de una única componente escalar compleja es suficiente. De hecho, las altas frecuencias ópticas no permiten la medida instantánea de la polarización de la onda electromagnética como función del espacio y del tiempo. Sólo los promedios temporales sobre períodos largos son accesibles. Además, en general tratamos con luz natural que no presenta una polarización preferencial. En resumen, la intensidad de la radiación queda bien representada en términos de una única función escalar, es decir,

$$I \propto |\psi|^2$$

con  $\psi$  solución de (3.47). Esta intensidad, definida como la energía promedio que alcanza un punto en la unidad de tiempo, se medirá por ejemplo por el ennegrecimiento de una placa fotográfica o mediante un detector electrónico fotosensible.

Volvemos a la teoría de Kirchhoff y para ello consideramos un volumen  $V$  limitado por la superficie (obviamente cerrada)  $\Sigma$ . Dentro del volumen se encuentra el punto  $P(\vec{r}) = P(x, y, z)$  arbitrario. Suponemos además que la función  $\psi$  tiene derivadas primera y segunda continuas dentro y sobre la superficie  $\Sigma$ . Llamamos  $\phi$  a otra función cualquiera con las mismas propiedades que  $\psi$ . Recurriendo ahora al primer teorema de Green, podemos escribir

$$\int_V (\psi \nabla'^2 \phi - \phi \nabla'^2 \psi) dV' = - \int_{\Sigma} \left( \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) d\sigma', \quad (3.48)$$

donde  $n$  indica la normal hacia el interior de la superficie. (Ver Figura (3.2).)

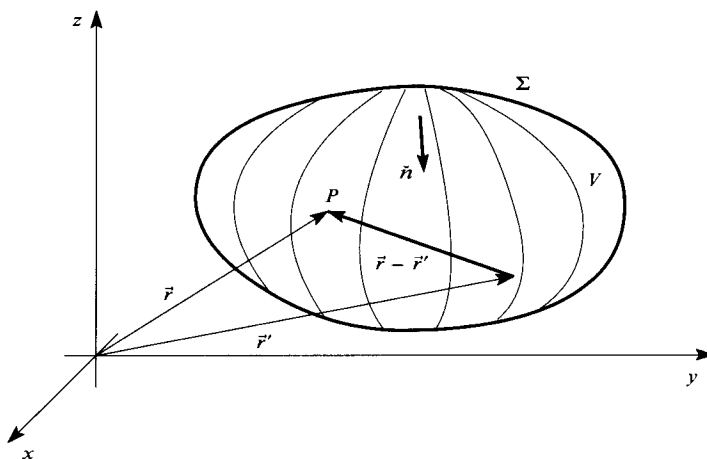


FIGURA 3.2: Geometría para la integral de Kirchhoff.

Observemos además que se han primado algunos operadores para indicar que actúan sobre la variable  $\vec{r}'$ . Para la función  $\phi$  elegimos explícitamente la función de Green libre con condición de contorno de onda saliente

$$\phi(x', y', z') = \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|},$$

de modo que se satisface

$$(\nabla'^2 + k^2)\phi(x', y', z') = -4\pi\delta(\vec{r}' - \vec{r}).$$

A partir del teorema de Green (3.48) resulta entonces de inmediato

$$\psi(P) = \psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) d\sigma', \quad (3.49)$$

este es el teorema de Kirchhoff.

Podemos notar que en el límite de  $k \rightarrow 0$ , la ecuación de Helmholtz (3.47) se reduce a la ecuación de Laplace y (3.49) da lugar a la bien conocida fórmula de la electrostática

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \left( \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) d\sigma'.$$

Identidad que define a la función potencial en un dominio extendido (el volumen  $V$ ) a partir de sus propiedades en un dominio restringido (la superficie  $\Sigma$ ).

### b) Difracción por una abertura

Aplicamos el teorema de Kirchhoff (3.49) obtenido arriba a la difracción por una abertura, de forma arbitraria, presente en un plano conductor. Llamamos  $\Sigma$  al plano  $z = 0$  de modo que el volumen  $V$  en cuestión es el semiespacio  $z > 0$ . De acuerdo con el teorema mencionado, la función  $\psi$  podrá ser calculada en cualquier punto de  $V$  si se conoce, a priori, no sólo  $\psi$  sino también su derivada  $\partial\psi/\partial n$  sobre la superficie.

Debido a que los valores exactos de esas funciones no son conocidos, la teoría de Kirchhoff parte de la hipótesis básica de que tanto la función como su derivada normal son nulas sobre la superficie  $\Sigma$  (el plano  $z = 0$ ), excepto en la abertura. Más aún, los valores que ellas adoptan en la abertura son los correspondientes a la onda incidente. Estas son las llamadas condiciones de contorno de Kirchhoff, que como dijimos, subyacen a su teoría de la difracción.

Merece la pena subrayar que estas suposiciones de Kirchhoff son autocontradictorias, ya que la solución matemática de la ecuación de Helmholtz existe si se fija una sola condición:  $\psi$  o  $\partial\psi/\partial n$  o alguna combinación lineal de ambas en la superficie. Sin embargo, a pesar de estas contradicciones, la teoría conduce a resultados correctos, contrastables con el experimento. Esto es cierto porque en general se trata con aberturas de dimensión bien mayor a la longitud de onda de la radiación incidente. Notablemente, la aproximación también funciona bien para aberturas sólo algunas veces mayores que  $\lambda$  (Ver C. J. Bowkamp, «Diffraction Theory», *Reports on Progress in Physics*, núm. XVIII, 35 (1954)).

Sobre la base de esta justificación empírica, continuamos la discusión. Supongamos entonces que la onda incidente  $\psi_I$  corresponde a una propagación en la dirección  $z$  con una amplitud dependiente de  $x$  e  $y$ . Es decir,

$$\psi_I(\vec{r}') = A(x', y') e^{ikz'}.$$

Por lo tanto, los valores a ser ingresados en la integral de Kirchhoff son

$$\psi(x', y', z' = 0) = A(x', y')$$

y

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{\partial\psi}{\partial z'} \Big|_{z'=0} = ik A(x', y').$$

Por otra parte, de acuerdo con la hipótesis básica, la integral se extiende sólo a la abertura. Tenemos entonces

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = - \left( ik - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

De modo que volviendo a (3.49) resulta la fórmula de Kirchhoff para la difracción por una abertura

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} A(x', y') \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \left[ ik + \left( ik - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right] d\sigma', \quad (3.50)$$

donde  $\Sigma$  indica la superficie de la abertura. Para evaluar la integral, al menos en forma aproximada, es importante percibir que en ella aparecen tres escalas de longitud características: la longitud de onda  $\lambda$  (a través del número de onda  $k$ ), la dimensión de la abertura que llamamos  $L$  y la distancia abertura-punto de observación  $r$ . Los dos tipos de aproximación típicos, relacionados con los valores relativos de esas escalas, son la difracción de Fraunhofer y la difracción de Fresnel.

### *Difracción de Fraunhofer*

En esta aproximación se tratan los problemas para los cuales vale que

$$r \gg L ; \quad kr \gg 1.$$

En ese caso se puede escribir

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq \frac{e^{ikr}}{r} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}, \quad (3.51)$$

donde  $\vec{k}$  es un vector de magnitud  $k$  en la dirección de observación, definida por  $\vec{r}$ . Suponemos además que esta observación se hace muy cerca de la dirección  $z$  de modo que

$$\frac{z}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \simeq 1;$$

en consecuencia,

$$k \gg \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}.$$

De esta manera, la fórmula básica (3.50) conduce a la bien conocida expresión para la difracción de Fraunhofer

$$\psi(\vec{r}) = -\frac{ik}{2\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{\Sigma} A(x', y') e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'} d\sigma', \quad (3.52)$$

a partir de la cual se puede obtener la intensidad de la radiación en un dado punto calculando  $|\psi|^2$ , tal como fue discutido arriba.



**Ejemplo.** Consideremos el caso más simple de la difracción de Fraunhofer por una abertura circular de radio  $R$ . Tomamos  $\vec{k}$  en el plano  $(y, z)$  haciendo un ángulo  $\theta$  con el eje  $z$ . Es decir,

$$\vec{k} = k (\sin \theta \vec{j} + \cos \theta \vec{k}).$$

Usamos además

$$\vec{r}' = r' (\sin \phi \vec{j} + \cos \phi \vec{k}).$$

La intensidad resulta entonces

$$I(\theta) \propto |\psi|^2 = N \left| \int_0^R r' dr' \int_0^{2\pi} e^{-ik r' \sin \theta \sin \phi} d\phi \right|^2,$$

donde  $N$  es la correspondiente constante de proporcionalidad. La integración de esta última expresión, siendo muy simple, queda como un pequeño ejercicio. La intensidad en la difracción de Fraunhofer por una abertura circular tiene así la expresión

$$I(\theta) = N (2\pi R^2)^2 \left[ \frac{J_1(k R \sin \theta)}{k R \sin \theta} \right]^2, \quad (3.53)$$

donde  $J_1(x)$  es la función de Bessel de orden uno.

### Difracción de Fresnel

En este caso, el punto de observación se encuentra cercano a los bordes de la sombra geométrica de la abertura. Por esta razón, el desarrollo del exponencial, equivalente a (3.51), es más delicado ya que los términos cuadráticos pasan a ser importantes. Para tener una idea somera del problema, analizamos la situación más simple en que las coordenadas  $x$  e  $y$  del punto de observación son efectivamente del orden  $L$  pero se mantiene  $z \gg L$ . Bajo estas aproximaciones, se tiene

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \equiv [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \simeq z \left[ 1 + \frac{(x - x')^2}{2z} + \frac{(y - y')^2}{2z} + \dots \right],$$

expresión que conduce, cuando reemplazada en la expresión general para el campo difractado (3.50), a las llamadas integrales de Fresnel (Ver Handbook of Mathematical Functions, Edited by Abramowitz and Stegun, Dover Publications Inc.), del tipo

$$I_F = \int_a^\infty e^{i\alpha^2} d\alpha,$$

donde  $a$  es la dimensión característica de la abertura. Como es de imaginar, la situación se complica sustancialmente. Sin embargo, el caso más simple de la difracción de Fraunhofer es de muchísima mayor importancia en la Óptica. En general se trata con problemas que implican fuentes y puntos de observación que se pueden considerar a distancias infinitas, eventualmente mediante lentes apropiadas, de la abertura que provoca la difracción.

### 3.3.3. Óptica de cristales

Nos interesa ahora analizar la propagación de ondas luminosas en medios anisotrópicos. Como resultado de este análisis, dispondremos de los elementos básicos de la Óptica de cristales.

Cuando pensamos en cuerpos cristalinos, nos referimos fundamentalmente a la disposición ordenada de átomos (o de iones o de moléculas) que define una red cristalina. Esta regularidad estructural, a nivel atómico, determina en primer lugar la anisotropía de los cristales y en segundo, la dinámica de los átomos con la consecuente especificación de los posibles estados energéticos cristalinos.

La anisotropía de los cristales, es decir, la presencia de variaciones de las propiedades físicas del sólido en función de la dirección, hace necesario la representación de esas características físicas en términos de tensores (respecto del grupo de rotaciones espaciales) de rango 2 o mayor. Por ejemplo, la permitividad dieléctrica, la permeabilidad magnética y la conductividad de un cristal están descritas por tensores de rango 2.

En lo que sigue nos interesamos particularmente en la naturaleza tensorial de las características físicas de los cristales, ligada, como dijimos, a la anisotropía. Estudiamos específicamente la permitividad eléctrica (o constante dieléctrica, como también se la designa).

Llamamos  $\epsilon'_{ij}$  a las componentes del tensor de permitividad, de modo que la relación constitutiva correspondiente se escribe

$$D_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon'_{ij} E_j \quad (3.54)$$

indicando que en un cristal los vectores  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  tienen en general orientaciones diferentes.

Simultáneamente con  $\epsilon'_{ij}$ , y para el caso de dieléctricos lineales, se introduce el tensor de susceptibilidad eléctrica  $\chi_{ij}$  que liga el vector polarización  $\vec{P}$  con el campo eléctrico, a través de

$$P_i = \epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \chi_{ij} E_j \quad (3.55)$$

con la relación

$$\chi_{ij} = \frac{1}{4\pi\kappa} (\epsilon'_{ij} - \delta_{ij}),$$

donde, como es habitual,  $\delta_{ij}$  indica la delta de Kroenecker.

Utilizamos ahora la relación (3.54) para escribir la densidad de energía eléctrica del campo en el cristal

$$\begin{aligned} u_e &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\kappa} \sum_{i=1}^3 E_i D_i \\ &= \frac{\epsilon_0}{8\pi\kappa} (\epsilon'_{xx} E_x^2 + \epsilon'_{yy} E_y^2 + \epsilon'_{zz} E_z^2 \\ &\quad + 2\epsilon'_{xy} E_x E_y + 2\epsilon'_{xz} E_x E_z + 2\epsilon'_{yz} E_y E_z). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Este resultado es ciertamente válido para un sistema cartesiano cualquiera. Sin embargo, para todo cristal existe siempre un sistema particular, que llamamos  $(XYZ)$ , en el que la forma cuadrática general de la expresión anterior se reduce a la forma diagonal

$$u_e = \frac{\epsilon_0}{8\pi\kappa} (\epsilon'_X E_X^2 + \epsilon'_Y E_Y^2 + \epsilon'_Z E_Z^2). \quad (3.57)$$

Estos ejes particulares que diagonalizan el tensor de permitividad dieléctrica son llamados *ejes dieléctricos principales* del cristal. En el caso de los denominados cristales uniaxiales, uno de los ejes dieléctricos principales se confunde con el eje de mayor simetría (el eje cristalográfico).

A los valores principales del tensor,  $\epsilon'_I$ ; ( $I = X, Y, Z$ ), les corresponden los índices de refracción principales del cristal dados por

$$n_I = \sqrt{\epsilon'_I},$$

ya que hemos supuesto materiales no magnéticos ( $\mu^r = 1$ ). En los cristales uniaxiales, el número de valores del tensor de permitividad y por consiguiente de índices de refracción principales, se reduce a 2. En efecto, si elegimos al eje cristalográfico del cristal uniaxial coincidente con el eje  $Z$ , se tiene

$$\epsilon'_X = \epsilon'_Y \rightarrow n_X = n_Y.$$

En el caso de cristales cúbicos, el tensor de permitividad degenera en un escalar ya que, desde el punto de vista óptico, este tipo de cristales se comporta como un medio isotropo.

Si escribimos ahora la ecuación (3.57) en la forma

$$\frac{E_X^2}{(1/n_X)^2} + \frac{E_Y^2}{(1/n_Y)^2} + \frac{E_Z^2}{(1/n_Z)^2} = \frac{8\pi\kappa}{\epsilon_0} u_e \quad (3.58)$$

resulta claro que la superficie de densidad de energía eléctrica constante es un elipsoide cuyos ejes principales tienen valores proporcionales a los índices de refracción principales y coinciden con los ejes dieléctricos principales. Este elipsoide se denomina *indicatriz óptica* del cristal en cuestión. En un cristal uniaxial, la indicatriz óptica es un elipsoide de revolución y para el caso de un cristal cúbico, se reduce a una esfera.

Estudiamos entonces la propagación de ondas luminosas en un medio anisótropo transparente (es decir, con conductividad nula). Si se trata de ondas planas monocromáticas caracterizadas por

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

y por el correspondiente campo magnético, las ecuaciones de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.59)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\kappa'}{\kappa} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (3.60)$$

completadas con (3.54) y con  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , dan lugar al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \vec{k} \wedge \vec{E}_0 &= \kappa'' \mu_0 \omega \vec{H}_0 \\ \vec{k} \wedge \vec{H}_0 &= -\frac{\kappa'}{\kappa} \omega \vec{D}_0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

A partir de ellas es evidente que los tres vectores  $\vec{k}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{D}$  forman una terna ortogonal. Además, los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son perpendiculares entre sí y lo son también al vector de Poynting  $\vec{S}$ , definido a partir de su producto vectorial. Esta observación nos permite concluir que los cuatro vectores  $\vec{k}$ ,  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{S}$  pertenecen a un mismo plano ya que  $\vec{H}$  es perpendicular a todos ellos. Debemos notar además que si bien  $\vec{E}$  es siempre perpendicular a  $\vec{S}$  y  $\vec{k}$  lo es a  $\vec{D}$ , los vectores  $\vec{S}$  y  $\vec{k}$  pueden tener direcciones distintas y lo mismo les ocurre a  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ . Este hecho significa que en el caso general de propagación de una onda luminosa en un cristal anisótropo, la dirección de la normal al frente de onda (la dirección del vector de onda  $\vec{k}$ ) puede no coincidir con la dirección de propagación de la energía que está dada por  $\vec{S}$ . En estas condiciones los campos no son transversales y el campo eléctrico  $\vec{E}$  no es normal a  $\vec{k}$ . Por cierto que los casos de simetría cúbica o cuando  $\vec{k}$  coincide con uno de los ejes dieléctricos principales son excepcionales y el comportamiento es el típico de medios isotrópicos.

Observemos que el sistema (3.61) conduce de inmediato a

$$\vec{D}_0 = \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} \left[ k^2 \vec{E}_0 - \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{E}_0) \right].$$

Usando ahora (3.54), a fin de tomar en cuenta la anisotropía del medio, esta última expresión puede ser escrita como

$$\epsilon_0 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij}^r E_{0,j} = \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} \left( k^2 E_{0,i} - k_i \sum_{j=1}^3 k_j E_{0,j} \right)$$

o también como el sistema de tres ecuaciones lineales homogéneas.

$$\sum_{j=1}^3 \left[ \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) - \epsilon_0 \epsilon_{ij}^r \right] E_{0,j} = 0. \quad (3.62)$$

El sistema tendrá soluciones no triviales sólo si su determinante característico es nulo. Es decir, si se verifica

$$\det \left[ \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) - \epsilon_0 \epsilon_{ij}^r \right] = 0. \quad (3.63)$$

Esta ecuación escrita en el sistema de ejes dieléctricos principales del cristal resulta

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} [k^2 \epsilon_0 (\epsilon_X^r k_X^2 + \epsilon_Y^r k_Y^2 + \epsilon_Z^r k_Z^2) - k_X^2 \epsilon_0^2 \epsilon_X^r (\epsilon_Y^r + \epsilon_Z^r) - \\ &- k_Y^2 \epsilon_0^2 \epsilon_Y^r (\epsilon_Z^r + \epsilon_X^r) - k_Z^2 \epsilon_0^2 \epsilon_Z^r (\epsilon_X^r + \epsilon_Y^r)] + \epsilon_0^3 \epsilon_X^r \epsilon_Y^r \epsilon_Z^r = 0 \end{aligned} \quad (3.64)$$

llamada ecuación de Fresnel. Esta ecuación, al ser cuadrática en  $k$ , indica que a cada dirección del vector de onda  $\vec{k}$  corresponden dos valores diferentes de su módulo. Es decir, aparecen dos ondas monocromáticas de velocidad de propagación diferente (de índice de refracción diferente). Cada una de estas ondas está linealmente polarizada en direcciones perpendiculares.

Para determinar los índices de refracción y las direcciones de polarización del par de ondas previsto por la ecuación de Fresnel, se utiliza la indicatriz óptica. Para ello se determina la intersección de la indicatriz con un plano que contiene al centro del elipsoide y es perpendicular al vector de onda  $\vec{k}$  (ver Figura (3.3)).

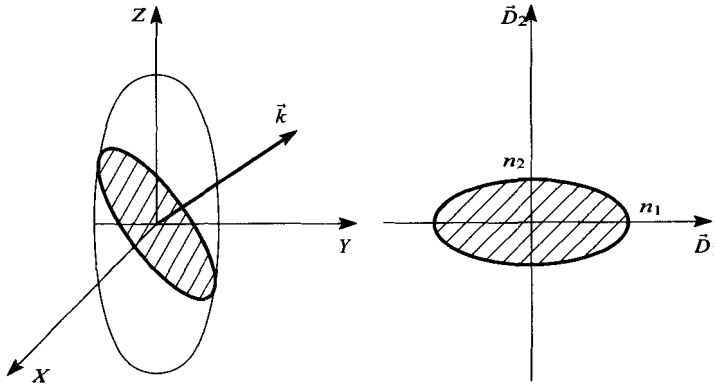


FIGURA 3.3: Indicatriz óptica.

En general, esta intersección definirá una elipse. Los ejes principales de esta elipse definen las direcciones de polarización (en términos del vector desplazamiento) buscadas. Además, la longitud de los respectivos semiejes miden los índices de refracción correspondientes.

Vamos a analizar con un poco más de detalle el caso de un cristal uniaxial. Para estos cristales, se encuentra que  $\epsilon'_x = \epsilon'_y$ , si se elige al eje óptico coincidente con el eje  $Z$ . Por lo tanto, la ecuación de Fresnel (3.64) puede factorizarse en dos factores

$$\left\{ \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} k^2 - \epsilon_0 \epsilon'_x \right\} \left\{ \frac{\epsilon_0}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} [k_Z^2 \epsilon'_z + (k_X^2 + k_Y^2) \epsilon'_x] - \epsilon_0^2 \epsilon'_x \epsilon'_z \right\} = 0. \quad (3.65)$$

Es usual redefinir

$$\epsilon'_{\text{extra}} = \epsilon'_z \quad ; \quad \epsilon'_{\text{ord}} = \epsilon'_x = \epsilon'_y,$$

donde el origen del nombre de los subíndices *extraordinario* y *ordinario* surgirá de inmediato. A partir de (3.65) se pueden escribir entonces el par de ecuaciones

$$\frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} \frac{k^2}{\epsilon_0 \epsilon'_{\text{ord}}} = 1$$

$$\frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} \frac{k_X^2 + k_Y^2}{\epsilon_0 \epsilon'_{\text{extra}}} + \frac{1}{\kappa'' \mu_0 \omega^2} \frac{k_Z^2}{\epsilon_0 \epsilon'_{\text{ord}}} = 1. \quad (3.66)$$

La primera de ellas define una esfera de radio  $r \propto \sqrt{\epsilon_{\text{ord}}^r}$  en el espacio de vectores de onda. La segunda, por su parte, define un elipsoide de revolución cuyos semiejes principales son proporcionales a  $\sqrt{\epsilon_{\text{ord}}^r}$  y  $\sqrt{\epsilon_{\text{extra}}^r}$ , respectivamente. Estas son las llamadas superficies de los vectores de onda de un cristal uniaxial. El cristal se dice negativo si  $\epsilon_{\text{ord}}^r > \epsilon_{\text{extra}}^r$  y positivo en caso contrario. En ambos casos hay dos superficies de vectores de onda. Una de las ondas presenta un frente esférico y el cristal se comporta como isótropo en lo que a ella se refiere. Esta es la onda ordinaria. La otra onda, correspondiente al elipsoide, es la onda extraordinaria. Si bien la velocidad de propagación de la onda ordinaria es isótropa, la de la onda extraordinaria depende del ángulo entre la dirección de  $\vec{k}$  y el eje óptico (eje  $Z$ ). Ambas ondas están polarizadas linealmente en planos perpendiculares entre sí.

La aparición, en el interior de un cristal, de dos ondas que se propagan con diferente polarización lineal se conoce con el nombre de *birrefringencia*. Este fenómeno se traduce en la aparición de dos rayos luminosos refractados diferentemente. El rayo extraordinario, correspondiente a la onda extraordinaria, se encuentra en general fuera del plano de incidencia. La birrefringencia se observa sobre todos los monocristales, excepto los cúbicos por supuesto, y en la superficie de separación de medios isótropos donde aparece una anisotropía efectiva.

### *Electro-Óptica y Magneto-Óptica*

El estudio de los efectos de campos eléctricos y campos magnéticos sobre las propiedades ópticas de la materia se denomina Electro-óptica y Magneto-óptica, respectivamente.

El caso de campos eléctricos incluye el efecto Kerr: aparición de anisotropía por efecto del campo; Efecto Pockels: similar al anterior pero lineal en el campo eléctrico, etc. También se podría mencionar, a nivel cuántico, el Efecto Stark: desdoblamiento de las líneas espectrales atómicas por efecto de un campo eléctrico suficientemente intenso.

Por otro lado, el caso de campos magnéticos incluye el efecto Faraday: aparición de actividad óptica debida a la presencia del campo magnético; efecto Cotton-Mouton: anisotropía inducida por el campo, etc. A éstos podemos agregar, nuevamente a nivel cuántico, el desdoblamiento de líneas espectrales llamado efecto Zeeman.

#### *Efecto Kerr*

Como consecuencia de este efecto, un medio inicialmente isótropo deviene anisótropo por la aplicación de un campo eléctrico externo. La sustancia en cuestión adquiere las propiedades características de un cristal uniaxial con el eje óptico coincidente con la dirección del campo. Este efecto tiene su origen en la variación de la permitividad eléctrica por efecto del campo externo. En efecto, si  $\epsilon_{\text{iso}}^r$  es la magnitud escalar que representa la permitividad de la sustancia en ausencia de campo, si se aplica el campo  $\vec{E}$ , la permitividad adquiere carácter tensorial y se expresa

$$\epsilon_{ij}^r = \epsilon_{\text{iso}}^r \delta_{ij} + b E_i E_j, \quad (3.67)$$

donde  $b$  es una constante específica de la sustancia en cuestión. El cristal, al adquirir propiedades uniaxiales, provoca la deformación de la indicatriz, que era inicialmente

una esfera, en un elipsoide de revolución. Consecuentemente aparecen dos superficies de vectores de onda para la onda ordinaria y extraordinaria, respectivamente. Los valores principales del tensor de permitividad resultan

$$\begin{aligned}\epsilon_{\text{ord}}^r &= \epsilon_{\text{iso}}^r \\ \epsilon_{\text{extra}}^r &= \epsilon_{\text{iso}}^r + b E^2.\end{aligned}$$

Las correspondientes expresiones para los índices de refracción principales son

$$\begin{aligned}n_{\text{ord}} &= \sqrt{\epsilon_{\text{iso}}^r} \\ n_{\text{extra}} &= \sqrt{\epsilon_{\text{extra}}^r} \approx n_{\text{ord}} + \frac{b}{2n_{\text{ord}}} E^2,\end{aligned}$$

donde se incluye la aproximación  $b E^2 \ll \epsilon_{\text{iso}}^r$ .

