* CAMPOS TENSORIALES

- CAMPO ≡ OBJETO FISICO FUNCION DE ESPACIO - TIEMPO

→ CAMPO TENSORIAL: ADEMAS CON PROPIEDADES BIEN DEFINIDAS FRENTE A Ts. LORENTZ (EN UN PUNTO 4D TENSOR DE RANGO r)

• CAMPOS ESCALARES

$\varphi(x)$: CAMPO ESCALAR $(r=0)$ SI SU VALOR EN P (DE 4D) ES EL MISMO PARA TODO SISTEMA INERCIAL

$$\Downarrow \quad \varphi'(x'^{\mu}) = \varphi(x^{\mu})$$

* FORMAS FUNCIONALES PUEDEN SER DISTINTAS (FORMA)

* INVARIANCIA DE FORMA SI ES FUNCION DEL INTERVALO s

• CAMPOS VECTORIALES

• CONTRAVARIANTE DEFINIDO EN ρ

$$A'^{\beta}(x'^{\mu}) = \sum_{\rho=0}^{3} a^{\beta}_{\rho} A^{\rho}(x^{\mu})$$

• COVARIANTE DEFINIDO EN ρ

$$A'_{\beta}(x'_{\mu}) = \sum_{\rho=0}^{3} b^{\rho}_{\beta} A_{\rho}(x_{\mu})$$

• VECTORIAL A PARTIR DE ESCALAR:

(VIA DERIVADA)

$$\frac{\partial \varphi'(x'^{\mu})}{\partial x'^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial \varphi(x^{\mu})}{\partial x^{\mu}_{\beta}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x^{\mu}} = \sum_{\beta=0}^{3} \frac{\partial \varphi(x^{\beta})}{\partial x^{\beta}} b^{\beta}_{\mu}$$

- $\dfrac{\partial \varphi(x^\mu)}{\partial x^\mu}$: TRANSFORMA COVARIANTE

- TETRAVECTOR ≡ GRADIENTE DE φ

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \sum_{\beta=0}^{3} b^{\beta}_{\mu} \frac{\partial}{\partial x^\beta}$$: TRANSFORMA COVARIANTE

- $\dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$: SE COMPORTA COMO TETRAVECTOR CONTRAVARIANTE

- TETRADIVERGENCIA DE CAMPO VECTORIAL CONTRAVARIANTE:

- $$\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial A^\mu(x^\beta)}{\partial x^\mu} = \frac{\partial A^1}{\partial x^1} + \frac{\partial A^2}{\partial x^2} + \frac{\partial A^3}{\partial x^3} - \frac{\partial A^0}{\partial x^0}$$ ESCALAR!

TETRADIVERGENCIA DE $\quad A^{\mu}(x^{\beta}) = \dfrac{\partial \varphi(x^{\beta})}{\partial x_{\beta}}$

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\gamma=0}^{3} g^{\mu\gamma}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\gamma}}\varphi$$

ES INVARIANTE !

$$\Downarrow \quad \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\gamma=0}^{3}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{\mu}\,\partial x^{\gamma}} = \nabla^{2} - \frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}} \equiv \Box^{2}$$

ES INVARIANTE ! $\qquad$ ONDA

(D'ALAMBERTIANO ≡ LAPLACIANO EN MINKOWSKI)

• CAMPOS TENSORIALES GENERALES

$$T^{\mu\ldots\gamma}_{\nu\ldots\delta}(x') = \sum_{\beta=0}^{3}\ldots\sum_{\eta=0}^{3}\ldots\sum_{\rho=0}^{3}\ldots\sum_{\omega=0}^{3} a^{\mu}_{\beta}\ldots a^{\gamma}_{\eta}\ldots b^{\rho}_{\nu}\ldots b^{\omega}_{\delta}\, T^{\beta\ldots\eta}_{\rho\ldots\omega}(x)$$

* REGLA: • DERIVACION DE UN DADO RANGO DA LUGAR A CAMPO TENSORIAL DE RANGO UNO SUPERIOR

  • CONTRACCION DISMINUYE r EN 2

TODO $\underline{r=2}$ PUEDE DESCOMPONERSE EN PARTE $\underline{S}$ Y PARTE $\underline{A}$

⇒ COMPONENTE ANTISIMETRICA $(\beta \leftrightarrow \gamma)$

• $F_{\beta\gamma} = \dfrac{\partial A_\beta}{\partial x^\gamma} - \dfrac{\partial A_\gamma}{\partial x^\beta}$

(COMPONENTES DE ROTOR EN 4D)

* CONVENCION DE SUMA DE EINSTEIN

• $x_\mu x^\mu$ SE ENTIENDE POR $\sum_{\mu=0}^{3} x_\mu x^\mu$

TEORIA DE GRUPOS Y TRANSFORMACIONES DE LORENTZ

TEORIA DE GRUPOS PROVEE UN METODO PARA EXTRAER CONSECUENCIAS DE LA PRESENCIA DE SIMETRIAS LIGADAS A DADAS TRANSFORMACIONES