Ciertamente la onda ordinaria no se distingue de la onda que se propagaba en el medio antes de la aplicación del campo externo. La onda extraordinaria, producto del efecto Kerr, se propaga a su vez con la velocidad

$$v_{\text{extra}} = c \sqrt{\frac{\text{sen}^2 \theta}{\epsilon_{\text{iso}}^r + b E^2} + \frac{\text{cos}^2 \theta}{\epsilon_{\text{iso}}^r}},$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre la dirección de propagación de la onda y la dirección del campo eléctrico externo.

Consideremos, como ejemplo, el caso  $\theta = \pi/2$ , es decir, con campo y vector de onda perpendiculares. Supongamos también que la luz recorre una distancia  $d$  en el material. En este caso, la expresión anterior provee para la velocidad el valor

$$v_{\text{extra}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{\text{iso}}^r + b E^2}}$$

y el desfase entre las dos ondas luego de recorrer la distancia  $d$  resulta

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= \omega d \left( \frac{1}{v_{\text{extra}}} - \frac{1}{v_{\text{ord}}} \right) \\ &= 2\pi \frac{b}{2n_{\text{ord}}\lambda} d E^2 \\ &= 2\pi B d E^2,\end{aligned}$$

donde

$$B = \frac{b}{2n_{\text{ord}}\lambda} \quad (3.68)$$

se denomina *constante de Kerr* y depende de la sustancia, de la temperatura y de la longitud de onda de la radiación. Notemos además que el efecto Kerr es cuadrático en el campo eléctrico aplicado. Entre las sustancias más sensibles al campo externo, es decir, las que presentan efecto Kerr más grande, podemos mencionar al nitrobenzeno, al sulfuro de carbono líquido y las perovskitas.

### *Efecto Pockels*

Este efecto, a diferencia del Kerr, es lineal en el campo eléctrico aplicado. Se observa en cristales desprovistos de centro de simetría, precisamente el caso de los piezoeléctricos. El campo aplicado da lugar a que un cristal uniaxial adquiera propiedades de biaxial y los cúbicos se transforman en uniaxiales. En el primer caso, la indicatriz óptica se modifica de un elipsoide de revolución a un elipsoide de tres ejes.

Por efecto del campo eléctrico, el tensor inicial de permitividad  $\epsilon_{ij}^r$  se transforma en

$$\epsilon_{ij}^r|_P = \epsilon_{ij}^r + \sum_{k=1}^3 g_{ijk} E_k, \quad (3.69)$$

donde  $g_{ijk}$  es un tensor de rango 3, simétrico con respecto a los índices  $i$  y  $j$ .

Como consecuencia del efecto Pockels, cuando la radiación recorre una longitud  $d$  de material sometido al campo eléctrico, se produce un desfase entre la onda ordinaria y la extraordinaria dado por

$$\Delta\Phi \approx \frac{2\pi}{\lambda} d (n_{\text{extra}} - n_{\text{ord}}) - \pi \frac{g}{n_{\text{ord}}} E \frac{d}{\lambda},$$

donde  $g$  es la componente relevante del tensor  $g_{ijk}$  que se corresponde con la dirección del campo externo. El primer término está determinado por la anisotropía natural del cristal, en tanto que el segundo está ligado a la anisotropía inducida, lineal en el campo eléctrico externo. Casos típicos de sustancias sensibles al efecto Pockels son los cristales de dihidrofosfato de potasio ( $KH_2PO_4$ ) y de ( $LiTaO_3$ ).

### *Efecto Faraday*

Una onda electromagnética linealmente polarizada que atraviesa una sustancia ubicada en un campo magnético  $\vec{H}$  constante, en la dirección del vector de onda, sufre un cambio en la dirección del plano de polarización. El efecto Faraday queda definido por el ángulo  $\phi$  entre los planos de polarización inicial y final, que está dado por

$$\phi = V d H, \quad (3.70)$$

donde  $d$  es la longitud recorrida por la onda en la materia sometida al campo magnético de magnitud  $H$  y  $V$ , llamada constante de Verdet, mide la sensibilidad magneto-óptica del medio en cuestión.

Una onda linealmente polarizada puede pensarse como la superposición de dos ondas circularmente polarizadas, una a derecha y otra a izquierda. En efecto, si bien los vectores eléctricos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ , correspondientes a las dos ondas mencionadas, rotan en sentido contrario, la suma de ellos ( $\vec{E}_1 + \vec{E}_2$ ) se mantiene constantemente sobre la dirección que define la polarización lineal. Por otra parte, la presencia de un campo magnético tiene como efecto tornar diferentes los índices de refracción de las ondas polarizadas a derecha y a izquierda. Es decir, provoca que  $n_{\text{der}}$  sea diferente a  $n_{\text{izq}}$  en una cantidad proporcional a  $H$ . Consecuentemente ambas componentes circulares, luego de recorrer la distancia  $d$  sufren un desfase

$$\Delta\Phi = \frac{\omega}{c} d (n_{\text{der}} - n_{\text{izq}}).$$



Debido a este desfase, la suma de los vectores eléctricos correspondientes a las dos ondas circularmente polarizadas cambiará de dirección en un ángulo dado precisamente por  $\phi = \Delta\Phi/2$ . Concluimos entonces que el efecto Faraday se explica por la diferencia de velocidades de propagación de las ondas polarizadas a derecha y a izquierda como consecuencia de la acción del campo magnético aplicado a la sustancia.

### 3.3.4. Problemas

- Demostrar que a medida que el número de onda  $k$  se torna más grande, la función de fase  $S$  de una onda queda determinada por la ecuación de segundo grado y primer orden

$$(\nabla S)^2 = \left( \frac{k}{k_0} \right)^2 = \epsilon^r,$$

mientras que la amplitud  $\eta_0$  de la misma satisface

$$\vec{\nabla} \log \eta_0 \cdot \vec{\nabla} S = -\frac{1}{2} \nabla^2 S.$$

Dado que  $S$  es ahora real, los frentes de onda están representados por la familia de superficies  $S = \text{constante}$  y las normales a ellas, o rayos, están dados en cada punto por  $\vec{\nabla} S$ . La función  $S$  es llamada *eikonal* y es idéntica a la *función característica* de Hamilton. Si el vector  $\vec{n}$  representa el índice de refracción  $\sqrt{\epsilon^r}$  multiplicado por un vector unitario en la dirección de la normal de la onda, entonces

$$\vec{\nabla} S = \vec{n} \quad ; \quad \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \log \eta_0 = -\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot \vec{n}.$$

Notar que estas relaciones se mantienen sólo en regiones donde el cambio en  $\epsilon^r$ , por longitud de onda, es pequeño. Por lo tanto fallan en las cercanías de bordes agudos o de cuerpos cuyas dimensiones son del orden de una longitud de onda. En tales casos debe aplicarse la ecuación de onda completa.

Sea  $d\vec{r}$  un elemento de longitud en la dirección de un rayo. Entonces

$$S = \int \vec{n} \cdot d\vec{r}.$$

Aquí  $S$  es una función de las coordenadas  $(x_0, y_0, z_0)$  de un punto inicial fijo y de las coordenadas  $(x, y, z)$  del punto final alcanzado por el rayo. De todos los caminos posibles a través de estos dos puntos, el rayo sigue en realidad el que produce un mínimo de  $S$ , es decir, tal que

$$\delta S = \delta \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \vec{n} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Este es el principio de Fermat. Si la perturbación se origina en  $(x_0, y_0, z_0)$  en el instante  $t_0$  y llega a  $(x, y, z)$  en  $t$ , entonces

$$S(x_0, y_0, z_0; x, y, z) = t - t_0$$

y el camino del rayo es tal, que el tiempo de llegada es un mínimo. [ST,V,11]

- Determinar el patrón de difracción de Fraunhofer para una onda plana incidente normalmente en una abertura rectangular presente en una pantalla conductora plana. [EY,15,13]
- Una onda plana de amplitud  $E_0$  y número de onda  $k$  polarizada linealmente incide sobre una apertura circular de radio  $a$  realizada en una pantalla plana perfectamente conductora. El vector de onda incidente hace un ángulo  $\alpha$  con la normal a la pantalla. El vector de polarización es perpendicular al plano de incidencia.

1. Calcular los campos difractados y la potencia por unidad de ángulo sólido transmitida a través de la apertura, usando la fórmula vectorial de Kirchhoff, suponiendo que el campo eléctrico tangencial en la apertura es el campo incidente no perturbado.
2. Comparar el resultado de la parte (a) con la aproximación escalar de Kirchhoff. [JA,9,7]

- Discutir la difracción debida a un pequeño orificio circular de radio  $a$  presente en una hoja plana perfectamente conductora, suponiendo que  $ka \ll 1$ .

1. Si los campos incidentes cerca de la pantalla son: normal  $\vec{E}_0 e^{-i\omega t}$  y tangencial  $\vec{B}_0 e^{-i\omega t}$ , demostrar que el campo eléctrico difractado en la zona de Fraunhofer es

$$\vec{E} = \frac{e^{i(kr - \omega t)}}{3\pi r} k^2 a^3 \left[ 2 \frac{\vec{k}}{k} \wedge \vec{B}_0 + \frac{\vec{k}}{k} \wedge \left( \vec{E}_0 \wedge \frac{\vec{k}}{k} \right) \right],$$

donde  $k$  es el vector de onda en la dirección de observación.

2. Determinar la distribución angular de la radiación difractada y demostrar que la potencia total transmitida a través del orificio es

$$P = \frac{c}{54\pi^2} k^4 a^6 (4B_0^2 + E_0^2).$$

[JA,9,10]

- Especializar la discusión del problema anterior a la difracción de una onda plana por el pequeño agujero circular. Tratar el caso general de incidencia oblicua que hace un ángulo  $\alpha$  con respecto a la normal, con polarización en el plano de incidencia y perpendicular al mismo.

1. Calcular la distribución angular de la radiación difractada y comparar con los resultados que se obtienen en la aproximación vectorial de Kirchhoff, válida en el límite  $ka \ll 1$ .
2. Demostrar que los coeficientes de transmisión para los dos estados de polarización son

$$T_{\parallel} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \left( \frac{4 + \sin^2 \alpha}{4 \cos \alpha} \right)$$

$$T_{\perp} = \frac{64}{27\pi^2} (ka)^4 \cos \alpha.$$

Notar que estos coeficientes de transmisión son un factor  $(ka)^2$  menores que los dados por la aproximación vectorial de Kirchhoff en el mismo límite. [JA,9,11]

- Mostrar que los máximos secundarios de la figura de difracción de Fraunhofer por una ranura están dados por las raíces de  $\tan \gamma = \gamma$ . Mostrar además que estos máximos ocurren para múltiplos semienteros de  $\pi$ , excluidos  $\pm 1/2$ . [MH,12,3]
- Integrar la intensidad de la radiación difractada por una abertura circular y mostrar que la intensidad contenida dentro de un ángulo  $\theta_0$  es proporcional a

$$1 - J_0^2(ka\theta_0) - J_1^2(ka\theta_0).$$

Consecuentemente, demostrar (como lo hizo Lord Rayleigh en 1881) que aproximadamente el 84% de la intensidad yace dentro de la primera franja oscura y que el 91% yace dentro de las dos primeras. Esquematizar el comportamiento de la intensidad integrada como función de  $(ka\theta_0)$ . [MH,12,9]

### 3.4. SUPERCONDUCTIVIDAD

Ciertos metales, ciertas aleaciones y ciertos óxidos cerámicos presentan propiedades eléctricas y magnéticas sorprendentes cuando se los enfría suficientemente. Estas propiedades se agrupan bajo la denominación de *superconductividad* y son conocidas desde hace más de ochenta años. En efecto, las experiencias de Kamerlingh Onnes en Leiden (1911) que condujeron a la licuefacción del helio, le permitieron disponer de temperaturas suficientemente bajas y detectar la anulación de la resistencia eléctrica de ciertos metales. En la actualidad se conocen numerosísimas sustancias cuya resistencia eléctrica prácticamente desaparece por debajo de la llamada temperatura crítica. Para metales y aleaciones esta temperatura crítica es de algunos grados Kelvin (o alguna fracción de grado Kelvin). Recientemente se han fabricado (y se siguen fabricando) ciertos óxidos cerámicos superconductores cuyas temperaturas críticas alcanzan la centena de grados Kelvin.

La evidencia experimental de la superconductividad surge con claridad a partir de la siguiente observación: sobre un anillo conductor que está en presencia de un campo magnético variable se induce una corriente (Inducción de Faraday) dada por

$$I(t) = I(0) \exp\{-Rt/L\},$$

donde  $R$  es la resistencia y  $L$  la inductancia del circuito. Esta corriente inducida se puede medir con gran precisión, por ejemplo, observando la interacción (torque) de este anillo con otro similar por el que circula una corriente conocida. De esta manera se pueden detectar resistencias de valores muy pequeños. Medidas posteriores a las de Onnes han puesto cotas superiores a la resistividad de un superconductor por debajo de la temperatura crítica que son del orden de  $10^{-21} - 10^{-23} \Omega \text{ cm}$ . Estos valores deben ser comparados con los de la resistividad del cobre puro en condiciones de conductividad normal:  $10^{-9} \Omega \text{ cm}$ . Se puede concluir entonces que un superconductor es, en principio, un conductor perfecto ya que una corriente inducida a circular en él persistirá indefinidamente sin disipación (el tiempo característico de una corriente superconductora supera los  $10^5$  años).

Los superconductores poseen en general propiedades magnéticas muy singulares. En particular la superconductividad puede ser destruida, es decir, se puede provocar la reaparición de resistencia eléctrica si se aplica a la muestra en cuestión un campo magnético suficientemente intenso.

El comportamiento de un sistema superconductor, en función de la temperatura y del campo magnético externo, puede resumirse en el *diagrama de fases* de la figura (3.4).

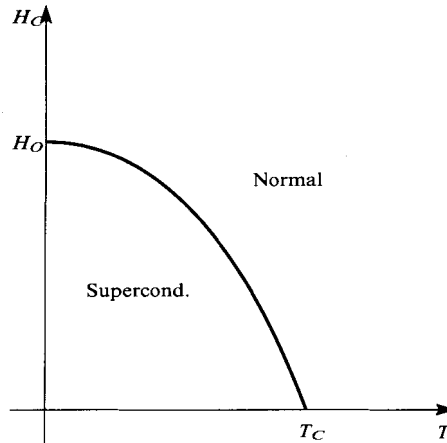


FIGURA 3.4: *Diagrama de fases de un superconductor.*

En este diagrama se observa que el campo crítico  $H_c$  varía aproximadamente como

$$H_c(T) \approx H_0 \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right],$$

donde, como surge de la figura,  $H_0$  es el valor de  $H_c$  a  $T = 0^\circ$ .

Desde un punto de vista microscópico se entiende que el estado superconductor resulta de un ordenamiento especial de los electrones de conducción. En efecto, estos electrones se asocian en pares débilmente ligados cuando la temperatura está por debajo de la temperatura crítica y se disocian por encima de ella.

### *Superconductores y corriente alternada*

En el estado superconductor no hay caída de potencial a lo largo del material debido precisamente a la ausencia de resistencia. Este hecho no es estrictamente cierto si la corriente no es constante ya que variaciones temporales de la corriente dan lugar a la aparición de un campo eléctrico y por ende a la disipación de potencia, como veremos a continuación.

La fenomenología de los superconductores puede entenderse si se supone que, por debajo de la temperatura crítica, los electrones de conducción pueden presentar dos

tipos de comportamiento diferente: unos constituyen la clase de electrones superconductores que se desplazan sin resistencia (sin colisionar) y los otros son los electrones normales que participan del proceso de conducción usual. A temperatura de  $0^\circ K$  todos los electrones son superconductores y a medida que aumenta la temperatura van desapareciendo gradualmente, hasta hacerlo completamente a  $T_c$ . En otras palabras, a una dada temperatura por debajo de  $T_c$  existen dos «fluidos» electrónicos participando de la conducción, cuyas densidades relativas dependen de la temperatura. En el caso especial de corriente continua, solamente los electrones superconductores participan del proceso. En efecto, si la corriente es constante, no puede existir campo eléctrico en el material ya que en caso contrario aparecería una aceleración y la corriente crecería indefinidamente. En consecuencia, al no existir campo eléctrico, los electrones normales no están solicitados por fuerzas que los desplacen y no participan de la conducción. Si por el contrario existe un cambio temporal de la corriente en el sistema, debe aparecer un campo eléctrico para acelerar los electrones. Debido entonces a que los electrones tienen masa, la corriente superconductor no se instala en forma instantánea. Es decir, si se aplica un campo alternado, la corriente superconductor cambia pero con un cierto atraso respecto a los cambios de la fuente, debido a la inercia (la masa) de los electrones. Concluimos así que los electrones superconductores dan lugar a una reactancia inductiva y además que una parte de la corriente variable es transportada por electrones normales ya que hay campo presente. Notemos que los electrones normales, que también son masivos, provocan a su vez una reactancia inductiva; pero ésta es despreciable frente a la resistencia provocada por los choques. Consecuentemente, la conducción en el superconductor es representable por un circuito equivalente que consiste de una inductancia ideal en paralelo con una resistencia. La corriente que circula por la resistencia, es decir, la transportada por los electrones normales, disipa energía de la manera usual. Como la masa de los electrones es muy pequeña, así lo es la inercia y en consecuencia la disipación de potencia, siempre que la frecuencia en juego no sea excesivamente alta. Es importante señalar que a frecuencias mayores que el infrarrojo, frecuencias ópticas en particular, un material superconductor se comporta de la misma forma que uno normal. Este hecho se debe a que los electrones superconductores se encuentran, en ausencia de excitación externa, en estados energéticos menores que los normales, pero a esas frecuencias altas, el campo electromagnético de la radiación excita los electrones superconductores a energías a las cuales se comportan como electrones normales.

### 3.4.1. Propiedades magnéticas de los superconductores

Cuando un conductor perfecto es colocado en un campo magnético externo se encuentra que el flujo magnético no puede penetrar a la muestra. En efecto, las corrientes superficiales inducidas mantendrían el flujo interno y persistirían por siempre. El mismo razonamiento indica que si un conductor normal se encuentra en un campo magnético externo y posteriormente se lo lleva a la condición de conductor perfecto, el flujo interno quedaría apresado por las corrientes persistentes inducidas aun cuando se retirase el campo externo. Esta discusión indica que la transición del estado normal al estado superconductor no sería reversible. Es decir, el estado final de la muestra dependería del camino seguido durante la transición.

La medida experimental detallada del comportamiento de superconductores frente a campos magnéticos demuestra, sin embargo, que la transición superconductor es reversible. En efecto, los materiales superconductores presentan el llamado *Efecto Meissner*.

### a) *Efecto Meissner*

El experimento prueba que, independientemente de la trayectoria seguida durante la transición, el flujo magnético es siempre expelido por la muestra: el vector de inducción magnética  $\vec{B}$  se anula en el interior de un superconductor de manera que el material tiene comportamiento diamagnético perfecto. Éste es el llamado *Efecto Meissner* que indica además que la transición al estado superconductor es reversible. Esta propiedad permite distinguir claramente entre un conductor perfecto (sin resistencia eléctrica) y un superconductor. En efecto, dentro de un material superconductor se verifica

$$\vec{B} = 0, \quad (3.71)$$

mientras que en un material sin resistencia puede, o no, haber campo de inducción magnética dependiendo de las circunstancias (de la historia de la muestra).

El efecto Meissner se presenta en todos los materiales superconductores ideales, con dimensiones suficientemente grandes comparadas con una longitud característica llamada longitud de penetración que introduciremos a posteriori. El efecto es además bastante independiente de la conectividad de la muestra.

Por otra parte, el comportamiento diamagnético perfecto de un superconductor puede entenderse a partir de la circulación de corrientes superficiales de apantallamiento que dan lugar a un campo magnético  $B_i$  en el interior del material, que cancela exactamente el flujo producido por el campo externo, es decir,

$$B_i = -B_e.$$

Es claro que la propiedad del superconductor puede ser descrita alternativamente adscribiendo al material bajo estas condiciones una permeabilidad magnética relativa nula ( $\mu^r = 0$ ). Es decir, todo ocurre como si adquiriese una magnetización global negativa de valor igual al campo magnético externo  $H_e$ . En otras palabras, el efecto Meissner implica que la susceptibilidad magnética en el estado superconductor es

$$\chi_m = -\frac{\kappa''}{4\pi\kappa'}.$$

### b) *Superconductores Tipo II*

La curva de magnetización de un superconductor ideal como los descritos arriba tiene la forma indicada en la Figura (3.5).

La condición de ideal se refiere a una muestra cilíndrica larga en un campo magnético longitudinal. Debemos notar que diversas sustancias, los llamados *superconductores de tipo I*, presentan este comportamiento. En todos estos casos los valores del campo crítico  $H_c$  es muy bajo. Consecuentemente su uso tecnológico en la construcción de imanes superconductores está muy restringido.

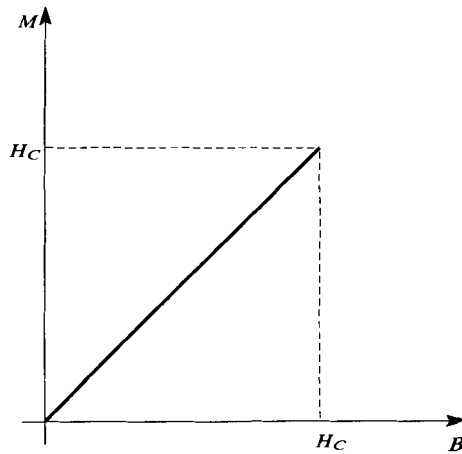


FIGURA 3.5: Curva de magnetización de un superconductor de tipo I.

Otro grupo de materiales superconductores poseen curvas de magnetización similares a la indicada en la Figura (3.6).

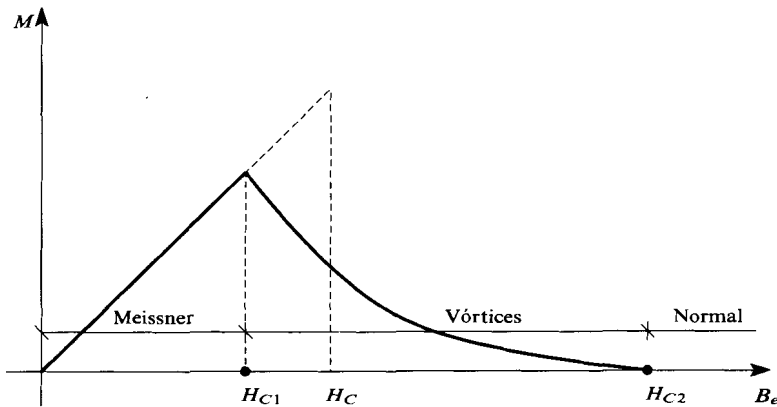


FIGURA 3.6: Curva de magnetización de un superconductor de tipo II.

Se trata en general de aleaciones o de metales de transición con alta resistividad en el estado normal. Estos materiales son llamados *superconductores de tipo II* y se comportan eléctricamente como superconductores hasta el valor  $H_{c2}$  del campo magnético. Sin embargo, para campos entre  $H_{c1}$  y  $H_{c2}$ , el campo  $B$  en el interior no es nulo y por lo tanto el efecto Meissner es incompleto. En general, el valor de  $H_{c2}$  puede ser 100 veces mayor a  $H_{c1}$ . En la región comprendida entre los dos campos críticos, el material superconductor se encuentra atravesado por líneas de flujo magnético llamadas *vórtices*.