- **GRUPO:** CONJUNTO DE ELEMENTOS $\{g\} \equiv g_1, g_2, \ldots$ ENTRE LOS CUALES ESTÁ DEFINIDA UNA LEY DE COMPOSICION $(g_1 \cdot g_2)$ ("MULTIPLICACION")

  FORMA GRUPO G SI:

i) $g_i \in G$ Y $g_j \in G$ LUEGO $g_i \cdot g_j \in G$

ii) $I \cdot g_i = g_i I$ PARA TODO $g_i \in G$ (I: ELEMENTO UNIDAD)

iii) A TODO g_i CORRESPONDE g_i^{-1} (INVERSO)

$$g_i^{-1} \in G \quad \text{Y} \quad g_i \cdot g_i^{-1} = I = g_i^{-1} \cdot g_i$$

iv) LA "MULTIPLICACION" ES ASOCIATIVA

CLASIFICACION:

- FINITOS: CONJUNTO FINITO DE ELEMENTOS
- INFINITOS: INFINITOS ELEMENTOS
- CONMUTATIVO O ABELIANO: $g_i \cdot g_j = g_j \cdot g_i$
- DE LIE: INFINITO CUYOS ELEMENTOS DEPENDEN EN FORMA CONTINUA DE UN CONJUNTO DE PARAMETROS

REPRESENTACION

CORRESPONDENCIA $g \rightarrow D(g)$ MATRIZ

(DEFINIDA EN ESPACIO VECTORIAL V)

RESPETA LA LEY DE "MULTIPLICACION"

$$D(g)\,D(g^{-1}) = I \Rightarrow D(g^{-1}) = D^{-1}(g)$$

GRUPO DE LORENTZ

TRANSFORMACION DE LORENTZ: • $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$ $(L \equiv a)$

FORMA MATRICIAL: • $x' = L\, x$

INVARIANCIA DE $x^{\mu} x_{\mu}$ $\Rightarrow$ • $\displaystyle\sum_{\mu,\rho=0}^{3} L^{\mu}{}_{\nu}\, g_{\mu\rho}\, L^{\rho}{}_{\sigma} = g_{\nu\sigma}$

• $L^T g L = g$ $\left[(L^T)_{\mu}{}^{\nu} = L^{\mu}{}_{\nu} \right]$

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

REPRESENTACION DE Ts. DE LORENTZ: MATRICES $\underline{\underline{4 \times 4}}$

$(L^T g L = g)$

SE SATISFACE :

i) $(L_1 L_2)^T g (L_1 L_2) = L_2^T L_1^T g L_1 L_2$

L_1 Y L_2 : Ts. LORENTZ $\Longrightarrow$

$$(L_1 L_2)^T g (L_1 L_2) = L_2^T g L_2 = g$$

ii) $$I^T g I = g$$

iii) $L^T g L = g \quad \otimes g \Rightarrow g L^T g L = g^2 = I$

$\Downarrow$

$$L^{-1} \equiv g L^T g \qquad (L^{-1})^T g (L^{-1}) = g$$

iiii) ASOCIATIVIDAD $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$

$\downarrow$

TRANSFORMACIONES DE L LORENTZ

FORMAN EL GRUPO DE LORENTZ RESTRINGIDO

* $\underline{4}$ SUBCONJUNTOS DE Ts. DE LORENTZ

- DETERMINANTE : 2
- L^0_0 : 2

- LORENTZ PROPIAS :
- " IMPROPIAS:
- DET = +1
- DET = −1

$$L^T g L = g \Rightarrow L^\mu_0 \, g_{\mu\rho} \, L^\rho_0 = -1$$

$$\Rightarrow (L^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^{3} (L^i_0)^2 \Rightarrow$$

- $L^0_0 \geq 1$ ó $L^0_0 \leq 1$

SIGNO DE LA COMPONENTE TEMPORAL DE VECTORES $\underline{\text{NO}}$ CAMBIA

- (ORTOCRONAS)
- (ANTIORTOCRONAS)

$\Downarrow$

- **LORENTZ RESTRINGIDO:** $\begin{cases} \det(L) = +1 \\ L^0_0 \geq 1 \end{cases}$

MATRICES 4 x 4 $\Rightarrow$ 16 PARAMETROS

PERO $\displaystyle\sum_{\gamma=0}^{3} a^\alpha_\gamma a^\gamma_\beta = \delta^\alpha_\beta \Rightarrow$
(10 VINCULOS)

6 PARAMETROS

• OTROS SUBCONJUNTOS DEL GRUPO DE LORENTZ

* AGREGAR AL RESTRINGIDO

I) INVERSION ESPACIAL: $\vec{x} \to -\vec{x}$; $x_0 \to x_0$

(P)

(PARIDAD)