### 3.4.2. Ecuaciones de London

Nuestra discusión anterior muestra que un superconductor, siendo diferente en su comportamiento a un conductor perfecto, necesitará un análisis electrodinámico particular. El efecto Meissner muestra que el formalismo adecuado deberá asegurar que el campo de inducción magnética en el interior del material superconductor (tipo I) debe ser siempre nulo. Es interesante destacar que es posible obtener una descripción macroscópica de un superconductor con sólo modificar la ecuación constitutiva, la ley de Ohm, manteniendo las ecuaciones de Maxwell sin modificaciones. En efecto, F. London y H. London en 1935 postularon que en un material superconductor, analizado en el gauge de Coulomb, vale la relación constitutiva

$$\vec{j} = -\frac{1}{4\pi\kappa'\mu_0\lambda_L^2}\vec{A} \quad (3.72)$$

en lugar de la ley de Ohm ( $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ ). Tomando rotor en ambos miembros de (3.72), resulta de inmediato

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{j} = -\frac{1}{4\pi\kappa'\mu_0\lambda_L^2}\vec{B}. \quad (3.73)$$

Teniendo presente ahora la ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 4\pi\kappa'\mu_0\vec{j}$$

tomando rotor en ambos miembros y recordando el apéndice poético, podemos escribir

$$-\nabla^2\vec{B} = 4\pi\kappa'\mu_0\vec{\nabla} \wedge \vec{j}.$$

de modo que usando la ecuación de London (3.73) resulta que, en el interior de un superconductor, el vector  $\vec{B}$  verifica la ecuación

$$\nabla^2\vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2}\vec{B}. \quad (3.74)$$

Esta es la ecuación del efecto Meissner. Ella muestra que en el estado superconductor, donde vale la ecuación constitutiva de London, el único tipo de campo de inducción magnética que puede existir dentro del material es exponencialmente decreciente hacia el interior de la muestra. Si llamamos  $B_0$  al campo en la superficie del material, el valor del campo hacia el interior, digamos en la dirección  $z$ , se comporta como

$$B_z = B_0 e^{-z/\lambda_L}, \quad (3.75)$$

donde se supuso que el campo es paralelo a la superficie del superconductor. Esta última expresión muestra claramente el significado de la constante  $\lambda_L$ . Ella mide la *longitud de penetración de London*.

La teoría de London, basada en la ecuación constitutiva (3.72), es sólo una aproximación. En particular, la longitud de penetración que esta teoría predice es menor (en un factor de dos o tres) a la medida experimentalmente. Un modelo un poco más refinado, pero aún a nivel fenomenológico, es el de Ginzburg-Landau, cuyo análisis



trasciende el alcance de nuestro tratamiento. A diferencia de la propuesta de London, que es puramente clásica, esta formulación usa la Mecánica Cuántica para describir los efectos de un campo magnético sobre un superconductor. La teoría de Ginzburg-Landau da lugar a una longitud de penetración dependiente del campo magnético aplicado.

### 3.4.3. Problema

- Calcular la distribución del campo de inducción magnética dentro de una lámina de material superconductor de caras planas paralelas y espesor finito, cuando se aplica un campo magnético externo paralelo a las caras.

## 3.5. RADIACIÓN DE UNA CARGA EN MOVIMIENTO

Es un hecho experimental bien conocido que las cargas eléctricas aceleradas en el vacío emiten radiación electromagnética. Esta radiación tiene importantes consecuencias prácticas por su uso y por las limitaciones que impone. Estamos interesados en estudiar la generación de radiación por cargas en movimiento y su caracterización a través de la potencia total radiada, la distribución angular y la distribución espectral.

Un análisis simple nos muestra que los campos de velocidad y de aceleración tienen un comportamiento muy diferente a grandes distancias. En efecto, las ecuaciones (2.170) y (2.179) implican que los campos de velocidad se comportan asintóticamente como

$$\vec{E}_{\text{velocidad}}, \vec{B}_{\text{velocidad}} \rightsquigarrow \frac{1}{r^2}$$

mientras que los campos de aceleración lo hacen de forma más suave

$$\vec{E}_{\text{aceleración}}, \vec{B}_{\text{aceleración}} \rightsquigarrow \frac{1}{r}.$$

Este hecho enseña que el vector de Poynting grandes distancias está dominado sólo por los campos de aceleración, con un comportamiento de la forma

$$\vec{S} \sim \frac{1}{r^2}.$$

En consecuencia, solamente estos campos pueden compensar el crecimiento del área de una esfera centrada en la fuente, de modo de proveer la energía que se escapa de la carga por radiación, sin posibilidades de retorno. Se puede afirmar entonces que una carga en movimiento uniforme en el vacío no puede entregar energía por radiación ya que sólo define campos de velocidad. Debemos notar, sin embargo, que una situación diferente ocurre en presencia de materia, como es el caso del denominado efecto Cherenkov que discutiremos en una sección posterior. Aquí nos concentramos en el estudio de cargas aceleradas.

*Régimen no relativista*

Para el caso de velocidades pequeñas,  $\beta = v/c \ll 1$ , los campos dados en las ecuaciones (2.179) y (2.181), se expresan aproximadamente como

$$\vec{E}_{\text{aceleración}} \cong \frac{\kappa}{\epsilon_0 c^2} q \frac{\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{a})}{r^3} \quad (3.76)$$

$$\vec{B}_{\text{aceleración}} \cong \frac{1}{\kappa'' c} \frac{\vec{r}}{r} \wedge \vec{E}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^3} q \frac{\vec{a} \wedge \vec{r}}{r^2}$$

y el correspondiente vector de Poynting es

$$\vec{S}_{\text{aceleración}} = \frac{1}{4\pi\kappa'} \vec{E}_{\text{aceleración}} \wedge \vec{H}_{\text{aceleración}} \cong \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{(\vec{a} \wedge \vec{r})^2}{r^5} \vec{r}.$$

Tomando la dirección de la aceleración  $\vec{a}$  coincidente con el eje polar, podemos escribir la expresión anterior de manera simplificada

$$\vec{S}_{\text{aceleración}} \cong \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \text{sen}^2 \theta \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (3.77)$$

El vector de Poynting representa el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo de modo que si recordamos que un elemento de área perpendicular a  $\vec{r}$  está dado por

$$d\vec{A} = r^2 \frac{\vec{r}}{r} d\Omega = r^2 \vec{r} d\Omega$$

podemos escribir la *distribución angular de la radiación*, es decir, la potencia radiada por unidad de ángulo sólido

$$\frac{dP}{d\Omega} = \vec{S}_{\text{aceleración}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} r^2 = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \text{sen}^2 \theta. \quad (3.78)$$

El factor  $\text{sen}^2 \theta$  controla la característica angular de la radiación emitida. Esta distribución tiene la forma que muestra la Figura (3.7).

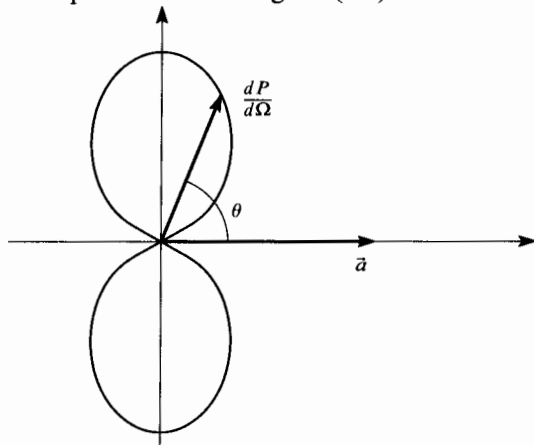


FIGURA 3.7: *Distribución angular de la radiación de una carga acelerada.*

Notemos en primer lugar que la radiación es simétrica con respecto a un plano perpendicular a  $\vec{a}$  que contiene la carga. Por otra parte, toma su valor máximo en el plano y se anula en la dirección de  $\vec{a}$ . Finalmente, se observa que tiene simetría axial y por lo tanto debe ser vista como una figura de revolución alrededor del eje perpendicular a  $\vec{a}$  que pasa por la carga. Hemos discutido previamente que, asociado con el vector de Poynting, existe densidad de impulso transportado por el campo. Consecuentemente, la carga acelerada debería desprender un impulso neto. Sin embargo, debido a la simetría de la radiación, los impulsos emitidos en una dirección son balanceados exactamente por los emitidos en la dirección opuesta. Por lo tanto, a diferencia de lo que sucede con la energía, la carga acelerada, en el límite no relativista, no emite impulso.

Finalmente, obtenemos la potencia total radiada simplemente por integración de la ecuación anterior. Es decir,

$$P = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

0

$$P = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0 c^3} q^2 a^2. \quad (3.79)$$

Esta ecuación para la energía total radiada, por unidad de tiempo, por una partícula cargada con aceleración  $\vec{a}$ , obtenida en el límite no relativista, es conocida con el nombre de *fórmula de Larmor*.

### Régimen relativista

Debemos encarar ahora el estudio de la radiación en un régimen de velocidades para el cual los efectos relativistas deben ser tomados en cuenta. Este análisis tiene importancia no sólo desde el punto de vista teórico, sino también práctico, en relación con diversos dispositivos como son por ejemplo los aceleradores de partículas. Hay dos caminos posibles a seguir para este estudio. Por un lado podríamos constreñirnos al estudio de algunas situaciones de tratamiento simple y con dificultades de cálculo abordables. La otra posibilidad es plantear, desde el comienzo, una formulación covariante para un movimiento arbitrario de la carga. Exploraremos los dos caminos. Primero trataremos los dos casos más simples que resultan ser de mayor interés: 1) La partícula cargada posee una aceleración paralela a la velocidad; 2) La aceleración es normal a la velocidad.

Caso paralelo:

$$\vec{v} \wedge \vec{a} = 0,$$

de modo que a partir de la ecuación (2.179) y luego de un poco de álgebra elemental tenemos para el campo eléctrico

$$\vec{E}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c^2} q \frac{\vec{r} \wedge (\vec{r} \wedge \vec{a})}{\left[ r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c} \right]^3}.$$

Como el campo eléctrico tiene la misma dependencia vectorial que en el caso de bajas velocidades (3.76), el cálculo del vector de Poynting sigue los mismos pasos que

en aquel caso y el resultado es

$$\vec{S}_{\text{aceleración}} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{a^2 r^4}{\left[r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}\right]^6} \text{sén}^2 \theta \frac{\vec{r}}{r}.$$

Observemos que, a diferencia del caso anterior, esta es una expresión exacta para cualquier  $\beta$  arbitrario. Otra particularidad de este caso es que el vector de Poynting no depende sólo de la aceleración como en el caso no relativista, sino también de la velocidad.

Para calcular la distribución de energía debemos ser un poco más cuidadosos que en el caso no relativista, debido a que tenemos que tomar en consideración el retardo de la señal entre el punto de emisión de la radiación y el punto de observación. Más aún, para partículas ultrarrelativistas este será el factor dominante. Así, la energía entregada por la partícula al tiempo  $t$ , en el intervalo  $dt$ , en un ángulo sólido  $d\Omega$  es

$$\begin{aligned} -d\mathcal{E}(\theta) &= \vec{S}_{\text{aceleración}} \cdot \frac{\vec{r}}{r} r^2 d\Omega dt \\ &= \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{a^2 r^6}{\left[r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}\right]^6} \text{sén}^2 \theta d\Omega dt, \end{aligned}$$

que se corresponde con la radiación que emana de la partícula al tiempo  $t_P$ , en el intervalo  $dt_P$ . Luego la potencia radiada por la partícula, por unidad de ángulo sólido, que cruza el elemento de área a distancia  $\vec{r}$  y al tiempo  $t$ , es igual a la energía por unidad de tiempo cedida por la partícula al tiempo  $t_P$

$$\frac{dP}{d\Omega} = -\frac{d\mathcal{E}(\theta)}{dt_P} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{a^2 r^6}{\left[r - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c}\right]^6} \text{sén}^2 \theta \frac{dt}{dt_P}.$$

Si tenemos en cuenta ahora que, a partir de la ecuación (2.178), con la ayuda de (2.157) y (2.176), se puede escribir

$$\frac{dt}{dt_P} = 1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c r}$$

resulta

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{a^2}{\left[1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{r}}{c r}\right]^5} \text{sén}^2 \theta = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 \frac{a^2 \text{sén}^2 \theta}{[1 - \beta \cos \theta]^6}. \quad (3.80)$$

Algunas observaciones importantes: el término  $dt/dt_P$  en el sistema en reposo (en el límite no relativista) se aproxima a 1 y fue por esa razón que no se lo tomó en cuenta cuando se hizo el análisis previo; la distribución angular en el mismo límite ( $\beta \rightarrow 0$ ) tiende a la distribución no relativista; finalmente, como se desprende de la Figura (3.8), la distribución angular se dirige hacia adelante cuando  $\beta$  aumenta, indicando que, a diferencia del caso no relativista, la carga no sólo radia energía sino que emite un impulso neto. De este hecho nos ocuparemos en detalle un poco más adelante.

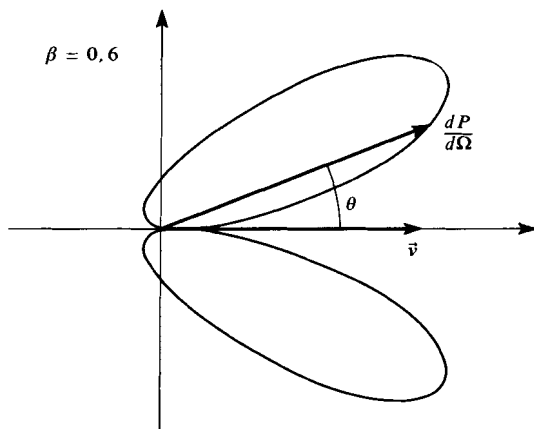


FIGURA 3.8: Lóbulos de radiación en el caso relativista.

La potencia total radiada se calcula fácilmente realizando las integrales angulares

$$P = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^2 \theta}{[1 - \beta \cos \theta]^5} \text{sen} \theta \, d\theta \, d\varphi$$

la integral sobre  $\varphi$  es trivial y la integral sobre  $\theta$  es un poco más complicada, luego tenemos

$$P = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \gamma^6, \quad (3.81)$$

resultado que está de acuerdo con la fórmula de Larmor (3.79), cuando  $\beta \rightarrow 0$ . Las condiciones de movimiento bajo las cuales acabamos de discutir la radiación de cargas se aproxima bastante a la situación experimental de frenado de partículas cargadas en la materia y por ello es conocida como radiación de frenado.

Caso perpendicular:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0.$$

Discutiremos en particular el caso en que la partícula cargada está confinada a una órbita circular. El procedimiento para obtener la distribución de energía es el mismo que en el caso anterior. Sin embargo, ahora el álgebra vectorial involucrada es más pesada. Pensamos que no se justifica una deducción detallada y por lo tanto damos directamente la distribución angular correspondiente

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \left[ \frac{1}{(1 - \beta \cos \theta)^3} - \frac{(1 - \beta^2) \text{sen}^2 \theta \cos^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \theta)^5} \right],$$

donde  $\theta$  es el ángulo formado por la dirección de observación  $\vec{r}/r$  dirigida hacia el punto  $A$  y la velocidad  $\vec{v}$ . Por otra parte,  $\varphi$  es el ángulo azimutal del versor  $\vec{r}/r$  en el plano perpendicular a la velocidad  $\vec{v}$  medido respecto del vector aceleración  $\vec{a}$ , como se muestra en la Figura (3.9).

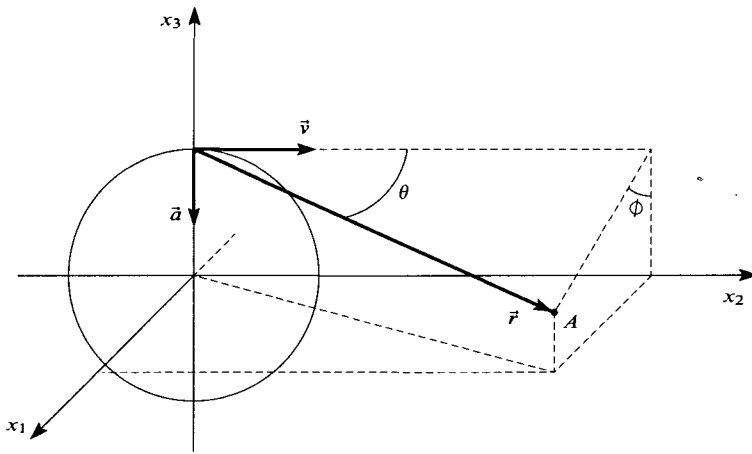


FIGURA 3.9: *Geometría del caso perpendicular.*

Esta radiación resulta simétrica respecto del plano  $(\vec{v}, \vec{a})$  y se anula en las dos direcciones que satisfacen la relación

$$\cos \theta = \beta.$$

En la figura (3.10) se presenta la distribución de energía radiada en el plano mencionado.

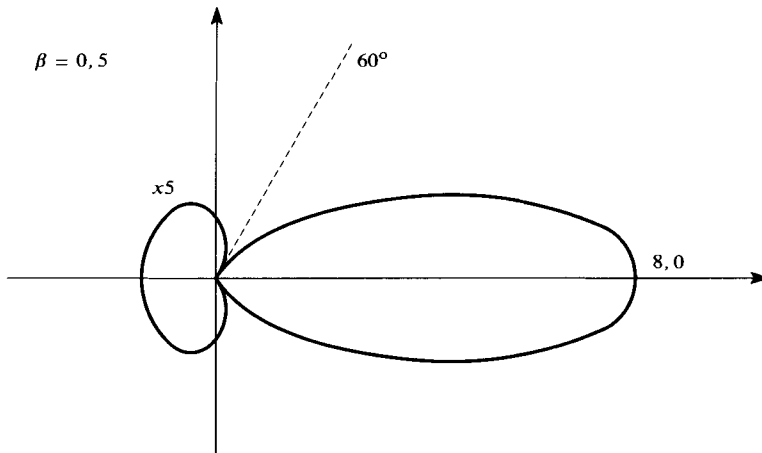


FIGURA 3.10: *Distribución de la radiación en el caso perpendicular.*

Como se observa, la radiación es mucho más intensa en la dirección de la velocidad de la carga que en cualquier otra.

Es posible calcular también la potencia radiada, realizando las respectivas integrales angulares, tal como se ilustró en el caso anterior, para obtener

$$P = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0 c^3} q^2 a^2 \gamma^4. \quad (3.82)$$

Es inmediato comprobar que en el límite no relativista ( $\beta \rightarrow 0$ ) se reproduce la fórmula de Larmor (3.79).

Este tipo de radiación para velocidades perpendiculares a la aceleración se produce copiosamente en los aceleradores de partículas. En éstos, mediante un intenso campo magnético se acelera y mantiene a las partículas en una órbita circular y por ello se los denomina sincrotrones. Este es el origen del nombre *radiación sincrotrónica* como se la conoce. Estas máquinas pueden estar diseñadas precisamente como fuentes de radiación (o de luz sincrotrón) y concentran en general su frecuencia de emisión en la región ultravioleta y de rayos X. Aquí se percibe su gran importancia en análisis de materiales. Es instructivo efectuar un análisis comparativo de los dos tipos actuales más importantes de aceleradores de partículas cargadas para mostrar las posibilidades de aceleración de electrones y protones.

## Tratamiento general

Discutiremos la radiación en una forma general apelando al tensor energía-impulso generado por los campos de aceleración de una partícula cargada. La variación del tetravector energía-impulso de la partícula  $\Delta p^\mu$ , que es absorbida por el campo electromagnético, representa la transferencia irreversible de esa magnitud desde la partícula al campo. El movimiento de la partícula, como sabemos, está caracterizado por una trayectoria en el espacio-tiempo de Minkowski. Consecuentemente, la pérdida de energía-impulso por parte de la partícula, en una región  $V$  del espacio-tiempo, que es transportada por el campo a través de la superficie  $\sigma$  que limita a ese volumen es

$$\Delta p^\mu = - \int \sum_{\alpha=0}^3 d\sigma_\alpha T_{\text{campo de aceleración}}^{\mu\alpha}. \quad (3.83)$$

Calcularemos la radiación, a través de una superficie  $\sigma$ , cuando la carga se mueve un elemento infinitesimal  $dl$  sobre su línea de universo caracterizada por un elemento de tiempo propio  $d\tau$ . La superficie  $\sigma$  limita el volumen definido por los conos de luz con vértices en el comienzo y el final del elemento de línea  $dl$ , como se indica en la Figura (3.11).

Utilizamos la notación que fue introducida en relación con los potenciales de Liénard-Wiechert y entonces llamamos  $x_P$  a la posición sobre la línea de universo de la carga, que se conecta con el punto de observación  $x$ , mediante un rayo de luz. Es decir,  $x$  es un punto del cono de luz cuyo vértice está en la posición de la carga: intersección del cono con su línea de universo.

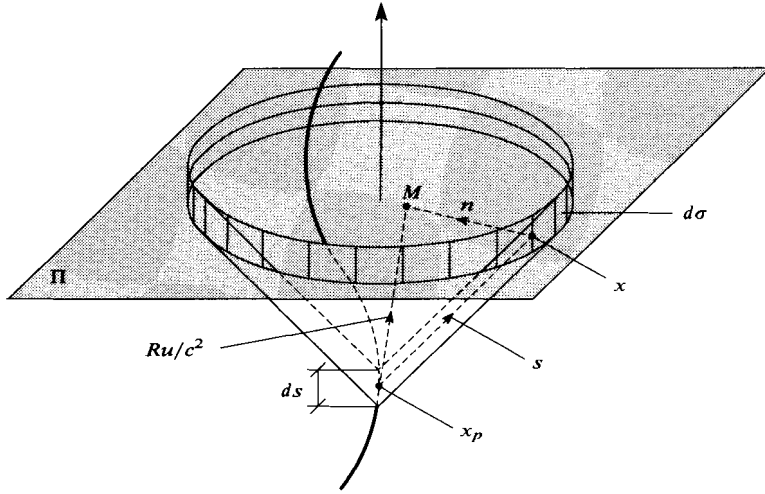


FIGURA 3.11: *Línea de Universo.*

El tensor de campo en  $x$  está dado por

$$F_{\alpha\beta} \text{ aceleración} = \left( \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} \right) = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \frac{1}{P^3} [P s_\alpha \dot{u}^\beta - s_\alpha u^\beta Q] - (\alpha \leftrightarrow \beta) \quad (3.84)$$

con

$$P = \sum_{\lambda=0}^3 s^\lambda u_\lambda \quad y \quad Q = \sum_{\lambda=0}^3 s^\lambda \dot{u}_\lambda,$$

donde

$$\dot{u}_\lambda = \frac{du_\lambda}{d\tau} \quad (3.85)$$

son las componentes del tetravector aceleración de la partícula.

Por otra parte, a partir de la ecuación (2.117)

$$\sum_{\alpha=0}^3 u^\alpha u_\alpha = -c^2,$$

de modo que

$$\sum_{\alpha=0}^3 u^\alpha \dot{u}_\alpha = 0$$

expresa la ortogonalidad entre la aceleración y el tetravector velocidad.

El tensor de energía-impulso del campo electromagnético es a su vez

$$T_{\text{electromagnético}}^{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} \sum_{\beta=0}^3 \left( F^{\alpha\beta} F_{\beta\nu} + \frac{1}{4} g^{\alpha\nu} \sum_{\sigma=0}^3 F_{\beta\sigma} F^{\beta\sigma} \right).$$



De este tensor, sólo estamos interesados en la contribución de los campos de aceleración. Es fácil mostrar, a partir de la ecuación (3.84), que para este caso

$$\sum_{\alpha, \beta=0}^3 F_{\alpha\beta} \text{aceleración} F^{\alpha\beta} \text{aceleración} = 0$$

y por lo tanto

$$T_{\text{electromagnético}}^{\alpha\nu} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \frac{1}{P^4} s^\alpha s^\nu \left[ \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta - c^2 \frac{Q^2}{P^2} \right].$$

Ahora bien, como  $T_{\text{electromagnético}}^{\alpha\nu}$  es proporcional al tetravector  $s$ , la contribución a la integral (3.83) proveniente de los conos de luz es nula, ya que el elemento de área es normal a ambos conos. Este hecho significa físicamente que no hay transporte de energía-impulso a través de los conos y que por lo tanto sólo habrá contribución no nula de la radiación que atraviesa el área  $d\sigma$  de la Figura (3.11). En esta figura también se indica el plano  $\Pi$  que pasa por  $x$  y es, por construcción, ortogonal al tetravector velocidad  $u$ . Además la prolongación de la tangente a la línea de universo en  $x_P$  corta al plano  $\Pi$  en el punto  $M$ . Si  $n$  es un tetravector en el plano  $\Pi$  que une  $M$  con  $x$ , es posible escribir

$$s^\lambda = - \left( P \frac{u^\lambda}{c^2} + n^\lambda \right). \quad (3.86)$$

Dado que  $u$  es perpendicular a  $n$ ,

$$\sum_{\lambda=0}^3 u^\lambda n_\lambda = 0; \quad (3.87)$$

consecuentemente

$$\sum_{\lambda=0}^3 s^\lambda s_\lambda = 0 = \sum_{\lambda=0}^3 \left( P \frac{u^\lambda}{c^2} + n^\lambda \right) \left( P \frac{u_\lambda}{c^2} + n_\lambda \right)$$

y finalmente

$$\sum_{\lambda=0}^3 n^\lambda n_\lambda = \frac{P^2}{c^2},$$

que muestra que  $n$  es un tetravector tipo espacio, siendo  $u$  un tetravector tipo tiempo.

Para el cálculo que sigue es útil disponer del producto

$$\sum_{\lambda=0}^3 s^\lambda n_\lambda = -P^2.$$

Para calcular efectivamente la integral, adoptamos el sistema de referencia en el que el tetravector velocidad  $u$  tiene sólo componente temporal. Allí escribimos para el elemento de área

$$d\sigma^\mu = dl P d\Omega n^\mu,$$

donde  $d\Omega$  es el ángulo sólido espacial. Luego la ecuación (3.83) se reduce a

$$\begin{aligned}\Delta p^\mu &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \int \sum_{\alpha=0}^3 dl P d\Omega n_\alpha \frac{1}{P^4} s^\mu s^\alpha \left[ \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta - c^2 \frac{Q^2}{P^2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \Delta l \int d\Omega \frac{1}{P} s^\mu \left[ \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta - c^2 \frac{Q^2}{P^2} \right],\end{aligned}$$

donde  $\Delta l = \int dl$ . Reemplazando ahora  $s^\mu$  dado en la ecuación (3.86), tenemos

$$\Delta p^\mu = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \Delta l \int d\Omega \frac{1}{P} \left( P \frac{u^\mu}{c} + n^\mu \right) \left[ c^2 \frac{Q^2}{P^2} - \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta \right]. \quad (3.88)$$

Como en el sistema en reposo de la partícula el tetravector está contenido en el plano  $\Pi$ , elegimos la dirección de la componente espacial de la aceleración como la dirección a partir de la cual medimos el ángulo de la componente espacial del tetravector  $n^\mu$ . Luego es fácil ver que

$$\int d\Omega n^\mu = 0$$

y que

$$Q^2 = \frac{P^2}{c^2} \cos^2 \theta.$$

Por lo tanto, la ecuación (3.88) finalmente resulta

$$\Delta p^\mu = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \Delta s u^\mu \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta \int d\Omega (1 - \cos^2 \theta)$$

ó

$$\Delta p^\mu = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \Delta s u^\mu \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta.$$

Si bien el cálculo fue realizado en el sistema en reposo de la partícula, el resultado presentado es la extensión covariante natural. A los efectos de concretar un análisis de la expresión anterior es conveniente reescribirla en el límite cuando  $\Delta l \rightarrow 0$ , para obtener

$$\frac{dp^\mu}{dl} = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 u^\mu \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta = \mathcal{R} u^\mu, \quad (3.89)$$

donde la cantidad

$$\mathcal{R} = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta \quad (3.90)$$

es un escalar. Tratemos de dar una interpretación física a este invariante de Lorentz. Para ello es conveniente analizar la cuarta componente de la ecuación anterior. Recordando la expresión (2.122) y la relación entre el tiempo propio y el tiempo de la partícula, podemos escribir

$$\frac{dE}{dt_P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt_P} = c^3 \mathcal{R}.$$

En esta ecuación, el primer miembro es la potencia entregada por la partícula, de donde se concluye que el invariante es proporcional a la potencia y por lo tanto ésta es un invariante o escalar de Lorentz. Para completar este análisis, tratemos de expresar  $\mathcal{R}$  como una función de la velocidad y su derivada. De la ecuación (2.116) y haciendo uso de (2.123), tenemos que

$$c^3 \mathcal{R} = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 c^3 \sum_{\beta=0}^3 \dot{u}^\beta \dot{u}_\beta = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \frac{1}{c} \gamma^6 \left[ \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - (\vec{\beta} \wedge \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \wedge \vec{\beta}) \right];$$

por consiguiente, la potencia resulta

$$P = \frac{d\mathcal{E}}{dt_P} = c^3 \mathcal{R} = \frac{2}{3} \left( \frac{\kappa}{\epsilon_0} q \right)^2 \frac{1}{c} \gamma^6 \left[ \vec{\beta} \cdot \vec{\beta} - (\vec{\beta} \wedge \vec{\beta}) \cdot (\vec{\beta} \wedge \vec{\beta}) \right],$$

que reproduce la fórmula de Larmor, en el límite de bajas velocidades, y más aún, contiene los casos particulares que fueron estudiados previamente: el caso en que la aceleración de la partícula es paralela a la velocidad (3.81) y en el que son normales entre sí (3.82).

Finalmente es interesante hacer notar que la ecuación (3.89) muestra una contribución no nula para las componentes espaciales del impulso radiado por la partícula. Consecuentemente, aparece una asimetría en los lóbulos de radiación, hecho que ya habíamos anticipado en los ejemplos anteriores. Es claro también que en el límite  $\beta = 0$ , es decir, en el sistema de reposo de la partícula o a muy baja velocidad, la cantidad de impulso transferido es nulo. En este límite entonces se recobra la simetría del lóbulo de radiación, como ya también habíamos comentado.

### **Campo de reacción**

Como toda carga en movimiento acelerado emite radiación electromagnética, el principio de conservación de la energía implica que la energía cinética de la partícula debe disminuir a menos que fuerzas externas provean el trabajo necesario para compensar esa pérdida. Por lo tanto, no es del todo correcto determinar el movimiento de la partícula solamente a partir del campo externo al cual está sometida. Para dar una descripción completa, deberíamos entonces incorporar a las ecuaciones de movimiento el campo producido por la propia partícula. Esta incorporación conduce a un problema extremadamente complejo de ecuaciones diferenciales acopladas. Sin embargo, antes de delinear un cálculo aproximado, es conveniente hacer un comentario. La teoría clásica de partículas puntuales cargadas fue iniciada por los trabajos de Lorentz y extendida posteriormente por Dirac, Wheeler, Feynman y otros, para incluir las correcciones radiativas. El tema dio origen a grandes controversias hasta que la mecánica cuántica y la teoría cuántica de campos brindaron el marco adecuado

para su comprensión. Si bien, en la mayoría de las situaciones el tratamiento clásico no provee la aproximación correcta, es instructivo comprender las limitaciones del mismo mediante un estudio completo de la dinámica de cargas puntuales.

Las ecuaciones de movimiento de una carga relativista en interacción con su propio campo electromagnético, tal como vimos al discutir el Principio de Mínima Acción, resultan

$$m \frac{d^2 x_\mu}{d\tau^2} = q \sum_\nu (F_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}^{\text{externo}}) \dot{x}^\nu \quad (3.91)$$

$$\sum_\nu \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu \quad (3.92)$$

$$\begin{aligned} J_\mu &= q \int d\tau \dot{x}_\mu \delta^4(x - x_P(\tau)) \\ &= q \int d\tau \dot{x}_\mu \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_P(\tau)) \delta(t - t_P(\tau)), \end{aligned} \quad (3.93)$$

que son las ecuaciones acopladas para la partícula y el campo electromagnético.

Explicitando ahora el gauge de Lorentz, (3.92) se reduce a

$$\square^2 A_\mu = \frac{4\pi\kappa}{\epsilon_0 c} J_\mu.$$

La solución de esta ecuación, haciendo uso de la función de Green retardada (1.216), es

$$A_\mu = \frac{\kappa}{\epsilon_0 c} \int d^3x' \int dt' \frac{\delta(t' - t + \frac{R}{c})}{R} J_\mu(\vec{x}', t'), \quad (3.94)$$

donde  $R = |\vec{x} - \vec{x}'|$ .

Por otra parte, la densidad de corriente (3.93) puede simplificarse haciendo la integral en la variable  $\tau$ , para obtener

$$J_\mu(\vec{x}) = q \delta^3(\vec{x} - \vec{x}_P(t)) \{c, \vec{v}(t)\}.$$

Si se hace uso de esta expresión para calcular el tetrapotencial, aparecen integrales infinitas. Por lo tanto, para evitar la singularidad proveniente de la delta de Dirac, se introduce una distribución de carga de tamaño finito, a modo de regularización, y escribimos la ecuación anterior como

$$J_\mu(\vec{x}) = \rho(\vec{x} - \vec{x}_P(t)) \{c, \vec{v}(t)\}, \quad (3.95)$$

donde  $\rho$  es la densidad de carga de la partícula y  $\vec{x}_P$  la posición de su centro de masa. Además se supone que la distribución es rígida y esféricamente simétrica, centrada alrededor de  $\vec{x}_P$ . A partir de aquí surge que con un solo parámetro podemos controlar la distribución para asegurar que en el límite tienda a la distribución puntual. Si reemplazamos la ecuación (3.93) en la expresión (3.94), las componentes del tetravector potencial son

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^2} \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t'))}{R} \frac{d\vec{x}_P}{dt'} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) \quad (3.96)$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t'))}{R} \delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right). \quad (3.97)$$

En el sistema en reposo instantáneo de la partícula, la componente magnética no contribuye a la fuerza y en esas condiciones la ecuación (3.91) puede ser reemplazada por la ecuación de movimiento no relativista

$$m \frac{d^2 \vec{x}_P}{dt^2} = \int d^3x' \rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t)) \vec{E}(\vec{x}', t) + \vec{F}_{\text{externa}}. \quad (3.98)$$

El campo eléctrico se calcula, como es sabido, a partir de

$$\vec{E} = -\kappa'' \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} \phi,$$

donde  $\vec{A}$  y  $\phi$  están dados por las ecuaciones (3.96) y (3.97), respectivamente. La delta de Dirac que aparece en el integrando de esas expresiones puede aproximarse, en el régimen quasi-no relativista, mediante

$$\delta\left(t' - t + \frac{R}{c}\right) = \delta(t' - t) + \frac{R}{c} \dot{\delta}(t' - t) + \frac{R^2}{2c^2} \ddot{\delta}(t' - t) + \dots$$

De modo que reemplazando en (3.96) y en (3.97), tenemos

$$\begin{aligned} \vec{A} &\approx \frac{\kappa}{\kappa'' \epsilon_0 c^2} \left\{ \frac{d\vec{x}_P}{dt} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t))}{R} - \frac{1}{c} \frac{d^2 x_P}{dt^2} \int d^3x' \rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t)) \right\} \\ \phi &\approx \frac{\kappa}{\epsilon_0} \left\{ \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t))}{R} - \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int d^3x' \rho(\vec{x}' - \vec{x}_P(t)) \right\}. \end{aligned}$$

Usando estas expresiones para los potenciales, podemos calcular el campo eléctrico  $\vec{E}$ . El próximo paso es reemplazar esa expresión para el campo en la ecuación de movimiento (3.98), a fin de obtener el siguiente resultado

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{externo}} + \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 \vec{x}}{dt^3} + \dots,$$

donde

$$U = \frac{\kappa}{2\epsilon_0} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x} - \vec{x}_P) \rho(\vec{x}' - \vec{x}_P)}{R}$$

es la energía electrostática de la partícula.

Observamos que el segundo término del miembro derecho de la expresión (3.5) tiene el mismo comportamiento que el miembro izquierdo y por lo tanto el coeficiente  $\frac{4}{3} U/c^2$  genera una contribución extra a la masa de la partícula, llamada *masa electromagnética*. El tercer término del lado derecho, llamado *reacción radiativa*, no depende de la estructura de la partícula como es el caso de la masa. Su origen debe encontrarse en la reacción que produce sobre la partícula la energía radiada. Los términos indicados con puntos suspensivos, que corresponden a derivadas de mayor orden, no serán considerados porque sus coeficientes se anulan en el límite de una carga puntual.

Para conocer la masa electromagnética debemos calcular  $U$ . Para ello se necesita algún modelo para la distribución de carga. Supongamos el modelo más simple en el que la carga  $e$  se encuentra distribuida sobre la superficie de una esfera de radio  $a$ . Obviamente, el límite  $a \rightarrow 0$  corresponde al caso de una carga puntual. El cálculo de la energía electromagnética provee

$$U = \frac{\kappa q^2}{\epsilon_0 a}.$$

En consecuencia, la masa electromagnética es

$$m_{em} = \frac{4U}{3c^2} = \frac{2}{3} \frac{\kappa q^2}{\epsilon_0 ac^2}, \quad (3.99)$$

que, como se ve, diverge cuando  $a \rightarrow 0$ . La presencia de una masa electromagnética asociada a una partícula cargada significa que al moverse, ésta arrastra consigo un campo electromagnético que se traduce en un efecto de inercia adicional para la partícula. En el lenguaje de la teoría cuántica de campos, se diría que la partícula es acompañada por una nube de fotones, que son continuamente emitidos y absorbidos. Por lo tanto, concluimos que la masa total de la partícula es

$$m_{\text{total}} = m_0 + m_{em},$$

es decir, la masa observada consiste, por lo menos, de dos partes: una mecánica y una electromagnética. Pero, como mencionamos, en el límite de una partícula puntual, la masa electromagnética se hace infinita, de modo que la teoría pierde allí significado físico. De manera de restituirle significado, se procede a identificar la masa total con la masa medible o experimental. Es decir, en el caso del electrón escribimos  $m_{\text{total}} = m_{\text{electrón}}$  y de esa forma, se fuerza a  $m_0$  a compensar las divergencias electromagnéticas. Este procedimiento es llamado *renormalización de la masa* en la electrodinámica clásica. Un procedimiento totalmente análogo se sigue en la teoría cuántica de campos, para dar significado físico a la masa y la carga de las partículas. Digamos que aun dentro de este marco más elaborado, el problema del origen de la masa de las partículas no está completamente dilucidado.

Debemos mencionar también la existencia de propuestas más especulativas que suponen que la masa del electrón, por ejemplo, es toda de origen electromagnético y por lo tanto la masa mecánica sería nula. Sobre la base de estas consideraciones, se puede introducir un tamaño para el electrón a partir de la ecuación (3.99). En efecto, identificando la masa electromagnética con la masa del electrón, resulta

$$m_{em} = m_{\text{electrón}} = \frac{2}{3} \frac{\kappa e^2}{\epsilon_0 ac^2},$$

de donde

$$a = \frac{2}{3} \frac{\kappa e^2}{\epsilon_0 m_{\text{electrón}} c^2}.$$

Como el número  $\frac{2}{3}$  es una cantidad que depende de la distribución que se elija para determinar  $U$ , es usual definir a

$$r_e = \frac{\kappa e^2}{\epsilon_0 m_{\text{electrón}} c^2} \quad (3.100)$$

como el *radio clásico del electrón*. Su valor numérico es

$$r_e = 2.82 \cdot 10^{-13} \text{ cm.}$$

Concluimos entonces que esta es la escala por debajo de la cual el tratamiento clásico tiene dificultades graves. Sin embargo, esta longitud  $r_e$  es mucho menor que la *longitud de onda Compton* del electrón

$$\frac{\lambda_e}{2\pi} = \frac{\hbar}{m_e c} = \frac{r_e}{\alpha} = 3,86 \cdot 10^{-11} \text{ cm,}$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida y  $\alpha \approx 1/137$  la *constante de estructura fina*. La longitud de onda Compton define la escala por debajo de la cual los efectos cuánticos son importantes. Estos efectos, como consecuencia del principio de incerteza, hacen perder sentido al concepto de carga puntual.

Para analizar el significado físico del tercer término del miembro derecho de (3.5), calculamos el trabajo ligado a este término

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{reacción}} \cdot \vec{v} dt = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \frac{d^2 \vec{v}}{dt^2} \cdot \vec{v} dt.$$

Integrando por partes, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{reacción}} \vec{v} dt = \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \left[ \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right]_{t_1}^{t_2} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d\vec{v}}{dt} \right)^2 dt.$$

Suponiendo ahora que el estado de movimiento de la partícula es el mismo en los tiempos  $t_1$  y  $t_2$  y recordando la fórmula de Larmor para la potencia radiada por una carga acelerada (3.79), obtenemos

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{\text{reacción}} \cdot \vec{v} dt = - \int_{t_1}^{t_2} P_{\text{Larmor}} dt.$$

Esta ecuación expresa que la energía entregada por la partícula genera una reacción mecánica sobre ella misma. Además, esta reacción sólo depende de los campos electromagnéticos lejanos a los que da lugar la partícula cargada en su movimiento acelerado. A diferencia de la masa, es independiente de los campos cercanos, que son los campos sensibles a los detalles de la distribución de carga fuente.

Debemos notar que, a pesar de que podemos eliminar los infinitos de la masa, aún quedan problemas a ser resueltos. Observemos que la ecuación de movimiento da la partícula cargada

$$m_e \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{externo}} - \frac{2}{3} \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \frac{d^3 \vec{x}}{dt^3}. \quad (3.101)$$

En ausencia de fuerzas externas, además de la solución  $\vec{v} = \text{constante}$ , admite soluciones con aceleración creciente o autoaceleradas, de la forma

$$\vec{v} = \vec{v}(0) e^{t/\tau_e},$$

donde

$$\tau_e = \frac{r_e}{c},$$

que resulta ser el tiempo que tarda la luz en recorrer la distancia equivalente al radio clásico del electrón. Esta es una solución sin significado físico. Luego la ecuación (3.101) es incompleta y debe ser suplementada con alguna condición para eliminar esta solución espuria. Para el caso de la partícula libre, la solución de esta dificultad es inmediata. En efecto, como la ecuación diferencial que rige el movimiento de la partícula es de tercer orden, se necesitan tres condiciones iniciales para determinar el movimiento. Ellas pueden ser: la posición inicial  $\vec{x}(0)$ , la velocidad inicial  $\vec{v}(0)$ , como lo es en cualquier problema de la dinámica de un punto y la aceleración inicial  $\vec{a}(0) = \dot{\vec{v}}(0)$ . Para eliminar la solución de autoaceleración, basta con elegir  $\vec{a}(0) = 0$ .

En el caso en que existan fuerzas externas presentes, para determinar la constante es suficiente con requerir que la aceleración crezca de una manera controlada para tiempos asintóticos. De esta manera se podrá compatibilizar el principio de conservación de energía con el trabajo que realiza la fuerza externa. Como ejemplo consideremos el caso en que la fuerza externa es una función arbitraria pero acotada del tiempo. Multiplicamos la ecuación (3.101) por el factor integrante  $e^{-t/\tau_e}$  y tenemos

$$-m_e \frac{d}{dt} \left( \tau_e e^{-t/\tau_e} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \right) = e^{-t/\tau_e} \vec{F}_{\text{externo}}$$

de modo que puede ser integrada para dar

$$m_e \tau_e e^{-t/\tau_e} \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = - \int_0^t dt' e^{-t'/\tau_e} \vec{F}_{\text{externo}}(t') + \tau_e \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2}(0).$$

Si pretendemos que, cuando  $t \rightarrow \infty$ , el crecimiento de la aceleración sea más lento que una exponencial, debemos exigir que el lado derecho de la ecuación se anule en este límite. Esta exigencia determina la condición inicial que se busca. Luego tenemos

$$m_e \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{e^{t/\tau_e}}{\tau_e} \int_t^\infty dt' e^{-t'/\tau_e} \vec{F}_{\text{externo}}(t').$$

Para que las integrales existan, se ha supuesto que la fuerza es acotada. Es interesante notar que el problema se ha reducido a la ecuación de Newton con una fuerza no local en el tiempo. Esto tiene consecuencias lógicas en lo referente a la causalidad. A fin de ilustrar este punto, consideramos el caso de una fuerza tipo escalón o función de Heaviside que actúa a partir de  $t = 0$ . Calculamos entonces, en forma explícita, el lado derecho de la última ecuación para obtener

$$\frac{e^{t/\tau_e}}{\tau_e} \int_t^\infty dt' e^{-t'/\tau_e} \vec{F}_{\text{externo}}(t') = \begin{cases} e^{t/\tau_e} & \text{para } t < 0 \\ 1 & \text{para } t > 0 \end{cases}.$$

En consecuencia, es fácil ver que la aceleración no es nula para tiempos negativos, cuando la fuerza es cero y crece con un tiempo característico  $\tau_0$ , pequeño del orden  $10^{-23}$ . Luego toma un valor constante para tiempos mayores que  $t = 0$ , cuando la fuerza externa actúa. La región de tiempos negativos es acausal. Ahora bien, un



tiempo  $\tau_e$ , ligado a la acausalidad, es admitido por el principio de incerteza de la mecánica cuántica y por lo tanto la acausalidad queda escondida por las fluctuaciones cuánticas. El principio de incerteza expresa

$$\Delta E \cdot \Delta t > \hbar,$$

donde  $\Delta t$  es la indefinición en el intervalo temporal en presencia de fluctuaciones  $\Delta E$  de la energía. Luego para tener una estimación de valores, tomemos  $\Delta E \simeq m_e c^2$ , la escala natural, con lo cual resulta una indeterminación en el tiempo del orden de  $\Delta t \simeq \hbar / (m_e c^2) \simeq 137 \tau_e$ . Este valor justifica ignorar, desde un punto de vista macroscópico, la aparente violación de causalidad clásica.

Finalmente comentemos que todo lo calculado en esta sección puede ser obtenido en forma manifiestamente relativista, pero las dificultades que entraña ese tipo de tratamiento no se justifican desde el punto de vista conceptual. Por otro lado, remarquemos que el ingrediente cuántico del problema es esencial y que una discusión más profunda debería ser realizada en el marco de la electrodinámica cuántica.

### 3.5.1. Problemas

- Demostrar que la radiación de una partícula cargada, acelerada en forma colineal, es máxima para la dirección definida por

$$\cos \theta_{\max} = \frac{\sqrt{1 + 15 \delta^2} - 1}{3 \beta}.$$

Obtener el valor de  $\theta_{\max}$  en el límite  $\beta \rightarrow 1$ . [MH,7,5]

- Las coordenadas de una carga  $q$  que se mueve en el plano  $(x, y)$  son funciones de tiempo de la forma:

$$x = x_0 e^{-t^2/a^2} \quad ; \quad y = y_0 e^{-t^2/b^2}.$$

Hallar la distribución de frecuencia por ángulo sólido de la intensidad radiada  $dI(\omega)/d\Omega$ . [EY,14,3]

- El primitivo modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno consiste de un electrón moviéndose en una órbita estacionaria circular alrededor del protón. Si el radio de la órbita (radio de Bohr) es  $0,53 \cdot 10^{-8}$  cm, mostrar, que en el ámbito de la teoría clásica, el electrón radiaría energía a razón de  $0,46 \text{ erg/seg}$  y por lo tanto el átomo colapsaría casi instantáneamente. [MH,7,12]
- Una partícula de carga  $e$  describe una trayectoria circular de radio  $R$  en el plano  $(x, y)$  moviéndose con velocidad circular constante  $\omega_0$ .

1. Mostrar que la expresión exacta para la distribución angular de la potencia radiada correspondiente al  $m$ -ésimo múltiplo de  $\omega_0$  es

$$\frac{dP_m}{d\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^4 R^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 c^3} m^2 \left[ \left( \frac{dJ_m(m \beta \text{ sen } \theta)}{d(m \beta, \text{ sen } \theta)} \right)^2 + \frac{\cot^2 \theta}{\beta^2} J_m^2(m \beta \text{ sen } \theta) \right],$$

donde  $\beta = \omega_0 R/c$  y  $J_m(x)$  es la función de Bessel de orden  $m$ .

2. Obtener un resultado aproximado para la distribución angular, en el caso de un movimiento no relativista.
  3. Suponer movimiento ultrarrelativista y obtener el resultado correspondiente a una partícula en movimiento circular instantáneo. [JA,14,8].
- Considerar la radiación sincrotrón proveniente de la nebulosa del Cangrejo. Allí electrones de energías hasta de  $10^{12}$  eV se mueven en un campo magnético del orden de  $10^{-4}$  gauss.
1. Calcular el radio de la órbita  $\rho$ , la frecuencia fundamental  $\omega_0 = c/\rho$  y la frecuencia crítica  $\omega_c$  para electrones de la máxima energía.

2. Mostrar que el espectro de potencia de la radiación sincrotrón correspondiente puede escribirse

$$P(E, \omega) = Cte. \left( \frac{\omega}{E^2} \right)^{1/3} f \left( \frac{\omega}{\omega_c} \right),$$

donde  $f(x)$  es una función de corte (cutoff) que vale la unidad para  $x = 0$  y se anula rápidamente para  $x \gg 1$ , como por ejemplo  $f \approx \exp(-2\omega/\omega_c)$  y

$$\omega_c = \frac{3eB}{mc} \left( \frac{E}{mc^2} \right)^2 \cos \theta,$$

donde  $\theta$  es el ángulo de inclinación de la trayectoria helicoidal.

3. Si los electrones están distribuidos en energía según el espectro

$$N(E)dE \sim E^{-n} dE,$$

mostrar que la radiación sincrotrón tiene el espectro de potencia

$$\langle P(\omega) \rangle d\omega \sim \omega^{-(n-1)/2} d\omega.$$

4. Las observaciones del espectro continuo de radiofrecuencia y óptico de la radiación de la nebulosa muestran que, en el intervalo de frecuencia  $10^8 \text{ Hz} < \omega < < 6 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ , el valor de la constante es  $\alpha = (n-1)/2 \simeq 0,35$ . A frecuencias mayores, el espectro cae rápidamente con  $\alpha \geq 1,5$ . Determinar el valor del índice  $n$  para el espectro de energía del electrón y un corte superior para ese espectro. (Comparar este último resultado con los números de la parte 1.) [JA,14.15]
- Discutir las propiedades de polarización de la radiación sincrotrón. [EY,14,5]  
Obtener, usando la expresión de la masa electromagnética en función de la densidad de energía, la expresión para el radio clásico del electrón en la teoría de Born-Infeld (ver problemas asociados al principio de mínima acción).

### 3.6. DISPERSIÓN

El estudio de los efectos de un obstáculo sobre la propagación de una onda electromagnética es relevante, tanto en el mundo microscópico como en el caso de cuerpos

macroscópicos. En el primer caso se tiene, por ejemplo, la dispersión de ondas planas por electrones libres o ligados. A la segunda categoría pertenece la dispersión de ondas por objetos asimilables a esferas, cilindros y eventualmente a geometrías más complejas. Estos últimos problemas se relacionan con técnicas de detección de objetos por radares, con la meteorología, con la transmisión de ondas a través de atmósferas húmedas, con la reflexión de ondas de radio en la Luna u otro cuerpo celeste, con la recepción de señales del espacio interestelar en radio-astronomía, etc.