• $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

LORENTZ $\begin{pmatrix} \text{CON } \det(L) = -1 \\ L^0{}_0 > 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P . L'$ (L' RESTRINGIDO)

II) INVERSION TEMPORAL: $\vec{x} \to \vec{x}$; $x_0 \to -x_0$

(T)

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \text{CON } \det(L) = -1 \\ L^0{}_0 \leq -1. \end{pmatrix} \Rightarrow T . L'$

III) INVERSION ESPACIO-TEMPORAL: $\vec{x} \to -\vec{x}$; $x_0 \to -x_0$

$$PT = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{CON } \det(L) = +1 \\ L^0_0 < 1 \end{pmatrix} \Rightarrow P.T.L^\uparrow$$

SUBCONJUNTOS DISJUNTOS (NO CONTINUAMENTE CONECTADOS)

P Y T LIGADAS A SIMETRIAS DISCRETAS
(INTERACCIONES FUNDAMENTALES)

• REPRESENTACIONES DE LORENTZ RESTRINGIDO

* SUBESPACIO INVARIANTE:

V: ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSION $\underline{\underline{n}}$

$D(g)$: REPRESENTACION DE G

V_1: SUBESPACIO DE V DE $\underline{\underline{n_1}}$

SI PARA TODO $f \in V_1$ Y TODO $g \in G$, $D(g) f \in V_1$

$\Rightarrow$ V_1 SUBESPACIO INVARIANTE

$\Rightarrow$ $D(g) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ REDUCIBLE !

SI $D(g)$ EN V NO ADMITE V_1 $\Rightarrow$ IRREDUCIBLE

FORMA TOTALMENTE REDUCIDA

$$D(g) = D^1(g) \oplus D^2(g) \oplus \dots D^k(g)$$

$D^j(g)$: IRREDUCIBLES

$\Downarrow$

* CAMPO VECTORIAL CONTRAVARIANTE

$$A'^{\beta}(x'^{\mu}) = \sum_{\rho=0}^{3} a^{\beta}_{\rho} A^{\rho}(x)$$

ES DE LA FORMA LORENTZ $x'^{\mu} = L^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu}$

$\Downarrow$

CAMPOS VECTORIALES FORMAN BASE DE REPRESENTACION DEL GRUPO DE LORENTZ DE DIMENSION $\underline{\underline{4}}$

ELEMENTOS DE LA MATRIZ a^{α}_{β} DEFINEN LA REPRESENTACION DE DIMENSION $\underline{4}$

* TENSOR DE RANGO 2:

$$T^{\mu\nu} = \sum_{\alpha=0}^{3} \sum_{\beta=0}^{3} a^{\mu}_{\alpha}\, a^{\nu}_{\beta}\, T^{\alpha\beta}$$

TRANSFORMA COMO PRODUCTO DE COORDENADAS

- $$x'^{\mu} y'^{\alpha} = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{m} [D^{n}(g)]^{\mu}_{\nu} \, [D^{m}(g)]^{\alpha}_{\beta} \, x^{\nu} y^{\beta}$$

PRODUCTO DIRECTO DE 2 REPRESENTACIONES DE DIMENSION 4

- $T^{\mu\nu}$: BASE DE ESPACIO DE REPRESENTACIONES DE DIMENSION 16

TODO $\underline{T^{\mu\nu}}$ PUEDE DESCOMPONERSE EN $\underline{S}$ Y $\underline{A}$

REPRESENTACION $\underline{\underline{16}}$ SE DESDOBLA EN $\underline{\underline{2}}$ SUBESPACIOS

DE DIMENSION $\underline{\underline{10}}$ Y $\underline{\underline{6}}$ (INVARIANTES)

REPRESENTACIONES $\underline{\underline{10}}$ Y $\underline{\underline{6}}$ REDUCIBLES

$$S_{\mu\nu} = \left(S_{\mu\nu} - \frac{1}{4} s\,\delta_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{4} s\,\delta_{\mu\nu}$$

$s = Tr[S_{\mu\nu}]$

$$* \quad 10 = \underset{\text{(ESCALAR)}}{1} + \underset{\text{(TRAZA NULA)}}{9}$$

$A_{\mu\nu}$

- DEFINICION: $T^D_{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, T_{\alpha\beta}$

(DUAL)

$$A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} + A^D_{\mu\nu}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{\mu\nu} - A^D_{\mu\nu}\right)$$

$$= \qquad B_{\mu\nu} \qquad + \qquad C_{\mu\nu}$$

SATISFACEN $\begin{cases} B^D_{\mu\nu} = B_{\mu\nu} & \text{AUTODUAL} \\ C^D_{\mu\nu} = -\, C_{\mu\nu} & \text{ANTIAUTODUAL} \end{cases}$

$$A_{\mu\nu}[6] = B_{\mu\nu}[3] + C_{\mu\nu}[3]$$

SE PUEDE SEGUIR A REPRESENTACIONES SUPERIORES !