### 3.6.1. Por electrones libres

Primero vamos a estudiar el caso de ondas planas que inciden sobre electrones libres. Una partícula cargada, en el régimen no-relativista y bajo la influencia de un campo eléctrico externo débil, efectúa un movimiento oscilatorio con la misma frecuencia que la del campo aplicado. En consecuencia,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{e}{m} \vec{E} = \frac{e}{m} \vec{\epsilon} E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)},$$

donde  $\vec{\epsilon}$  es el vector polarización,  $E_0$  la amplitud y  $\vec{k}$  el vector de onda de la onda incidente. Por otro lado,  $\vec{v}$  es la velocidad de la partícula. Ahora bien, como consecuencia de este movimiento oscilatorio, la partícula emite una onda secundaria de la misma frecuencia que la onda incidente, de modo que la potencia media radiada por unidad de ángulo sólido, de acuerdo a la ecuación de Larmor (3.78), es

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{\kappa}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{c^3} \left( \frac{dv}{dt} \right)^2 \text{sén}^2 \phi, \quad (3.102)$$

donde  $\phi$  es el ángulo entre la dirección de la polarización  $\vec{\epsilon}$  y la dirección de observación  $\vec{r}$ . El cálculo de los valores medios temporales que aparecen en la ecuación (3.102) se puede realizar a partir de las representaciones complejas de un vector real, como aprendimos en relación con el vector de Poynting complejo. Esto nos permite obtener de inmediato, para el caso de la velocidad,

$$\left( \frac{dv}{dt} \right)^2 = \frac{1}{2} \text{Re} \left( \frac{dv}{dt} \frac{dv^*}{dt} \right) = \frac{e^2}{2m^2} |E_0|^2.$$

Luego

$$\frac{d\overline{P}}{d\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 c}{4\pi\kappa} |E_0|^2 \left( \frac{\kappa e^2}{\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \text{sén}^2 \phi.$$

Por otra parte, el flujo de energía incidente, por unidad de tiempo y unidad de área, está medido por el valor promedio del vector de Poynting de la onda incidente

$$\overline{S} = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 c}{4\pi\kappa} |E_0|^2.$$

Recordamos ahora, de la mecánica clásica, que la cantidad medible y que caracteriza a un proceso de dispersión es la *sección eficaz diferencial de dispersión*, definida por

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{energía dispersada por unidad de tiempo y de ángulo sólido}}{\text{flujo de potencia incidente por unidad de área y de ángulo sólido}}$$

Para el caso en discusión resulta entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{\kappa e^2}{\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \text{sén}^2 \phi.$$

Recordando también la definición de radio clásico del electrón, dada en (3.100), tenemos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \text{sén}^2 \phi. \quad (3.103)$$

Esta expresión es conocida con el nombre de *sección eficaz de Thomson*, para ondas incidentes polarizadas, a pesar de que ella no exhibe una dependencia explícita con la polarización. Si el vector polarización está orientado como se muestra en la figura (3.12), el ángulo  $\phi$  verifica obviamente la relación

$$\cos \phi = \cos \psi \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right),$$

donde  $\theta$  es el ángulo de dispersión, es decir, el ángulo entre la dirección de observación  $\vec{r}$  y la dirección de propagación de la onda incidente  $\vec{k}$ ; mientras que  $\psi$  es el ángulo de polarización respecto del eje  $z$  normal a  $\vec{k}$ . La relación angular precedente permite escribir

$$\text{sén}^2 \phi = 1 - (1 - \cos^2 \theta) \cos^2 \psi.$$

Si la polarización no es observada, debemos realizar un promedio sobre el ángulo  $\psi$  para obtener

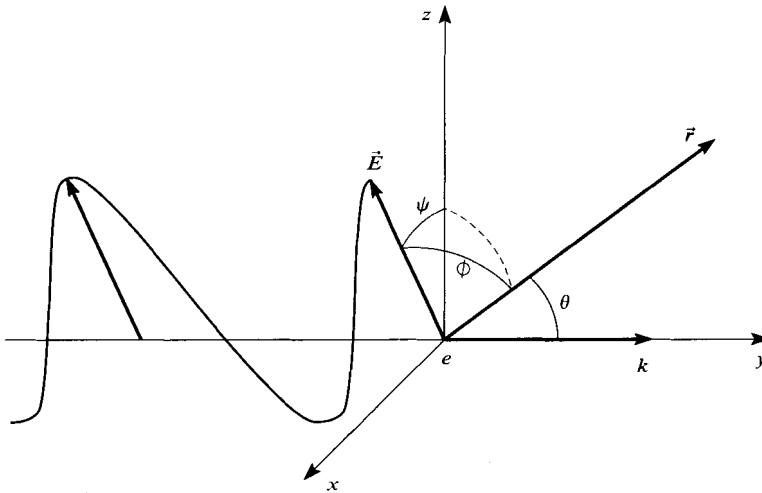
$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{no polarizada}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_e^2 (1 + \cos^2 \theta).$$

Esta sección eficaz diferencial, promediada sobre polarizaciones, toma sus valores máximos en la dirección de la onda incidente (adelante) y en su opuesta (hacia atrás). La sección eficaz total se obtiene, simplemente, integrando sobre el ángulo sólido  $\Omega$ , para obtener

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2,$$

que es independiente de la frecuencia de la onda incidente. Para el caso particular de un electrón, su magnitud es

$$\sigma_{\text{total}} = 0,66 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2,$$

FIGURA 3.12: *Dispersión Thomson.*

Debemos aclarar las aproximaciones usadas en la deducción de la fórmula de Thomson. En primer lugar remarquemos que el tratamiento basado en la mecánica de Newton sólo se justifica para campos de intensidad,  $|E_0|^2$ , pequeña. En caso contrario, la versión relativista de la fórmula de Larmor (3.80) provee las correcciones de orden de  $v/c$ . Como la velocidad  $v$  es proporcional a  $|E_0|^2$ , estas correcciones pueden despreciarse para campos de baja intensidad. En esta misma aproximación, se pueden despreciar los efectos de retroceso de la partícula cargada. Por otra parte, si la frecuencia de la onda incidente es baja, el problema puede considerarse no cuántico y por lo tanto la onda dispersada tiene la misma frecuencia que la onda incidente. A frecuencias más altas, se deben considerar no sólo corrimientos en la frecuencia de la onda dispersada, sino también retrocesos del electrón dispersor. Es necesario entonces establecer cuándo los efectos cuánticos y los relativistas son relevantes. Si lo fuesen, se requiere un análisis de la dispersión de electrones por fotones, en el marco de la electrodinámica cuántica. Este proceso se conoce como dispersión de Compton y su cálculo provee la fórmula de Klein-Nishina. Del estudio para bajas frecuencias de la correspondiente sección eficaz total, se obtiene la corrección a la fórmula de Thomson

$$\sigma_{\text{total}} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \left( 1 - \frac{2\hbar\omega}{mc^2} + \dots \right),$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Esta expresión muestra, con claridad, el significado físico del límite de bajas frecuencias. Es decir, frecuencias tales que

$$\omega < \frac{mc^2}{\hbar}.$$

Notemos además que, a partir de un análisis dimensional, la sección eficaz total puede en general escribirse como

$$\sigma_{\text{total}} = 4\pi r_e^2 f(\omega, m_e, c, \hbar),$$

donde  $f$  es una función adimensional de los parámetros. Es decir, la sección eficaz del proceso está medida por el área de un disco determinado por el radio clásico del electrón, modificada por una función  $f$  que el análisis dimensional no puede determinar. Sin embargo, un análisis de los parámetros relevantes nos permite construir la cantidad adimensional buscada  $\hbar\omega/(mc^2)$ . La fórmula de Klein-Nishina da la forma precisa de la mencionada función  $f$ . Es interesante notar que  $\hbar\omega$  es el cuanto elemental del campo electromagnético transportado por un fotón. La condición de validez de la aproximación de bajas frecuencias nos indica que esa energía debe ser menor que la escala absoluta determinada por la energía en reposo del electrón. Esta condición, de bajas frecuencias, suele expresarse equivalentemente diciendo que la longitud de la onda incidente debe ser mayor que la longitud de onda Compton del electrón, es decir,

$$\lambda > \lambda_c = \frac{\hbar}{mc}.$$

Otro punto interesante de resaltar, aunque no será discutido en detalle, es el comportamiento diferente que presenta la sección eficaz diferencial para bajas y altas frecuencias. En el primer caso encontramos que la sección eficaz diferencial tenía sus valores máximos tanto hacia adelante como hacia atrás. Es decir, era una función simétrica del ángulo de dispersión. Diferentemente, el límite de altas frecuencias es asimétrico, ya que la sección eficaz diferencial tiende a concentrarse hacia adelante.

Finalmente digamos que, desde el punto de vista experimental, hay un acuerdo total entre la fórmula de Thomson teórica y los datos que se obtienen de la dispersión de rayos X blandos por electrones o rayos gama por átomos livianos a las energías compatibles con las condiciones antes mencionadas (ver C. S. Barret, *Physical Review*, núm 32, 22 (1928)). Sin embargo, es preciso advertir que cuando se intenta comparar con datos provenientes de dispersión de sistemas complejos, como gases de electrones o átomos pesados, aparecen discrepancias debido a efectos de coherencia que deben ser tenidos en cuenta en el formalismo.

### 3.6.2. Por electrones ligados

Extendemos el estudio previo al caso de una onda plana incidente sobre un electrón ligado elásticamente a un centro de fuerza, modelando de esa manera simple un átomo. En el análisis incluimos un factor de pérdida pequeño que puede tomar en cuenta el campo de reacción ya discutido. La ecuación de movimiento es ahora

$$\frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\delta\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \delta\vec{r} = \frac{e}{m} \vec{E} = \frac{e}{m} \vec{\epsilon} E_0 e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}}, \quad (3.104)$$

donde  $\delta\vec{r}$  mide el apartamiento respecto de la posición de equilibrio  $\vec{r}$ . Este apartamiento se supone pequeño comparado con la longitud de onda de la radiación incidente. La solución para el régimen estacionario es entonces

$$\begin{aligned} \delta\vec{r} &= \frac{e}{m} \vec{\epsilon} E_0 \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{e}{m} \vec{\epsilon} E_0 \frac{1}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{r} + i\delta}, \end{aligned}$$

donde la fase  $\delta$  está definida por

$$\tan \delta = \frac{\gamma \omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (3.105)$$

Consecuentemente, la aceleración resulta

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{e}{m} \vec{\epsilon} E_0 \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2]^{\frac{1}{2}}} e^{-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r} + i\delta},$$

que se diferencia del caso previo del electrón libre por el factor dependiente de la frecuencia

$$\frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2 \omega^2)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

y por la fase  $\delta$ . La sección eficaz diferencial correspondiente se escribe

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_e^2 \sin^2 \theta \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma^2 \omega^2)^2},$$

donde el primer factor coincide con la sección eficaz diferencial de Thomson (3.103), mientras que el segundo presenta una dependencia explícita con la frecuencia. Debemos notar también que la fase  $\delta$  desapareció al tomar promedio temporal. El análisis se concentra entonces en el comportamiento de la sección eficaz con la frecuencia. Se presentan tres regímenes diferentes, según la relación entre la frecuencia de la onda incidente y la frecuencia propia del oscilador:

Si  $\omega \gg \omega_0$ , la expresión para la sección eficaz diferencial se reduce a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Thomson}} \frac{1}{1 + \gamma^4},$$

que es la fórmula de Thomson modificada por un factor que toma en cuenta la corrección radiativa que provoca el campo de reacción sobre el sistema ligado.

Si  $\omega \simeq \omega_0$  la expresión para la sección eficaz diferencial toma su valor máximo y tiene la forma aproximada

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Thomson}} \frac{1}{4\gamma^4} \frac{\Gamma^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\frac{\Gamma}{2})^2}$$

donde  $\Gamma = \gamma^2 \omega_0$  es ancho medio de la distribución de frecuencia a mitad de intensidad. Esta región de frecuencia es conocida como la región de resonancia. La forma característica de esta distribución, lorentziana, se conoce como fórmula de Breit-Wigner en el ámbito cuántico.

Si  $\omega \ll \omega_0$ , la frecuencia de la onda es menor que la frecuencia propia del sistema; tenemos entonces

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Thomson}} \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^4.$$

Esta es la llamada *ley de dispersión de Rayleigh*. Observemos que esta ley tiene una dependencia con la cuarta potencia de la frecuencia (o cuarta potencia de la inversa de la longitud de onda), a diferencia del extremo opuesto correspondiente a  $\omega \gg \omega_0$ , donde la sección eficaz diferencial es independiente de la frecuencia. La presencia de  $\omega^4$  en la ley de Rayleigh está en la base de la comprensión del color azul del cielo.

El aspecto global de la sección eficaz diferencial en función de la frecuencia se muestra en la Figura (3.13).

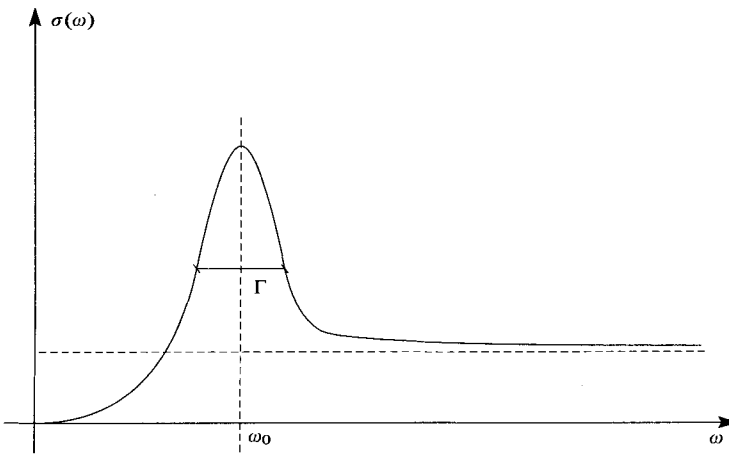


FIGURA 3.13: *Sección eficaz en función de la frecuencia.*

### 3.6.3. Por objetos macroscópicos

Pasemos a estudiar ahora la dispersión de una onda plana por un objeto macroscópico, cuyos bordes se suponen suaves. Para simplificar el tratamiento, consideraremos el problema en dos dimensiones. Éste provee métodos generales sin necesidad de involucrarse con una excesiva complicación matemática y tiene importancia práctica, como veremos más adelante.

Consideramos una onda plana incidente sobre un cilindro como se indica en la Figura (3.14).

El campo electromagnético en dos dimensiones está completamente determinado si se conocen las componentes  $E_z$  o  $H_z$  perpendiculares al plano  $x, y$  indicado en la Figura (3.14). Es decir, podemos restringir nuestro análisis a una de ambas componentes por vez. Llamamos  $\Psi$  a cualesquiera de ellas. Con esta descomposición se ha simplificado notablemente el análisis, ya que fue reducido a la determinación de una función escalar. El tratamiento vectorial general, que es requerido, por ejemplo, en el estudio de la dispersión de ondas por una esfera, es un verdadero quilombo.



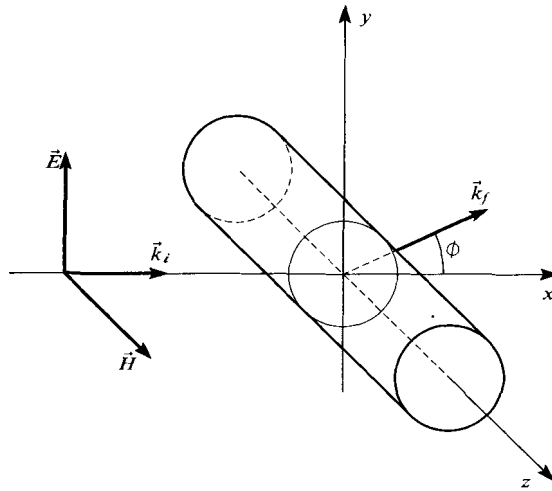


FIGURA 3.14: *Dispersión por un cilindro.*

En las condiciones establecidas, el problema electromagnético se reduce a resolver la ecuación de las ondas en medios homogéneo e isotropos, sin fuentes externas y con las condiciones de contorno pertinentes. Sobre la superficie del cilindro, que separa dos medios de constante dieléctrica y susceptibilidad magnética diferentes, la continuidad de los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  se traduce en

$$E_z \text{ y } \frac{1}{\mu^r} \frac{\partial E_z}{\partial n} \text{ o } H_z \text{ y } \frac{1}{\epsilon^r} \frac{\partial H_z}{\partial n} \text{ continuas,}$$

donde  $\partial/\partial n$  es la derivada normal. Estas condiciones de contorno pueden resumirse en

$$\Psi \text{ y } \eta \frac{\partial \Psi}{\partial n} \text{ continuas}$$

con  $\eta$  identificado como  $1/\mu^r$  o  $1/\epsilon^r$  según corresponda. Para el caso especial de un cilindro conductor perfecto, las condiciones son:

$$\Psi = 0 \text{ y } \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0.$$

Exigimos además que, asintóticamente, la función  $\Psi$  se comporte como

$$\Psi \sim \Psi_0 e^{ikx} + \Psi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\phi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}} = \Psi_{\text{incidente}} + \Psi_{\text{dispersada}}. \tag{3.106}$$

Esta condición de contorno asintótica está compuesta de una onda plana incidente en la dirección del eje  $x$ , sumada a una *onda cilíndrica saliente*

$$\Psi_{\text{dispersada}} = \Psi_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} f(\phi) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{kr}},$$

que toma en cuenta el efecto de la dispersión. Distancias asintóticas significan aquellas que verifican  $r \gg \lambda, a$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda incidente y  $a$  el radio del cilindro. El frente de onda dispersado es una superficie cilíndrica, pero la *amplitud* de la onda  $f(\phi)$  no es constante sobre ella, sino que resulta una función del ángulo  $\phi$ .

Calculamos ahora el flujo promedio de energía de la onda dispersada, a través de una superficie cilíndrica cerrada, mediante el vector de Poynting complejo. En nuestro caso bidimensional resulta

$$\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\kappa'} \operatorname{Re} \int_A \vec{E} \times \vec{H}^* \cdot \vec{n} da = \frac{1}{2} \frac{\kappa'' \mu_0 c^2}{4\pi\kappa' \omega} \operatorname{Im} \int_A \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} da,$$

donde usamos la ecuación de Maxwell explicitada para una onda plana, con la identificación  $\Psi = H_z$ . Una expresión completamente análoga aparece si  $E_z$  toma el lugar de  $H_z$ .

Es conveniente introducir el flujo por unidad de longitud, de modo que será necesario calcular solamente

$$\operatorname{Im} \int_C \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial n} ds,$$

donde la integral se evalúa sobre un círculo.

Para conectar la amplitud de la onda dispersada con la sección eficaz diferencial, nos interesa el flujo de energía por unidad de ángulo y unidad de longitud, de modo que la expresión anterior se reduce a

$$r \operatorname{Im} \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial r}.$$

Luego el flujo dispersado por unidad de ángulo en la dirección  $\phi$  resulta

$$\text{flujo dispersado} = c \frac{\kappa'' \mu_0}{\kappa'} \Psi_0^2 \frac{2}{\pi k} |f(\phi)|^2.$$

Por otra parte, para el haz incidente, se tiene

$$\text{flujo incidente} = c \frac{\kappa'' \mu_0}{\kappa'} \Psi_0^2.$$

De manera que la sección eficaz diferencial está dada por

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{2}{\pi k} |f(\phi)|^2. \quad (3.107)$$

Vemos entonces que la sección eficaz diferencial de dispersión está completamente determinada por la amplitud  $f(\phi)$ , que se denomina *amplitud de dispersión*. Su valor se obtiene resolviendo la ecuación de onda en dos dimensiones con las condiciones de contorno adecuadas. Debemos señalar además que la amplitud de dispersión depende no sólo del ángulo de dispersión  $\phi$ , sino también de la longitud de la onda incidente. Por lo tanto, desde el punto de vista dimensional, esperamos que la sección eficaz tenga la forma

$$\sigma = ag(ka),$$

donde  $g$  es una función sin dimensiones. Así en el problema bidimensional tenemos que la sección eficaz por unidad de longitud es proporcional al radio  $a$  del cilindro, única escala característica presente.

La ecuación de onda para simetría cilíndrica, convenientemente expresada en coordenadas polares, es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + k^2 \Psi = 0.$$

La solución de esta ecuación se encuentra usando el método de separación de variables, es decir, escribiendo la solución como el producto

$$\Psi = R(r) \Phi(\phi).$$

Es fácil probar que las soluciones para  $\Phi(\phi)$  son de la forma

$$\Phi(\phi) = e^{im\phi},$$

donde  $m$  son enteros para garantizar que  $\Phi(\phi)$  sea una función uniforme. En cuanto a la ecuación para  $R(r)$ , se prueba que es satisfecha por la función de Bessel de orden  $m$  y argumento  $kr$  (*Handbook of Mathematical Functions*, Edited by Abramowitz and Stegun, Dover Publications, Inc). De tal forma que, una solución general de la ecuación de onda, se escribe

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [a_m H_m^{(1)}(kr) + b_m H_m^{(2)}(kr)] e^{im\phi},$$

donde  $H_m^{(1)}(kr)$  y  $H_m^{(2)}(kr)$  son las funciones de Hankel. Estas funciones tienen el comportamiento asintótico adecuado. En efecto,

$$H_m^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)} ; |z| \rightarrow \infty$$

$$H_m^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)} ; |z| \rightarrow \infty,$$

que representan, al multiplicarlas por  $e^{-i\omega t}$ , ondas cilíndricas salientes y entrantes, respectivamente. Luego, los coeficientes  $b_m$  deben anularse para satisfacer la condición de onda dispersada. Por lo tanto

$$\Psi = \Psi_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\phi}.$$

Los coeficientes  $a_m$  se determinan mediante las condiciones de contorno que debe satisfacer el campo eléctrico sobre la superficie del cilindro. Para simplificar el cálculo restringimos el análisis a un cilindro conductor perfecto. Luego la condición de contorno se reduce a la anulación del campo eléctrico tangencial a la superficie

$$E_\phi = 0 \quad \text{o} \quad \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0 \quad \text{para} \quad r = a, \quad (3.108)$$

que debe cumplirse cualquiera sea el ángulo  $\phi$  sobre el contorno. Antes de proceder al cálculo de los coeficientes, es conveniente escribir la onda plana incidente en términos de funciones de Bessel  $J_m(kr)$ , como

$$H_{\text{incidente}} = H_0 e^{ikx} = H_0 e^{ikr \cos \phi} = H_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(kr) i^m e^{im\phi}.$$

Por consiguiente, el campo magnético, solución del problema, es

$$\begin{aligned} H_z &= H_{\text{incidente}} + H_{\text{dispersado}} = \\ &= H_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(kr) i^m e^{im\phi} + H_0 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\phi}. \end{aligned}$$

La condición de contorno (3.108) impone que

$$i^m J'_m(ka) + a_m H_m^{(1)'}(ka) = 0,$$

de donde

$$a_m = -i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)}.$$

Las primas en las funciones de Bessel indican derivadas. Por lo tanto, el campo asintótico resulta

$$H_z \rightarrow H_0 e^{ikx} + H_0 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(-\frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)} e^{im\phi} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}}.$$

Expresión de la que podemos extraer la amplitud de dispersión

$$f(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{i(-\frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi)} e^{im\phi} \quad (3.109)$$

y a partir de la cual podemos calcular la sección eficaz diferencial

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{2}{\pi k} \left| \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m e^{-i\frac{1}{2}m\pi} e^{im\phi} \right|^2. \quad (3.110)$$

El análisis de esta sección eficaz diferencial para cualquier régimen de frecuencias es prácticamente inabordable. Por ello estudiaremos sólo el límite de grandes longitudes de onda  $ka \ll 1$ . Para el límite opuesto de altas frecuencias, correspondiente a la región óptica, se necesita considerar un conjunto importante de términos de la serie para la amplitud ya que estas series son lentamente convergentes. En este caso existen métodos analíticos para el estudio de la sección eficaz, los que, por su especificidad, no los expondremos en este resumen (ver *The Theory of Electromagnetism*, D. S. Jones, The MacMillan Company, 1964).

El estudio del primer límite es relativamente simple. Teniendo en cuenta que  $a_{-m} = (-1)^m a_m$ , el problema se reduce a calcular los coeficientes con  $m$  positivo. Utilizando el comportamiento de las respectivas funciones de Bessel, tenemos

$$a_0(ka) \sim \frac{i\pi}{4} (ka)^2$$

$$a_m(ka) \sim \frac{\pi}{4} \frac{(ka)^{2m}}{\Gamma(m)\Gamma(m+1)}.$$

Por lo tanto, las contribuciones más importantes a la amplitud, en este límite, provienen de los dos primeros términos de la serie, con lo cual la sección eficaz diferencial resulta

$$\frac{d\sigma}{d\phi} = \frac{2}{\pi k} \left| \frac{i\pi}{4} (ka)^2 - \frac{i\pi}{4} (ka)^2 2 \cos \phi \right|^2 = \frac{\pi}{8k} (ka)^4 (1 - 2 \cos \phi)^2.$$

La dispersión es predominantemente hacia atrás, con un máximo secundario en la dirección hacia adelante y cero intensidad en  $\phi = \pm 60^\circ$ , como se puede observar en la Figura (3.15).

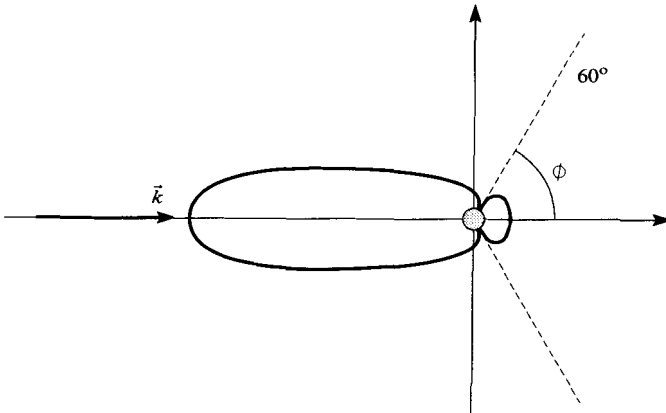


FIGURA 3.15: Sección eficaz diferencial de dispersión por un cilindro conductor.

La sección eficaz total se obtiene integrando la expresión anterior en el ángulo  $\phi$ . Luego surge

$$\sigma = \frac{\pi}{8k} (ka)^4 \int_0^{2\pi} (1 - 2 \cos \phi)^2 d\phi = \frac{3\pi^2}{4} a (ka)^3,$$

que varía como la inversa del cubo de la longitud de onda y es menor que la sección geométrica del cilindro.

Finalmente queremos mencionar un resultado interesante de la teoría de la dispersión, basado en la conservación de la energía, vía el teorema de Poynting. Éste muestra que la sección eficaz total que acabamos de obtener es directamente propor-

cional a la amplitud de dispersión en la dirección hacia adelante. El punto de partida es la ecuación (3.107) que conecta la sección eficaz diferencial con la amplitud de dispersión.

Formalizaremos la prueba en el espacio de dos dimensiones, aunque puede ser extendida al caso de tres dimensiones, sin dificultad. Recordemos que el flujo del vector de Poynting sobre una superficie cerrada da cuenta de la variación de la energía en el recinto bajo consideración. Luego si allí sólo existen pérdidas de energía debido a procesos de absorción, esperamos tener valor medio temporal del flujo entrante, diferente de cero.

Consideremos una onda plana electromagnética que incide sobre una superficie cilíndrica que limita al recinto que contiene un cilindro dispersor de sección arbitraria, con conductividad finita. Definimos el coeficiente de absorción, o sección eficaz de absorción, por unidad de longitud, mediante

$$\sigma_{\text{absorción}} = - \frac{\text{Pérdida de energía por unidad de tiempo y de longitud}}{\text{Energía incidente por unidad de tiempo y de área}}$$

Este coeficiente mide las pérdidas que sufre la onda en el proceso de dispersión.

Tomamos un círculo  $C$ , de radio grande comparado con la longitud característica del elemento dispersor, y a partir de la ecuación (3.106) calculamos la energía absorbida por unidad de longitud y obtenemos, excluyendo factores numéricos que se cancelan al calcular  $\sigma$ ,

$$\frac{1}{2} \text{Im} \int_c \left( \Psi_{\text{inc}} \frac{\partial \Psi_{\text{inc}}^*}{\partial n} + \Psi_{\text{dis}} \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}^*}{\partial n} + \Psi_{\text{inc}} \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}^*}{\partial n} + \Psi_{\text{dis}} \frac{\partial \Psi_{\text{inc}}^*}{\partial n} \right) ds.$$

El primer término corresponde a la energía de la onda incidente que entra y sale de la superficie cilíndrica y por lo tanto no contribuye dado que no hay fuentes de la onda plana en el recinto. El segundo término provee la contribución de la onda dispersada y por lo tanto es proporcional a la sección eficaz calculada  $\sigma$ , que, cuando hay absorción, es conveniente llamar sección eficaz elástica. Resta ahora analizar los dos últimos términos, usando la forma asintótica de los campos

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \text{Im} \int_c \left( \Psi_{\text{inc}} \frac{\partial \Psi_{\text{dis}}^*}{\partial n} + \Psi_{\text{dis}} \frac{\partial \Psi_{\text{inc}}^*}{\partial n} \right) ds \sim \\ & \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \text{Im} \left[ -ik |\Psi_0|^2 \sqrt{r} \int_c (f^*(\phi) e^{ikr \cos \phi} e^{-ikr} + \right. \\ & \left. + \cos \phi f(\phi) e^{ikr} e^{-ikr \cos \phi}) d\phi \right]. \end{aligned}$$

La integral puede evaluarse por el método de la fase estacionaria, ya que al tender  $r \rightarrow \infty$ , la fase en los exponentiales fluctúan muy rápidamente y entonces el integrando está dominado por sus valores en el entorno de los puntos que hacen estacionaria la fase.

Recordemos el resultado de la aproximación de fase estacionaria que, para una integral de la forma

$$\int_a^b f(x) e^{i\alpha g(x)} dx$$

cuando  $\alpha$  tiende a infinito, tiende a

$$\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \sum \left| \frac{d^2 g(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}^{-\frac{1}{2}} f(x_0) e^{i\alpha g(x_0) + i\frac{\pi}{4}},$$

donde se suma sobre todos los valores  $x_0$ , tales que  $g'(x_0) = 0$ .

En nuestro caso,  $g = \cos\phi$  y los mínimos ocurren para  $\phi_0 = 0, 2\pi, \pi$ . Los dos primeros contribuyen la mitad del último, por presentarse en los extremos de integración. Evaluando la integral y dividiendo por la energía incidente, se obtiene

$$\sigma_{\text{elástica}} + \sigma_{\text{absorción}} = -\frac{2}{k} \text{Re}\{f(0)\}. \quad (3.111)$$

Resultado que se conoce con el nombre de *teorema óptico* y que expresa que la sección eficaz total está determinada por la amplitud de dispersión en la dirección de la onda incidente.

Debe notarse que, en el caso de 3 dimensiones espaciales, este teorema incluye la parte imaginaria de la amplitud mencionada, en lugar de la parte real. Esto proviene de una fase diferente entre las funciones de Bessel cilíndricas y esféricas que aparecen en los problemas de dispersión respectivos. El teorema óptico aparece también en la teoría de la dispersión de la Mecánica Cuántica, ligado a la conservación de la probabilidad.

### 3.6.4. Problemas

- Hallar la frecuencia mínima que puede propagarse en el espacio libre, suponiendo la presencia de un electrón por  $\text{cm}^3$ . Encontrar la velocidad de grupo para altas frecuencias. [PP,22,2]
- Determinar la sección eficaz para la dispersión por un cilindro conductor perfecto, de radio  $a$ , en el límite  $ka \ll 1$ , si la onda incidente está polarizada de modo que el campo  $E$  es paralelo al eje del cilindro. [PP,13,5]
- Usando el teorema óptico, obtener la sección eficaz total de dispersión por un cilindro metálico de radio  $a$ , en el límite de bajas frecuencias y comparar con la expresión obtenida en el texto.

## 3.7. INTERACCIÓN DE LA RADIACIÓN CON LA MATERIA

El análisis de la interacción de radiación electromagnética con cuerpos macroscópicos constituye el método básico para estudiar la estructura de la materia. La profundidad que alcanza la radiación en la materia y los grados de libertad microscópicos que son excitados en la interacción, dependen crucialmente de la longitud de onda de la radiación. En el proceso en cuestión, ondas electromagnéticas de una dada frecuencia inciden sobre la muestra y se estudian las características de las ondas difractadas. La distribución angular, la frecuencia y la intensidad de las ondas emergentes proveen información sobre las propiedades microscópicas estructurales de la muestra. Como ejemplo podemos mencionar que el comportamiento de radiación infrarroja frente a

sólidos da información sobre los modos de oscilación molecular. En tanto que ondas de la región visible y ultravioleta sondan la estructura espectral de los electrones de valencia. Si se trata de microondas, se estará analizando energías orientacionales, por ejemplo de moléculas orgánicas, y si se dispone de ondas de radiofrecuencia, podrán estudiarse espines nucleares. La difracción de rayos X por cristales sirve a la determinación de la distribución de densidades electrónicas en la red cristalina del sólido. Para analizar otros grados de libertad, correspondientes a longitudes de onda mucho menores, habrá que recurrir eventualmente a la difracción de electrones o de neutrones, es decir, a ondas materiales.

### 3.7.1. Difracción de los rayos X

A fin de ejemplificar el tratamiento del problema general de la difracción de ondas electromagnéticas por la materia y debido a su importancia evidente en la llamada determinación de estructuras cristalinas, analizaremos en detalle el caso de los rayos X. Si bien este tratamiento puede ser desarrollado en total analogía con la difracción de Fraunhofer, presentaremos aquí el método general.

Consideramos la difracción de una onda electromagnética de frecuencia  $\omega$ , definida, por ejemplo, por el vector desplazamiento

$$\vec{D}_e(\vec{r}) = \vec{D}_0 e^{i(\vec{k}_0 \cdot \vec{r} - \omega t)} \quad (3.112)$$

con  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ , por una muestra material de dimensión finita. El índice  $e$  indica que se trata de un campo externo a la muestra. Nos interesa entonces determinar la amplitud de la onda dispersada elásticamente y definida por un vector de onda  $\vec{k}_0$  de módulo  $k_0$ .

Las ecuaciones de Maxwell en el caso bajo consideración, deberán tomar en cuenta los efectos de la materia. Consecuentemente las fuentes incluirán las densidades de corriente y de carga de polarización que están dadas por

$$\rho_p = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (3.113)$$

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \frac{1}{\kappa''} \vec{\nabla} \wedge \vec{M}. \quad (3.114)$$

Los vectores polarización  $\vec{P}$  y magnetización  $\vec{M}$ , que allí aparecen, verifican las relaciones generales

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi \kappa \vec{P} \quad (3.115)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \left( \vec{H} + \frac{4\pi \kappa'}{\kappa''} \vec{M} \right). \quad (3.116)$$

En el caso de interés para el estudio de la difracción de rayos X, el medio se comporta isotrópicamente y por lo tanto vale escribir relaciones constitutivas



$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon^r \vec{E} \quad (3.117)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu^r \vec{H} \quad (3.118)$$

con  $\epsilon^r$  y  $\mu^r$  cantidades escalares.

Para avanzar en la discusión vamos a introducir un modelo simple para la determinación de la constante dieléctrica  $\epsilon^r$ . Supondremos inicialmente que la energía de los rayos X incidentes es suficientemente mayor a la energía de ligadura de los electrones a los átomos, de modo que estos electrones, que son los responsables de la difracción, pueden ser considerados libres. Debemos mencionar aquí que la difracción producida por los núcleos atómicos es despreciable debido a su gran masa. Si la energía de unión atómica no es despreciable, los fenómenos de absorción y de dispersión anómala deben ser incluidos. En ese caso la constante  $\epsilon^r$  se torna compleja. Estos efectos podrán ser considerados a posteriori como correcciones al tratamiento simplificado.

Para establecer el modelo buscado comenzamos considerando un campo eléctrico de la forma

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.119)$$

que actuando sobre un electrón le produce la aceleración

$$\frac{d^2 \delta \vec{r}}{dt^2} = \frac{e}{m} \vec{E}, \quad (3.120)$$

de modo que la partícula sufre un desplazamiento

$$\delta \vec{r} = -\frac{e}{m\omega^2} \vec{E}. \quad (3.121)$$

Por lo tanto, la polarización resultante es

$$\vec{P} = e n(\vec{r}) \delta \vec{r} = -\frac{e^2}{m\omega^2} n(\vec{r}) \vec{E}. \quad (3.122)$$

En esta expresión,  $n(\vec{r})$ , número de electrones por unidad de volumen, representa la densidad electrónica de equilibrio en ausencia de campo externo.

Utilizando ahora esta última expresión (3.122) en la definición de  $\vec{J}_p$  dada en (3.114), resulta

$$\vec{J}_p = i \frac{e^2}{m\omega} n(\vec{r}) \vec{E}, \quad (3.123)$$

donde hemos despreciado la contribución magnética, ya que la magnetización inducida por la radiación es en general muy pequeña.

La hipótesis monocromática, que hemos usado sistemáticamente, permite escribir

$$\vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (3.124)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t}, \quad (3.125)$$

de manera que las ecuaciones de Maxwell, para el caso de interés y teniendo en cuenta (3.123), resultan

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -i \frac{\kappa'}{\kappa} \epsilon_0 \mu_0 \omega \vec{E} + i 4 \pi \kappa' \mu_0 \frac{e^2}{m \omega} n(\vec{r}) \vec{E} \quad (3.126)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = i \kappa'' \omega \vec{B} \quad (3.127)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (3.128)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.129)$$

Claramente no consideramos fuentes (cargas o corrientes) externas. La relación constitutiva (3.117) conduce a partir de las expresiones (3.115) y (3.122) a

$$\vec{D} = \left[ \epsilon_0 - 4 \pi \kappa \frac{e^2}{m \omega^2} n(\vec{r}) \right] \vec{E}$$

y por lo tanto

$$\epsilon^r(\vec{r}) = 1 - \frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2 \lambda^2}{\pi m c^2} n(\vec{r}), \quad (3.130)$$

donde usamos explícitamente la relación entre frecuencia y longitud de onda. En resumen, hemos escrito las ecuaciones que describen la dispersión de radiación X por la materia. Los efectos del medio son tomados en cuenta a través de la función escalar  $\epsilon^r(\vec{r})$  que depende linealmente de la densidad electrónica  $n(\vec{r})$ . El punto importante a destacar es que en determinadas circunstancias es posible resolver el llamado problema inverso: los datos experimentales de difracción de rayos X proveen información sobre la función densidad electrónica y a partir de allí se puede desentrañar la estructura molecular de la muestra en cuestión.

### *La constante dieléctrica*

Es de interés estimar el valor numérico de la constante dieléctrica  $\epsilon^r$  correspondiente a situaciones usuales.

Previamente introducimos la función  $\chi = \epsilon^r - 1$ , es decir,  $4 \pi \kappa$  veces la susceptibilidad eléctrica. Es claro, que partir del resultado (3.130)

$$\chi(\vec{r}) = -\frac{\kappa}{\epsilon_0} \frac{e^2 \lambda^2}{\pi m c^2} n(\vec{r}) = -\frac{\lambda^2}{\pi} r_e n(\vec{r}) = -\Gamma n(\vec{r}). \quad (3.131)$$

Aquí nuevamente  $r_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$  cm es el radio clásico del electrón. Por lo tanto, para valores típicos como  $\lambda = 10^{-8}$  cm y  $\rho = 10^{24}$  cm<sup>-3</sup> resulta  $\chi \approx 10^{-5}$ . Consecuentemente el índice de refracción  $n = (\epsilon^r)^{1/2} \approx 1 + \chi/2$  es casi igual, pero menor, a la unidad. Este hecho explica la imposibilidad de construir lentes para rayos X utilizables en experimentos de refracción. En otras palabras, la reconstrucción de imágenes por rayos X debe realizarse por medios matemáticos.

### Solución de las ecuaciones

Debido a la ecuación (3.128), las ondas del vector  $\vec{D}$  son transversales, de modo que usando (3.126) y (3.127) y la relación válida para  $\chi$  pequeño

$$\vec{E} = \frac{(1 - \chi)}{\epsilon_0} \vec{D}$$

surge la ecuación

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{D} - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\chi(\vec{r}) \vec{D}] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{D}.$$

Recordando ahora el Apéndice poético y la condición de ondas transversales, resulta la ecuación que verifica el campo de desplazamiento

$$(\nabla^2 + k^2) \vec{D} = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\chi(\vec{r}) \vec{D}]. \quad (3.132)$$

Esta ecuación de onda estacionaria (tipo Helmholtz) tiene su origen en la hipótesis estacionaria, de modo que es inmediato escribir para el caso general la ecuación de ondas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \vec{D}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\chi(\vec{r}) \vec{D}(\vec{r}, t)] \quad (3.133)$$

que admite la solución general

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_e(\vec{r}) + \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\chi(\vec{r}') \vec{D}(\vec{r}')] d^3r', \quad (3.134)$$

donde  $\vec{D}_e(\vec{r})$ , la onda incidente (3.112), es la solución de la ecuación homogénea, correspondiente a  $\chi = 0$ . Hemos omitido el factor  $\exp(-i\omega t)$  que debe ser incluido a fin de expresar la solución espacio-temporal  $\vec{D}(\vec{r}, t)$ .

La ecuación (3.134) provee un esquema para aproximaciones sucesivas a la solución. En efecto, la primera aproximación se obtiene reemplazando a  $\vec{D}(\vec{r}')$  en el integrando, por el valor externo  $\vec{D}_e(\vec{r}')$ . La solución mejorada así obtenida puede ser usada a su vez en el integrando a fin de obtener una segunda aproximación. Este proceso puede ser iterado indefinidamente y da lugar al equivalente electromagnético de la serie de Born de la Mecánica Cuántica que es llamada serie de Gans. La primera aproximación resulta en general suficiente para describir la difracción coherente de rayos X por cristales.

Un cristal, medio material que interesará analizar por medio de la difracción de rayos X, puede definirse dando una función  $\chi(\vec{r})$  periódica en tres dimensiones. Es decir, si  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  son las longitudes características de repetición en las tres direcciones ortogonales, entonces para un cristal

$$\chi(\vec{r}) = \chi(\vec{r} + n_1 \vec{a}_1 + n_2 \vec{a}_2 + n_3 \vec{a}_3) \quad (3.135)$$

con  $(n_1, n_2, n_3)$  enteros arbitrarios, pero finitos ya que la muestra es de dimensión finita. Consecuentemente, la solución de la ecuación (3.134) deberá satisfacer las adecuadas condiciones de contorno.

A fin de concretar la solución buscada, se puede proceder de dos maneras, obviamente con el mismo resultado. Se puede resolver la ecuación (3.134) independientemente de la condición (3.135) e imponer a la solución obtenida las condiciones de periodicidad o se puede comenzar con soluciones tentativas que ya contengan las condiciones de periodicidad en su estructura. Este camino es el usual en el ámbito de la física de la materia condensada y se basa en el teorema de Bloch que establece que una onda plana que se propaga en un medio periódico resulta modulada por una amplitud que presenta la misma periodicidad que el medio.

Aquí presentamos la obtención de la primera aproximación de Born-Gans sin imponer a priori la condición de periodicidad y propondremos como problema el camino alternativo a la Bloch.

Comenzamos sustituyendo la onda plana externa

$$\vec{D}_e(\vec{r}) = \vec{D}_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

por el vector  $\vec{D}$  en el integrando de (3.134). Definimos, como es usual en cristalografía, al vector  $\vec{K}_0$  en la dirección de la onda incidente y  $\vec{K}$  en la dirección de la onda de salida con

$$|\vec{K}_0| = |\vec{K}| = \frac{1}{\lambda},$$

de modo que  $\vec{k}_0 = 2\pi \vec{K}_0$ . La relación anterior indica claramente que se trata de un proceso de dispersión elástica. El arreglo experimental definido por la ubicación de la fuente y el detector y el tamaño de la muestra implica que el interés se centra en el límite asintótico de  $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ , indicando que la distancia de observación es mucho mayor que el tamaño de la muestra. En ese caso

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx |\vec{r}| ; |\vec{K}| |\vec{r} - \vec{r}'| \approx Kr - \vec{K} \cdot \vec{r}',$$

ya que el vector  $\vec{K}$  se hace paralelo a  $\vec{r}$ . Consecuentemente

$$\vec{D}(\vec{r}) = \vec{D}_e(\vec{r}) + \frac{e^{2\pi i Kr}}{4\pi r} \int e^{-2\pi i \vec{K} \cdot \vec{r}'} \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge [\chi(\vec{r}') \vec{D}_0(\vec{r}')] e^{2\pi i \vec{K}_0 \cdot \vec{r}'} d^3 r'. \quad (3.136)$$

En lo que sigue omitimos el término  $\vec{D}_e(\vec{r})$ , ya que se trata de la onda plana incidente que, excepto en el caso particular en que  $k_0 = \vec{k}$ , puede siempre ser filtrada con un colimador apropiado. Introducimos ahora la representación de Fourier

$$\chi(\vec{r}) = \int \tilde{\chi}(\vec{s}) e^{2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}} d^3 s, \quad (3.137)$$

donde

$$\tilde{\chi}(\vec{s}) = \frac{1}{V} \int \chi(\vec{r}) e^{-2\pi i \vec{s} \cdot \vec{r}} d^3 r = -\frac{\beta}{V} F(\vec{s}) \quad (3.138)$$

y

$$\beta = \frac{1}{\pi} \lambda^2 r_e.$$

Volviendo a (3.136) e integrando dos veces por partes, se obtiene

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{\pi e^{2\pi i K r}}{V r} \vec{K} \wedge \vec{K} \wedge \vec{D}_0 \int F(\vec{s}) \int e^{-2\pi i (\vec{K} - \vec{K}_0 - \vec{s}) \cdot \vec{r}'} d^3 r' d^3 s.$$

La segunda integral es nula excepto para

$$\vec{s} = \vec{K} - \vec{K}_0,$$

en cuyo caso resulta igual al volumen de la muestra, es decir,

$$\vec{D}(\vec{r}) = V \beta \pi \frac{e^{2\pi i K r}}{r} \vec{K} \wedge \vec{K} \wedge \vec{D}_0 F(\vec{K} - \vec{K}_0). \quad (3.139)$$

Analizamos ahora los efectos de la polarización eventual del haz incidente. Para un haz con polarización perpendicular al plano  $(\vec{k}_0, \vec{k})$ , definida por

$$\vec{D}_0 = D_0 \vec{\sigma},$$

se tiene

$$\vec{K} \wedge \vec{K} \wedge \vec{D}_0 = -K_0^2 \vec{\sigma}.$$

Mientras que para un haz incidente con polarización paralela al plano mencionado

$$\vec{D}_0 = D_0 \vec{\pi},$$

donde

$$\vec{\pi} = \frac{\vec{K}}{K} \wedge \vec{\sigma},$$

resulta

$$\vec{K} \wedge \vec{K} \wedge \vec{D}_0 = -K_0^2 \cos 2\theta \vec{\pi},$$

siendo  $2\theta$  el ángulo de dispersión.

Si el haz incidente no está polarizado, la intensidad de rayos X difractada será el valor promedio de las dos polarizaciones perpendiculares mencionadas arriba. Es decir,

$$I = \frac{\vec{D} \cdot \vec{D}^*}{D_0^2} = \frac{r_e^2}{r^2} |F(\vec{K} - \vec{K}_0)|^2 \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2}. \quad (3.140)$$

Notemos que si no se impusieran restricciones a la función densidad  $\rho(\vec{r})$ , esta última expresión muestra que habría intensidad difractada para cualquier valor y dirección del vector  $\vec{s} = \vec{K} - \vec{K}_0$ . La situación que nos interesa, en presencia de un medio cristalino, implica que la densidad es una función periódica de  $\vec{r}$ . Mostraremos entonces que en ese caso  $F(\vec{s})$  es diferente de cero sólo para valores discretos del vector  $\vec{s}$ .

*La periodicidad del cristal*

La función  $\chi(\vec{r})$  que satisface la condición de periodicidad (3.135) puede ser desarrollada en serie de Fourier

$$\chi(\vec{r}) = -\Gamma n(\vec{r}) = -\frac{\Gamma}{U} \sum_{\alpha} F_{\alpha} e^{-2\pi i(m x + p y + q z)}, \quad (3.141)$$

donde los coeficientes  $F_{\alpha}$  están dados por

$$F_{\alpha} = \int_U n(\vec{r}) e^{2\pi i(m x + p y + q z)} d^3 r, \quad (3.142)$$

siendo  $U$  el volumen de la celda unidad del cristal (estructura básica que se reitera periódicamente en el material) y  $\vec{r} = x \vec{a}_1 + y \vec{a}_2 + z \vec{a}_3$ . El índice  $\alpha$  indica el conjunto de números enteros arbitrarios  $(m, p, q)$ . En el exponente podemos escribir

$$m x + p y + q z = \vec{s} \cdot \vec{r} \quad (3.143)$$

con

$$\vec{s} = m \vec{b}_1 + p \vec{b}_2 + q \vec{b}_3 \quad (3.144)$$

si los vectores  $\vec{b}_i$ ;  $i = 1, 2, 3$  están definidos de modo que se satisfaga

$$\vec{a}_i \cdot \vec{b}_j = \delta_{ij}. \quad (3.145)$$

Esta condición implica la validez de las llamadas *ecuaciones de Laue*

$$\vec{s} \cdot \vec{a}_1 = m \quad ; \quad \vec{s} \cdot \vec{a}_2 = p \quad ; \quad \vec{s} \cdot \vec{a}_3 = q. \quad (3.146)$$

El vector  $\vec{s}$ , además de verificar las ecuaciones de Laue debidas a la periodicidad de la muestra, todavía debe satisfacer la relación

$$\vec{s} = \vec{K} - \vec{K}_0 = \frac{1}{\lambda} (\vec{K} - \vec{K}_0),$$

donde  $\vec{K}$  y  $\vec{K}_0$  son versores en la dirección de la radiación incidente y difractada, respectivamente. A partir de las expresiones (3.143) y (3.144), se puede entender que  $\vec{s}$  es un vector de la *red recíproca* definida por la base  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$  que es recíproca a la base  $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$  en el sentido de la condición (3.145).

La expresión para la intensidad de radiación difractada (3.140) toma entonces la forma

$$I = \frac{r_e^2}{r^2} N |F_{\alpha}(m, p, q)|^2 \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2}, \quad (3.147)$$

donde  $N = V/U$  es el número de celdas unidad de la muestra y el *factor de estructura*  $F_{\alpha}(m, p, q)$  se calcula a partir de la integral (3.142) que se extiende al volumen de una celda unidad.

En la celda unidad residen  $N$  átomos ubicados en posiciones  $\vec{r}_j$ . Cada uno de ellos define el correspondiente *factor de forma*  $f_j$ , de modo que el factor de estructura toma la forma

$$F_{\alpha}(m, p, q) = \sum_{j=1}^N f_j e^{2\pi i(\vec{\alpha} \cdot \vec{r}_j)}, \quad (3.148)$$

donde se introdujo el vector recíproco

$$\vec{\alpha} = m \vec{b}_1 + p \vec{b}_2 + q \vec{b}_3.$$

Finalmente hacemos un comentario sobre el rango de validez de la primera aproximación de Born-Gans. Matemáticamente, esta aproximación implica que la radiación (el fotón) es dispersado una sola vez, de modo que la onda difractada no sufre interacciones adicionales ni con la onda incidente ni con otras ondas difractadas. La sección eficaz para la dispersión clásica de rayos X por electrones –fórmula de Thomson– es del orden de  $10^{-8} \text{ \AA}^2$ , mientras que la distancia entre electrones es del orden del espaciado atómico, es decir,  $1 \text{ \AA}$ . Por lo tanto se necesitan alrededor de  $10^3 - 10^4$  planos cristalográficos para que se produzca dispersión múltiple. Consecuentemente, la aproximación será válida para cristales de dimensiones lineales del orden de  $10^4 \text{ \AA}$ . En la práctica, se encuentra que la validez se extiende a cristales de mayor dimensión. Esto se debe a que un cristal macroscópico real presenta imperfecciones (defectos) que limitan la periodicidad a rangos tales que hacen válida la aproximación.

### 3.7.2. Problemas

- Resolver la ecuación general (3.134) proponiendo una solución que satisfaga el teorema de Bloch.

## 3.8. PASAJE DE PARTÍCULAS RÁPIDAS A TRAVÉS DE LA MATERIA

Cuando una partícula cargada se mueve a gran velocidad y penetra en la materia, produce, por simple choque, la ionización de los átomos del medio. En el proceso, ciertamente pierde parte de su energía. En el caso de medios gaseosos, debido a la débil interacción entre los átomos, puede considerarse que la colisión ocurre entre la partícula y átomos individuales. En medios sólidos, por el contrario, en el choque participan simultáneamente varios átomos, y desde un punto de vista macroscópico, este proceso de pérdida de energía puede atribuirse a la polarización del medio dieléctrico producido por el pasaje de una partícula cargada.

### 3.8.1. Caso no relativista

Vamos a analizar primero la situación en que la partícula incidente se mueve a velocidades no relativistas ( $v \ll c$ ). Si bien en estas condiciones los efectos sobre la polarización del medio son muy pequeños, la discusión tiene interés porque sirve de base para el caso relativista. Comenzaremos por establecer las condiciones bajo las cuales el fenómeno puede ser considerado macroscópicamente. Si se analiza en

frecuencia el campo producido por una partícula que se mueve con velocidad  $v$  a una distancia  $r$  de la trayectoria (ver Sección 2.3), resulta que sólo contribuyen frecuencias angulares hasta el valor  $v/r$ . Por otra parte, para que esta radiación pueda ionizar un átomo con alta probabilidad, su frecuencia debe superar la frecuencia promedio  $\omega_0$  de los electrones del átomo. De esta manera la radiación podrá proveer la energía necesaria para arrancar un electrón del átomo. De acuerdo al principio de incerteza cuántico, el tiempo medio requerido para intercambiar esta energía, esto es el tiempo de interacción de la partícula con cada átomo, es de orden de  $1/\omega_0$ . Luego para poder interactuar simultáneamente con muchos de ellos,  $v/\omega_0$  deberá ser mucho mayor que la distancia media entre átomos. En el caso de materia condensada, esta última es del orden del diámetro  $a$  de los mismos átomos y entonces la condición se reduce a  $v \gg a\omega_0$ : la velocidad de la partícula debe superar ampliamente la velocidad media de los electrones en el átomo.

A partir de estas consideraciones sobre la física del proceso que deseamos estudiar, comenzaremos por evaluar el campo producido por la partícula cargada que ingresa en la materia. En la aproximación no relativista ( $v/c \sim 0$ ) éste se reduce a un campo eléctrico que podemos en principio calcular a partir del potencial escalar. Sin embargo encontraremos una dificultad, ya que debemos tener en cuenta que la constante dieléctrica depende de la frecuencia del campo excitante y entonces el potencial no satisface estrictamente una ecuación de Poisson. Podemos, a pesar de esto, resolver el problema fácilmente si retomamos las ecuaciones para el campo eléctrico en la aproximación no relativista:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (3.149)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi\kappa\rho \quad (3.150)$$

y recordamos que en un dieléctrico homogéneo y para campos monocromáticos, la ecuación constitutiva entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  guarda la forma simple:

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon^r \vec{E}(\vec{r}, \omega) \quad (3.151)$$

con  $\epsilon^r = \epsilon^r(\omega)$ . Si tenemos en cuenta, por otra parte, que la densidad de carga que representa la carga puntual que se desplaza con velocidad  $\vec{v}$  es

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta^3(\vec{r} - \vec{v}t), \quad (3.152)$$

usando la transformada de Fourier en  $\vec{r}$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \vec{D}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3k \quad (3.153)$$

resulta

$$\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, t) = -4\pi\kappa \frac{iq}{(2\pi)^{3/2}} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{v}t} \quad (3.154)$$

y transformando Fourier, ahora en la variable  $t$ ,

$$\vec{k} \cdot \vec{D}(\vec{k}, \omega) = -2i\kappa q \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}). \quad (3.155)$$



Puesto que, debido a la ecuación (3.149),  $\vec{E}$  es paralelo a  $\vec{k}$ , haciendo uso de la ecuación constitutiva, surge

$$\vec{E}(\vec{k}, \omega) = -2i\kappa q \frac{\vec{k}}{k^2 \epsilon_0 \epsilon^r(\omega)} \delta(\omega - \vec{k} \cdot \vec{v}), \quad (3.156)$$

de manera que el campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  producido por la partícula en el medio es

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{i\kappa q}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}}{k^2 \epsilon_0 \epsilon^r(\vec{k} \cdot \vec{v})} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{v}t)} d^3k. \quad (3.157)$$

Para evaluar la pérdida de energía de la partícula en su pasaje por el medio, calculamos primero la fuerza que ésta siente como consecuencia del campo que ella misma induce. Para ello debemos obtener la fuerza en la posición ocupada por la partícula, esto es en  $\vec{r} = \vec{v}t$  y luego el trabajo que la fuerza realiza. Para calcular la fuerza producida por el campo *inducido* es necesario sustraer, en la ecuación (3.157), el campo generado por la partícula en ausencia del medio. Esto es, el valor del mismo en el caso en que  $\epsilon^r = 1$ . Es evidente que la autofuerza, la fuerza que sufre la partícula por la acción del campo que ella misma genera en el vacío con comportamiento  $1/r^2$ , es infinita. Esto es consecuencia de haber modelado una partícula cargada como una carga finita concentrada en un punto y el infinito mencionado en realidad, como hemos discutido precedentemente, puede absorberse en el valor de la masa. La fuerza en cuestión entonces es

$$\vec{F} = -\frac{i\kappa q^2}{2\pi^2} \int \frac{\vec{k}}{k^2} \left( \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon^r(\vec{k} \cdot \vec{v})} - 1 \right) d^3k. \quad (3.158)$$

Si elegimos el eje  $x$  en la dirección de  $\vec{v}$  tenemos que  $\vec{k} \cdot \vec{v} = k_x v = \omega$  y llamando  $k_\perp = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$  podemos reemplazar  $dk_y dk_z$  por  $2\pi k_\perp dk_\perp$  para escribir finalmente para la intensidad de la fuerza

$$F = \frac{i\kappa q^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int dk_\perp \frac{\omega k_\perp}{(k_\perp^2 v^2 + \omega^2)} \left( \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon^r(\omega)} - 1 \right). \quad (3.159)$$

En este punto debemos hacer algunas aclaraciones. Primero remarcar que a pesar de que  $\epsilon^r \rightarrow 1$  cuando  $\omega \rightarrow \infty$ , la integral es convergente gracias a la sustracción de la autofuerza. En segundo lugar observamos que  $\epsilon^r$ , como vimos en la sección 1.5, puede considerarse como una función compleja de  $\omega$  con  $Re\{\epsilon^r\}$  par en  $\omega$  e  $Im\{\epsilon^r\}$  impar. Finalmente que, por razones que discutiremos inmediatamente, se puede poner un límite superior  $k_{\perp 0}$  a la contribución de la integral en  $k_\perp$ . Como resultado de estas consideraciones tenemos que

$$F(k_{\perp 0}) = \frac{2\kappa q^2}{\pi \epsilon_0} \int_0^\infty d\omega \int_0^{k_{\perp 0}} dk_\perp \frac{\omega k_\perp}{(k_\perp^2 v^2 + \omega^2)} \frac{Im\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2} \quad (3.160)$$

e integrando en  $k_\perp$

$$F(k_{\perp 0}) = \frac{2\kappa q^2}{\pi \epsilon_0 v^2} \int_0^\infty d\omega \omega \frac{Im\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2} \log \frac{k_{\perp 0} v}{\omega}. \quad (3.161)$$

La cantidad  $F(k_{\perp 0})$  mide el trabajo por unidad de longitud, realizado por la partícula en el medio durante su recorrido y se la conoce con el nombre de *potencia de frenado* de la sustancia.

Cuando el campo electromagnético generado por la partícula de vector de onda  $\vec{k}$  interactúa con un átomo produciendo su ionización, de acuerdo a la Mecánica Cuántica transfiere un impulso  $\hbar \vec{k}$  a alguno de sus electrones. Si en este proceso  $k_{\perp} \gg \omega_0/v$  entonces  $k^2 = k_{\perp}^2 + \omega^2/v^2 \approx k_{\perp}^2$ , el impulso transferido es  $\sim \hbar \vec{k}_{\perp}$  y el parámetro de impacto (distancia mínima entre la partícula y el átomo)  $\sim 1/k_{\perp}$ . Sólo si el diámetro del átomo  $a \ll 1/p$  la interacción entre la partícula y el átomo, vía el campo electromagnético, puede tratarse clásicamente, ya que las fluctuaciones cuánticas no son percibidas. Esta condición define el concepto del corte  $k_{\perp 0}$  y nos limitaremos a situaciones en las cuales  $\omega_0 \ll k_{\perp 0} \ll 1/a$ .

Es posible dar a la potencia de frenado una forma más interesante para la discusión física. Para ello notemos primero, retomando la expresión (3.159), que

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\text{Im}\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2} = -\frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{\epsilon^r(\omega)}. \quad (3.162)$$

Tomando para  $\epsilon^r(\omega)$  su comportamiento para muy altas frecuencias indicado en (1.169)

$$\epsilon^r(\omega) \approx 1 - \frac{4\pi q^2 N}{m\omega^2} \quad (3.163)$$

podemos extender la integral en el plano complejo  $\omega$  e ir a una sobre un semicírculo (superior) infinito de la manera siguiente

$$\int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\text{Im}\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2} = -\frac{i}{2} \int d\omega \frac{\omega}{\epsilon^r(\omega)} - \frac{2\pi^2 e^2 N}{m}. \quad (3.164)$$

En la integral compleja el integrando no tiene polos en el semiplano superior. En efecto, como fue discutido en la sección 1.5 y como consecuencia de la causalidad del medio,  $\epsilon^r(\omega)$  sólo puede tener ceros debajo del eje real. Como resultado, sólo queda la contribución del último término del miembro derecho.

Finalmente, definiendo un promedio del logaritmo de la frecuencia, para el movimiento de los electrones del átomo, tal como será vista por el campo electromagnético, mediante

$$\log(\bar{\omega}) = \frac{\int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\text{Im}\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2} \log(\omega)}{\int_0^{\infty} d\omega \omega \frac{\text{Im}\{\epsilon^r(\omega)\}}{|\epsilon^r(\omega)|^2}} \quad (3.165)$$

podemos escribir la potencia de frenado (3.161) en una forma simplificada

$$F(k_{\perp 0}) = \frac{4\pi \kappa q^4 N}{\epsilon_0 m v^2} \log\left(\frac{k_{\perp 0} v}{\bar{\omega}}\right). \quad (3.166)$$

La expresión integral de la pérdida por ionización (3.160) puede hacer pensar que la contribución principal proviene de los valores de  $\omega$  para los cuales la parte absorptiva es grande. Sin embargo la contribución más relevante surge de los ceros de  $\epsilon^r(\omega)$  que están justo por debajo del eje real.

### 3.8.2. Caso relativista

Vamos a discutir a continuación los efectos de la polarización del medio sobre una partícula ultrarrelativista. En este caso, la transferencia de energía desde la partícula al medio puede ser muy grande, y por otra parte, si la velocidad inicial de la partícula supera a la de la luz en el medio, esta energía es radiada de una manera particular dando origen a un fenómeno conocido como *efecto Cherenkov*.

El tratamiento del problema para partículas muy rápidas sigue un lineamiento completamente análogo al caso no relativista, pero requiere considerar las ecuaciones de Maxwell completas

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\kappa'' \mu_0 \mu^r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (3.167)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\kappa'}{\kappa} \epsilon_0 \epsilon^r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + 4\pi \kappa' \vec{j} \quad (3.168)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi \kappa \rho \quad (3.169)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.170)$$

Claramente la ecuación constitutiva entre  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$ , siempre para un dieléctrico homogéneo y para campos monocromáticos, es la misma del caso no-relativista

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon^r \vec{E}(\vec{r}, \omega). \quad (3.171)$$

Debemos tener en cuenta ahora no sólo la densidad de carga de la partícula,  $\rho(\vec{r}, t) = e\delta^3(\vec{r} - \vec{v}t)$ , sino también la densidad de corriente que ésta genera

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = q\vec{v}\delta^3(\vec{r} - \vec{v}t). \quad (3.172)$$

Transformado Fourier en  $\vec{r}$  y  $t$  las ecuaciones de Maxwell, la ecuación constitutiva y las fuentes es fácil obtener el campo eléctrico inducido y consecuentemente la fuerza que frena la partícula en su trayectoria. La magnitud de esta última resulta

$$F = \frac{i\kappa q^2}{\epsilon_0 \pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{k_{\perp 0}} dk_{\perp} \frac{(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon^r}{c^2})\omega k_{\perp}}{\epsilon^r [k_{\perp}^2 + \omega^2(\frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon^r}{c^2})]}. \quad (3.173)$$

Como en el caso de bajas velocidades, esta expresión puede simplificarse integrando en el plano complejo  $\omega$ . Para ello es necesario estudiar la posición de los polos del integrando, o sea, las raíces de

$$k_{\perp}^2 + \omega^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon^r}{c^2} \right) = 0. \quad (3.174)$$

Sin entrar en detalles sobre el análisis realizado originalmente por Landau, mencionaremos que es posible demostrar la existencia de una sola raíz, digamos  $\omega(k_{\perp})$ , que yace sobre el eje imaginario. Evaluando la contribución del polo correspondiente resulta

$$F = \frac{\kappa}{\epsilon_0} q^2 \int_0^{k_{\perp 0}} dk_{\perp} \left[ \frac{\omega(k_{\perp})(\frac{1}{\epsilon^r v^2} - \frac{1}{c^2})}{k_{\perp} dk_{\perp}/d\omega} + 1 \right], \quad (3.175)$$

que podemos escribir como una integral en  $\omega$ , usando (3.174)

$$F = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \left\{ \frac{q^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{\omega(k_{\perp 0})} \left[ \frac{1}{\epsilon^r(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} q^2 k_{\perp 0}^2 + \frac{1}{2} q^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(k_{\perp 0}) - \omega^2(0)] \right\}.$$

Si tenemos en cuenta ahora que el corte  $k_{\perp 0}$  es muy grande y en consecuencia  $\omega(k_{\perp 0})$  también, podemos usar, para este valor de  $k_{\perp}$ , la forma asintótica de  $\epsilon^r$  dada en (3.163), resultando

$$\omega^2(k_{\perp 0}) = \frac{v^2}{\beta^2} \left( k_{\perp 0}^2 + \frac{4\pi N q^2}{m c^2} \right), \quad (3.176)$$

donde  $\beta^2 = 1 - v^2/c^2$ . Con esto la fuerza resulta

$$F = \frac{\kappa}{\epsilon_0} \left\{ \frac{q^2}{v^2} \int_{\omega(0)}^{i v k_{\perp 0} / \beta} \left[ \frac{1}{\epsilon^r(\omega)} - 1 \right] \omega d\omega + \frac{1}{2} q^2 k_{\perp 0}^2 + \frac{1}{2} q^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{1}{c^2} \right) [\omega^2(k_{\perp 0}) - \omega^2(0)] \right\}. \quad (3.177)$$

La integral en  $\omega$  puede reducirse si se usa la relación de dispersión para  $\epsilon^r$ . En efecto, como integramos sobre  $Im\{\omega\}$ , que llamaremos  $\eta$ , debemos evaluar

$$I = \int_{\eta(0)}^{v k_{\perp 0} / \beta} \left[ \frac{1}{\epsilon^r(i\eta)} - 1 \right] \eta d\eta, \quad (3.178)$$

pero como la relación de dispersión establece que

$$\frac{1}{\epsilon^r(i\eta)} - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega}{\omega^2 + \eta^2} Im \left\{ \frac{1}{\epsilon^r(\omega)} \right\} d\omega, \quad (3.179)$$

resulta para (3.178)

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \omega \left| Im \left\{ \frac{1}{\epsilon^r(\omega)} \right\} \right| \log \frac{v^2 k_{\perp 0}^2}{\beta^2 (\omega^2 - \omega^2(0))} d\omega. \quad (3.180)$$

Nos restringimos ahora al caso de un medio dieléctrico y para velocidades de la partícula tales que  $v < c/\sqrt{\epsilon^r}$ . Consecuentemente,  $\omega(0) = 0$  y podemos entonces introducir la frecuencia promedio  $\bar{\omega}$  usando la expresión (3.165) y escribir finalmente para la potencia de frenado

$$F(k_{\perp 0}) = \frac{2\pi \kappa q^4 N}{\epsilon_0 m} \left[ \frac{2}{v^2} \log \left( \frac{k_{\perp 0} v}{\beta \bar{\omega}} \right) - \frac{1}{c^2} \right]. \quad (3.181)$$

Debemos notar que esta última expresión se reduce a la previa (3.166), en el límite no relativista ( $v \ll c$ ).

### 3.8.3. Radiación Cherenkov

Cuando una partícula cargada es desacelerada abruptamente por la interacción con los átomos de la materia, radia parte de su energía en forma de *bremstrahlung*. Esta fue originariamente observada en el frenado brusco de electrones altamente energéticos por blancos metálicos y por ello denominada radiación de ruptura. La radiación así producida es claramente sensible a la masa de la partícula cargada y por ello se torna despreciable para masas suficientemente grandes. La mecánica cuántica participa de forma central en el tratamiento microscópico de este fenómeno de radiación, aun cuando es usual referirse a la radiación de frenado de cargas, como *bremstrahlung* clásico.

Existe otro tipo de radiación electromagnética en medios, ligada al movimiento de partículas rápidas. En efecto, cuando la velocidad inicial de la partícula en un dado medio material supera a la velocidad de la luz en ese medio, pierde parte de su energía, radiándola de una manera específica, lo que da origen al efecto Cherenkov. A diferencia del *bremstrahlung*, en el que la radiación surge de la misma partícula, el efecto Cherenkov consiste de radiación originada en el propio medio, excitado por la carga que lo atraviesa. En este caso, la potencia radiada no depende de la masa de la partícula acelerada.

A continuación hacemos un breve análisis del efecto Cherenkov. Recordemos que una onda electromagnética que se propaga en un medio transparente posee vector de onda y frecuencia que satisfacen la relación de dispersión

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon^r \mu_0 \mu^r} \frac{\omega}{c}.$$

Si el medio es transparente y no magnético,

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon^r \mu_0} \omega = \sqrt{\epsilon^r} \frac{\omega}{c} = n \frac{\omega}{c}$$

con  $\epsilon^r$  real y  $n(\omega)$  el índice de refracción. Por otra parte, una carga en movimiento a lo largo del eje  $x$  con velocidad  $v$  da lugar a un campo electromagnético de velocidad, determinado por los potenciales de Liénard-Wiechert. Este campo posee un vector  $\vec{k}$ , variable conjugada de Fourier de  $\vec{r}$ , cuya componente  $x$  se relaciona con la frecuencia a través de  $k_x = \omega/v$ . Concluimos entonces que siendo obviamente  $k > k_x$ , para que los campos de velocidad puedan dar lugar a radiación, debe ser  $v > c/n(\omega)$ . Esto ocurre siempre que la velocidad de la partícula cargada supere a la de la luz en el medio en cuestión. Vemos entonces que si bien una carga que se mueve uniformemente en el vacío no radia, la situación es diferente en un medio. Aquí, si se verifican las condiciones de existencia del efecto Cherenkov, existe transporte de energía del tipo de radiación, por intermedio de campos de velocidad.

Consideremos ahora el campo producido por la carga en una dirección que forma un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  de movimiento. En estas condiciones  $k_x = k \cos \theta$  y entonces

$$\cos \theta = \frac{c}{n(\omega) v} \quad (3.182)$$

mostrando que cada componente de frecuencia se corresponde con un ángulo diferente.

Así el campo de frecuencia  $\omega$  se propaga sobre un cono de abertura

$$2\theta = 2 \arcsin \left[ \frac{c}{n(\omega)v} \right]$$

cuyo eje es la dirección de movimiento de la partícula. De esta expresión surge nuevamente la existencia de un umbral de velocidad de la partícula para la aparición del efecto, dado por

$$v_{um} = \frac{c}{n(\omega)}.$$

Por último evaluaremos la intensidad de la energía radiada por efecto Cherenkov. Para ello vamos a retomar la ecuación (3.173) con la que se calculó la pérdida total de energía de la partícula en el medio, correspondiente a la frecuencia  $\omega$ . A partir de ella podemos deducir, por diferenciación, que para un intervalo de frecuencias  $d\omega$ , la pérdida será

$$dF = d\omega \frac{iq^2}{\pi} \omega \left( \frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon^r}{c^2} \right) \int_0^{k_{\perp 0}} k_{\perp} dk_{\perp} \epsilon^r \left[ k_{\perp}^2 + \omega^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{\epsilon^r}{c^2} \right) \right]. \quad (3.183)$$

Teniendo presente que  $\epsilon^r(\omega)$ , para medios transparentes reales, tiene una pequeña parte imaginaria con el signo de  $\omega$ , es simple calcular la integral obteniéndose

$$dF = e^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{v^2 n^2} \right) \omega d\omega, \quad (3.184)$$

energía que es radiada en un ángulo de abertura

$$d\theta = \frac{c}{v n^2} \frac{1}{\sin\theta} \frac{dn}{d\omega} d\omega$$

centrado en el valor correspondiente de  $\theta$  dado por (3.182). Claramente, la intensidad total de la radiación Cherenkov resulta de sumar sobre todas las frecuencias para las cuales el medio es transparente.

Mencionemos por último que el efecto Cherenkov es de gran importancia en la física de partículas, pues es el mecanismo de base sobre el que funcionan los detectores llamados precisamente Cherenkov, los que permiten registrar el pasaje de partículas cargadas muy rápidas y determinar su velocidad. Más aún, debido a la existencia de un umbral, el efecto permite seleccionar partículas según su velocidad.

### 3.8.4. Problema

- Suponiendo que el Luxite tiene un índice de refracción de 1,50 para la región del visible, calcular el ángulo de emisión de radiación Cherenkov visible producida por electrones y por protones, como función de la energía. Determinar cuántos cuantos (fotones) con longitud de onda entre 4.000 y 6.000 angstroms se emiten cuando un electrón de 1 MeV recorre 1 cm de Luxite y cuando un protón de 5 GeV recorre igual distancia. [JA,14.16]

### 3.9. MOVIMIENTO DE PARTÍCULAS CARGADAS

En esta sección nos proponemos describir el movimiento de partículas cargadas en presencia de campos eléctricos y magnéticos, lo que nos permitirá estudiar de manera global el comportamiento de las cargas en la materia líquida y gaseosa. En este ámbito estamos interesados entonces no sólo en el movimiento de los electrones, como sería el caso de la conductividad en sólidos, sino también en el de los iones en general. Cuando este proceso dinámico involucra oscilaciones capaces de producir una separación de cargas, se habla de procesos ligados a la física de *plasmas*.

El movimiento de una partícula cargada, que sufre la acción de la fuerza de Lorentz, es descrito por la ecuación

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{E} + \kappa'' \vec{v} \wedge \vec{B}). \quad (3.185)$$

Comenzamos estudiando el caso  $\vec{E} = 0$  y para el análisis separamos la velocidad en sus componentes paralela ( $v_{\parallel}$ ) y perpendicular ( $v_{\perp}$ ) al campo magnético externo. Es claro que  $v_{\perp}$  produce, según (3.185), una fuerza perpendicular a la velocidad que provoca un movimiento circular de la partícula cuyo radio  $r$  verifica

$$\frac{m v_{\perp}^2}{r} = \kappa'' q v_{\perp} B$$

y cuya pulsación es

$$\omega = \frac{\kappa'' q B}{m}.$$

Debido al movimiento correspondiente a  $v_{\parallel}$ , que se superpone al anterior, la partícula se desplaza describiendo una hélice. Si ahora se introduce un campo eléctrico  $\vec{E}$  perpendicular a  $\vec{B}$ , la partícula se acelera cuando viaja en la dirección de  $\vec{E}$ , y si su carga es positiva, el radio de curvatura de su trayectoria aumenta. Por el contrario, la curvatura de la trayectoria decrece si la partícula viaja en dirección opuesta al campo eléctrico. Concluimos entonces que la partícula es arrastrada como en una corriente, en una dirección perpendicular tanto a  $\vec{E}$  como a  $\vec{B}$ , como se muestra en la Figura (3.16).

El efecto mencionado es conocido con el nombre de *arrastre*  $\vec{E} \wedge \vec{B}$  y surge de la ecuación de movimiento (3.185), si se considera una velocidad

$$\vec{v} = \vec{v}' + \frac{1}{B^2} \vec{E} \wedge \vec{B},$$

ya que en ese caso la mencionada ecuación de movimiento se escribe

$$m \frac{d\vec{v}'}{dt} = \kappa'' q \vec{v}' \wedge \vec{B}$$

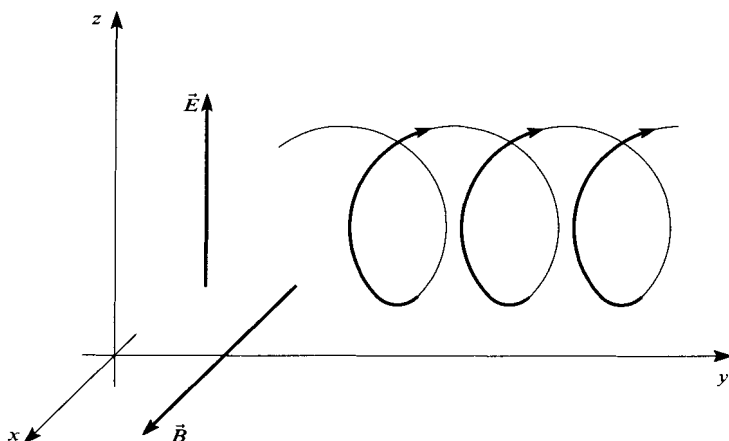


FIGURA 3.16: Arrastre perpendicular a  $\vec{E}$  y a  $\vec{B}$ .

recordando que  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  por hipótesis. Por lo tanto,  $\vec{v}'$  es la velocidad de la partícula alrededor del campo magnético, tal como ocurre en ausencia de campo  $\vec{E}$ . A este movimiento se le superpone otro correspondiente a la velocidad  $\vec{E} \wedge \vec{B}/B^2$  y que implica un arrastre perpendicular a ambos campos. Notemos que esta velocidad de arrastre es independiente de la masa, de la carga y de la velocidad de la partícula.

Por otra parte, se encuentra que las inhomogeneidades del campo magnético  $\vec{B}$  también producen un efecto en algún sentido similar al anterior que se denomina *arrastre de gradiente*. Supongamos, por simplicidad, que  $\vec{B}$  sólo tiene componente  $z$  y que es función solamente de  $x$

$$\vec{B} = B_z(x) \vec{k}.$$

Supongamos también que el campo crece en  $x = 0$  de manera discontinua. Por lo tanto, para  $x > 0$  la partícula cargada describirá una órbita de menor radio de curvatura debido a la relación (3.9) y como consecuencia aparecerá un arrastre en la dirección del eje  $y$ . El análisis del movimiento muestra que la velocidad de arrastre de gradiente puede escribirse, en este caso simple, como

$$v_G = \frac{r v_{\parallel}}{2 B_0} \frac{\partial B}{\partial x}$$

y en el caso general mediante

$$\vec{v}_G = \frac{r v_{\parallel}}{2 B^2} (\vec{B} \wedge \vec{\nabla}) \vec{B}.$$

Cuando las líneas del campo  $\vec{B}$  son curvas, también aparece el efecto, que en este caso es llamado *arrastre de curvatura*, debido al cual la partícula experimenta una fuerza centrífuga. Consideremos una partícula que se mueve en una región donde las



líneas de fuerza de  $\vec{B}$  son convergentes. Por lo tanto,  $\vec{B}$  aumenta en la dirección de movimiento y consecuentemente el radio de la órbita decrece, tal como se muestra en la Figura (3.17).

Debido a la convergencia de las líneas de campo magnético, existe una componente de  $\vec{B}$  en el plano de la órbita. Introduciendo coordenadas cilíndricas a lo largo del eje  $z$ , vemos que para  $z = 0$  existe una componente a lo largo de la dirección  $-\rho$ . Por lo tanto, aparecerá una fuerza en la dirección  $-z$  que retarda el arrastre. La ecuación de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

implica

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho B_\rho) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

y en consecuencia

$$B_\rho = -\frac{1}{\rho} \int \rho \frac{\partial B_z}{\partial z} d\rho.$$

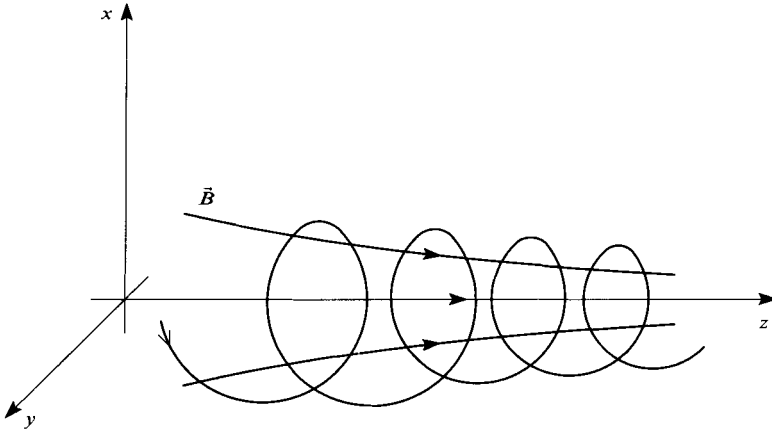


FIGURA 3.17: Arrastre de gradiente.

Suponiendo ahora que la variación de la componente  $z$  del campo en la dirección  $z$  es constante a lo largo de la órbita de la partícula y que  $B_\rho \ll B_z$ , tenemos

$$B_\rho = -\frac{\rho}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Entonces

$$F_z = -\kappa'' q v_\perp \frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z},$$

donde  $r$  es el radio de la órbita descrita por la partícula.

Usando la expresión (3.9) resulta

$$F_z = \frac{1}{2} m v_{\perp}^2 \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial z}, \quad (3.186)$$

que es la fuerza que provoca el retardo en el arrastre a lo largo de la dirección  $z$ .

Sobre la base de esta discusión, es posible introducir el concepto de *espejo magnético*. Para ello observemos que si  $\theta$  es el ángulo entre el eje  $z$  y la velocidad de la partícula, entonces

$$\frac{1}{2} m v_{\perp}^2 = \frac{1}{2} m v^2 \text{sen}^2 \theta.$$

Teniendo en cuenta que el momento magnético al que da lugar la carga en su movimiento es constante, se sigue que

$$\frac{1}{\text{sen}^2 \theta} B = \frac{1}{\text{sen}^2 \theta_0} B_0,$$

donde el subíndice cero se refiere a valores iniciales. Por lo tanto, si el campo  $B$  crece hasta el valor  $B_0/\text{sen}^2 \theta_0$ , entonces  $\theta = \pi/2$  y la componente longitudinal de la velocidad se anula. Si además  $\partial B/\partial z$  es finita en ese punto, existe aún componente  $B_{\rho}$  que da lugar, a través de la componente transversal de la velocidad, a una fuerza de arrastre en la dirección  $-z$ . Consecuentemente, la partícula se refleja, como en un espejo, a partir de ese punto. Esta idea está en la base del principio de confinamiento magnético de plasmas, probablemente el camino más apto para resolver el problema de la fusión nuclear. Además, los cinturones de Van Allen, partículas cargadas confinadas alrededor de la Tierra, por ejemplo, también tienen su origen en este efecto de espejo magnético.

### 3.9.1. Magnetohidrodinámica

Este nombre se reserva para referirse a la interacción entre campos electromagnéticos y la materia eléctricamente neutra, cuando esta última es descrita en términos de las ecuaciones macroscópicas de la hidrodinámica. La materia, en esas condiciones, se denomina *plasma*. Para el fluido en cuestión, la ecuación de continuidad que garantiza la conservación de la masa se escribe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.187)$$

donde  $\vec{v}(\vec{r}, t)$  es la velocidad del fluido y  $\rho(\vec{r}, t)$  la densidad de masa que lo constituye. La otra ecuación hidrodinámica a considerar se refiere a la fuerza

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} p + \kappa'' \vec{j} \wedge \vec{B} + \vec{f}_{vis} + \rho \vec{g}. \quad (3.188)$$

Aquí  $p$  es la presión en el seno del fluido y se han introducido, además de la fuerza magnética, una eventual fuerza viscosa y el peso. Notemos que todos los términos de la ecuación (3.188) tienen dimensión de densidad volumétrica de fuerza. La fuerza viscosa, en el caso de un fluido incompresible, se escribe

$$\vec{f}_{vis} = \eta \nabla^2 \vec{v},$$

donde  $\eta$  representa el coeficiente de viscosidad. El origen del término de presión está en la dependencia de esta magnitud con la posición en el fluido y en ese caso existe un gradiente de presión que fuerza un movimiento hacia regiones de menor presión. Notemos también que la derivada del miembro derecho de (3.188) es convectiva,

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla},$$

es decir, la derivada calculada siguiendo el movimiento.

El electromagnetismo involucrado está obviamente regido por las ecuaciones de Maxwell. En estas ecuaciones podemos despreciar la contribución de la corriente de desplazamiento frente a la de conducción, ya que el sistema es en general muy buen conductor.

El análisis del plasma implica conocer la relación entre corriente y campos. Es decir, debemos establecer la correspondiente generalización de la ley de Ohm. Para ello recordemos que en el sistema de referencia en el cual el medio está en reposo, caracterizado por magnitudes primadas, se verifica la ley de Ohm, que en términos de la conductividad  $\sigma$  se escribe

$$\vec{j}' = \sigma \vec{E}'.$$

Ahora bien, si el medio se desplaza respecto del laboratorio con velocidad  $\vec{v}$ , tanto la densidad de corriente como el campo eléctrico se transformarán. En efecto, es inmediato que

$$\begin{aligned} \vec{J} &= \vec{j}' + \rho_{elec} \vec{v} \\ \vec{E} &= \vec{E}' - \kappa'' \vec{v} \wedge \vec{B}, \end{aligned}$$

de modo que la ley de Ohm generalizada resulta

$$\vec{J} = \sigma \left( \vec{E} - \kappa'' \vec{v} \wedge \vec{B} \right). \quad (3.189)$$

Para describir completamente un sistema magnetohidrodinámico, necesitamos además de las ecuaciones anteriores: continuidad, ley de fuerza, ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm generalizada; una ecuación de estado para el fluido. En lo que sigue presentamos algunos fenómenos, probablemente los más simples, que se presentan en este tipo de sistemas.

### 3.9.2. Presión magnética

Para simplificar el tratamiento y en particular la ley de fuerza (3.188), dejamos de lado la fuerza viscosa y la fuerza gravitatoria. Ella se reduce entonces a

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla}p + \kappa'' \vec{J} \wedge \vec{B}. \quad (3.190)$$

Como dijimos, en los sistemas en cuestión podemos despreciar la corriente de desplazamiento, de manera que la ecuación de Maxwell correspondiente se escribe

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = 4\pi \kappa' \mu_0 \vec{J}; \quad (3.191)$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}\vec{j} \wedge \vec{B} &= \frac{1}{4\pi\kappa'\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \\ &= \frac{1}{4\pi\kappa'\mu_0} \left[ (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} B^2 \right],\end{aligned}$$

donde la segunda igualdad surge de una identidad vectorial usual. Consecuentemente, la ley de fuerza (3.190) resulta

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\kappa''}{4\pi\kappa'\mu_0} (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{\nabla} \left( p + \frac{\kappa''}{8\pi\kappa'\mu_0} B^2 \right). \quad (3.192)$$

Como vemos, la presencia del campo magnético modifica la presión hidrostática en el término

$$p_M = \frac{\kappa''}{8\pi\kappa'\mu_0} B^2, \quad (3.193)$$

que se denomina *presión magnética*.

En el caso simple en que el campo magnético posee una sola componente, digamos  $B_z$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{implica} \quad \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0,$$

y en ese caso, las propiedades estáticas del plasma están dadas por

$$p_M + p = \frac{\kappa''}{8\pi\kappa'\mu_0} B^2 + p = \text{const.}, \quad (3.194)$$

de manera que los cambios en la presión hidrostática son compensados por cambios en la presión magnética. Este es el principio que subyace al confinamiento de plasmas por acción magnética usado por ejemplo en los llamados Tokamacs. Es bien conocido de la magnetostática que el campo magnético en el interior de un cilindro por el que circula una corriente de densidad constante crece linealmente con la distancia al eje. Si esa corriente es transportada por un gas ionizado, la presión del gas, de acuerdo con (3.194), debe decrecer hacia la pared exterior del cilindro. La figura (3.18) indica el comportamiento, ideal, de las magnitudes relevantes en el análisis del confinamiento magnético.

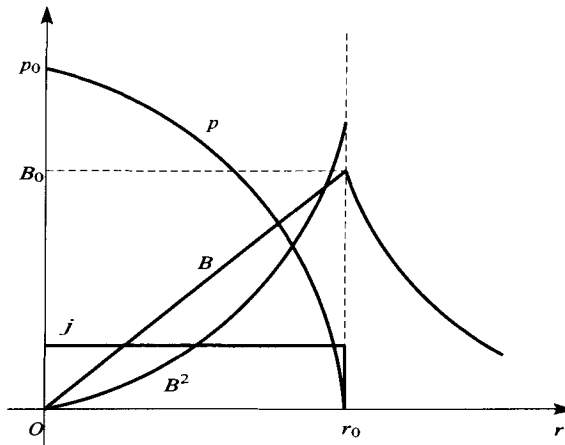


FIGURA 3.18: Confinamiento magnético de un plasma.

En la práctica, una de las condiciones más difíciles de verificar es la constancia de la densidad de corriente espacial. A esto debemos sumar las complejas condiciones de estabilidad a satisfacer. Por estas razones, el desarrollo de este tipo de confinamiento está en un nivel que supera escasamente el de estudio de factibilidad aun cuando han habido avances recientes importantes.

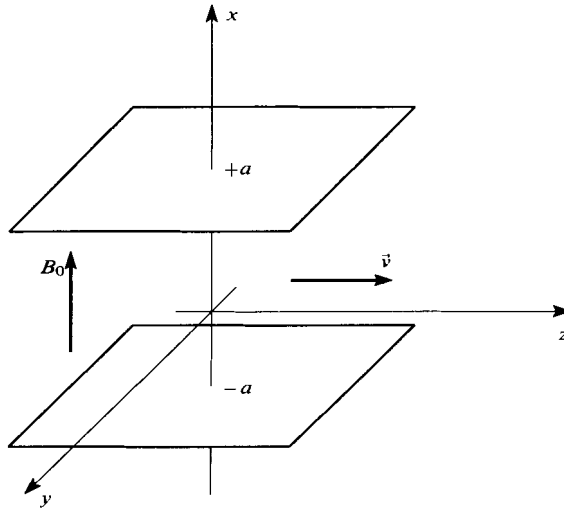
Si hubiésemos mantenido los efectos gravitatorios en el análisis, la presión mecánica hubiese tenido una contribución extra proporcional a la densidad que parecería también en la ecuación de balance estático (3.194).

### Flujo entre placas paralelas

Estudiamos el movimiento de un fluido incompresible en la dirección  $z$  entre dos placas infinitas, no conductoras, paralelas al plano  $(y, z)$  ubicadas en  $x = \pm a$ , como se muestra en la Figura (3.19).

Existe además un campo magnético externo aplicado en la dirección  $x$  de valor  $\vec{B}_0$ . El movimiento del fluido se debe a una diferencia de presión aplicada. Se realiza contra las fuerzas viscosas presentes, ya que hay un gradiente de impulso entre el seno del fluido y las placas, donde la velocidad se anula. El movimiento del plasma genera una corriente eléctrica en la dirección  $y$  según lo establece la ley de Ohm generalizada (3.189).

Nuestro primer paso será el cálculo de la velocidad en función del gradiente de presión aplicado y del campo magnético externo, en condiciones estacionarias. A fin de determinar la ecuación de fuerzas debemos recordar la presencia del gradiente de presión, de la fuerza viscosa y de la electromagnética. Suponemos un gradiente de presión constante en la dirección  $z$ , que llamamos  $-P$ . Por otra parte, al ser las placas infinitas en la dirección  $y$  y el fluido incompresible, concluimos que existe sólo componente  $z$  de la fuerza viscosa (3.9.1). Finalmente, siendo la corriente en la

FIGURA 3.19: *Flujo entre placas paralelas.*

dirección  $y$  y el campo magnético en la  $x$ , resulta que la fuerza correspondiente actúa a lo largo de  $-z$ . Por lo tanto, tenemos la ecuación de equilibrio

$$P - \kappa'' j B_0 + \eta \frac{d^2 v}{dx^2} = 0, \quad (3.195)$$

que garantiza el estado estacionario. Usando ahora la expresión para la corriente dada por la ley de Ohm generalizada (3.189), podemos escribir

$$\frac{P}{\eta} - \sigma \kappa''^{1/2} \frac{v}{\eta} B_0^2 + \frac{d^2 v}{dx^2} = 0,$$

cuya solución provee la velocidad como función de la coordenada  $x$ . La solución con las condiciones de contorno  $v = 0$  tanto en  $x = a$  como en  $x = -a$  resulta

$$v = \frac{P}{\sigma \kappa''^{1/2} B_0^2} \left( 1 - \frac{\cosh \frac{Mx}{a}}{\cosh M} \right), \quad (3.196)$$

donde el adimensional  $M$ , llamado *número de Hartmann*, está dado por

$$M = \kappa'' B_0 a \left( \frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2} \quad (3.197)$$

y su magnitud compara las cantidades electromagnéticas con el coeficiente de viscosidad que es un parámetro mecánico. En otras palabras, cuando  $M \gg 1$  predominan los fenómenos magnéticos, mientras que para  $M \rightarrow 0$ , deberemos reobtener las ecuaciones de la hidrodinámica.

Para  $M$  grande y  $x > 0$ , podemos aproximar

$$\left(1 - \frac{\cosh \frac{Mx}{a}}{\cosh M}\right) \simeq e^{M(1-x/a)}$$

y por lo tanto

$$v \simeq \frac{P}{\sigma \kappa'^2 B_0^2} \left[1 - e^{M(1-x/a)}\right], \quad (3.198)$$

de modo que el efecto del exponencial se percibe sólo para  $x \simeq a$ . La misma conclusión se obtiene analizando el comportamiento de  $v$  para  $x < 0$ . Por lo tanto, surge el perfil de velocidad mostrado en la Figura (3.20).

En el caso de pequeños valores de  $M$ , el desarrollo elemental de  $\cos M$  permite escribir

$$v \simeq \frac{1}{2} \frac{P a^2}{\eta} \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right], \quad (3.199)$$

que muestra el bien conocido perfil parabólico de la hidrodinámica, también representado en la Figura (3.20).

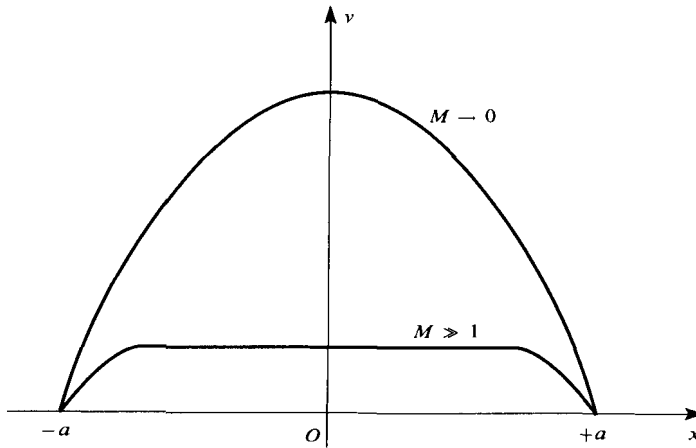


FIGURA 3.20: Perfil de velocidad para diferentes valores de  $M$ .

La velocidad (3.196) está relacionada con la respectiva corriente, que puede ser calculada por simple integración.

Esta discusión que acabamos de hacer subyace a la idea del generador magnetohidrodinámico, de gran interés por cuanto reemplaza las partes rotantes de los generadores convencionales, por un flujo de gas. Finalmente mencionamos que existe también la posibilidad de un motor magnetohidrodinámico como situación opuesta al generador.

**3.9.3. Problema**

- Una partícula cargada que se mueve en un círculo constituye un lazo de corriente y por lo tanto da lugar a un momento magnético. Expresar la fuerza de arrastre centrífugo, en términos del momento magnético correspondiente. A partir de la ecuación de movimiento y de la conservación de la energía total de la partícula, demostrar que su movimiento en un campo magnético variable con la posición es tal que se garantiza la constancia del momento magnético mencionado arriba.



# BIBLIOGRAFÍA

- I. J. R. AITCHISON y A. J. G. HEY: *Gauge theories in particle physics* [AH]. Adam Hilger Ltd., Bristol, 1984.
- J. L. ALESSANDRINI, H. FANCHIOTTI y C. A. GARCÍA CANAL: *Electromagnetismo*. Vol. 1, *Electrostática* [AF]. Serie de Física de Partículas y Campos, La Plata, 1980.
- A. O. BARUT: *Electrodynamics and classical theory of fields and particles* [BA]. Dover Publications, Nueva York, 1980.
- M. BORN y E. WOLF: *Principles of optics* [BW]. Pergamon Press, Nueva York, 1959.
- E. E. CASTELLANO: «Interaction of radiation with matter. X-Ray Scattering and Crystal Structure Determination» [EC]. ELAF'87. *Connections among Particle Physics, Nuclear Physics, Statistical Physics and Condensed Matter*. J. J. Giambiagi, G. G. Dussel, L. N. Epele, C. A. García Canal y H. Wio. Editors. World Scientific Publishing Co., Singapur, 1988.
- L. EYGES: *The classical electromagnetic field* [EY]. Dover Publications, Nueva York, 1972.
- R. P. FEYNMANN: *Lectures on physics*, Vol. 2 [FE]. Addison Wesley, 1967.
- H. GOLDSTEIN: *Classical Mechanics* [GO]. Addison Wesley, Reading, 1950.
- W. T. GRANDY, JR.: *Introduction to electrodynamics and radiation* [GY]. Academic Press, 1970.
- I. S. GRANT y W. R. PHILLIPS: *Electromagnetism* [GP]. John Wiley and Sons Ltd.
- E. G. HARRIS: *Introduction to modern theoretical physics* [HA]. John Wiley and Sons Ltd., 1975.
- J. D. JACKSON: *Classical electrodynamics* [JA]. John Wiley and Sons Ltd., 2ª ed. 1974.
- D. S. JONES: *The theory of electromagnetism* [JO]. Pergamon Press, 1964.
- J. KRAUS y K. CARVER: *Electromagnetics* [KC]. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1973.

- C. KITTEL: *Introduction to solid state physics* [KI]. John Wiley and Sons Ltd., 4<sup>a</sup> ed. 1971.
- L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ: *Electrodynamics of continuous media* [LL]. Pergamon Press, Nueva York.
- L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ: *Mechanics* [LA]. Pergamon Press, Nueva York.
- L. D. LANDAU y E. M. LIFSHITZ: *Theorie de champs* [LI]. Pergamon Press, Nueva York.
- J. LEITE LOPES: *Fundamentos da electrodinamica classica* [LS]. Facultad Nacional de Filosofia, Universidad de Brasil, 1960.
- J. LEITE LOPES: *Gauge field theories, an introduction* [LS]. Pergamon Press, 1981.
- MORSE y FESHBACH: *Methods of theoretical physics* [MF]. Mc Graw-Hill Book Company, Nueva York.
- J. MARION y M. HEALD: *Classical electromagnetic radiation* [MH]. Academic Press, 2<sup>a</sup> ed., 1980.
- YU. V. NOVOZHILOV y YU. A. YAPPA: *Electrodynamics* [NY]. Editorial MIR.
- W. PANOFSKY y M. PHILLIPS: *Classical electrocity and magnetism* [PP]. Adisson Wesley, Canadá, 1972.
- E. M. PUGH y E. W. PUGH: *Fundamentos de electricidad y magnetismo* [PU]. Aguilar, Madrid, 1965.
- J. R. REITZ y F. MILFORD: *Foundation of electromagnetic theory* [RM]. Adisson Wesley 3<sup>a</sup> ed., 1979.
- P. ROMAN: *Theory of elementary particles* [RO]. North Holland, Amsterdam, 1961.
- J. SLATER y N. FRANK: *Electromagnetism* [SF]. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1947.
- W. R. SMYTHE: *Static and dynamic electricity* [SM]. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1950.
- A. B. SOKOLOV, I. M. TERNOV, V. CH. ZHUKOVSKI y A. V. BORISOV: *Electrodinámica Cuántica* [SZ]. Editorial MIR.
- A. SOMMERFELD: *Electrodynamics* [SO]. Academic Press, Nueva York, 1952.
- J. A. STRATTON: *Electromagnetic theory* [ST]. McGraw-Hill Book Company, Nueva York, 1941.
- S. WEINBERG: *Gravitation and cosmology* [WE]. John Wiley, Nueva York, 1972.