- $\tan\psi = -\frac{x_1}{x_4} = i\beta$

- $\beta = \frac{v}{c}$

LORENTZ

- $$\begin{cases} x'_1 = \gamma(x_1 + i\beta x_4) \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \\ x'_4 = \gamma(x_4 - i\beta x_1) \end{cases}$$

LORENTZ

- $$\begin{cases} x' = \gamma(x - vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{cases}$$

CONSECUENCIAS LORENTZ

a) CONTRACCION DE LONGITUDES (LORENTZ-FITZGERAL)

COMPARACION DE MEDIDAS DE INTERVALOS ESPACIALES EN S Y S'

VARILLA EN REPOSO EN S DE $l = x_2 - x_1$

EN S' LA LONGITUD DEBE MEDIRSE CON LA POSICION DE AMBOS EXTREMOS SIMULTANEAMENTE ¡ (A $\underline{t'}$)

$$l' = x'_2 - x'_1$$

- $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$

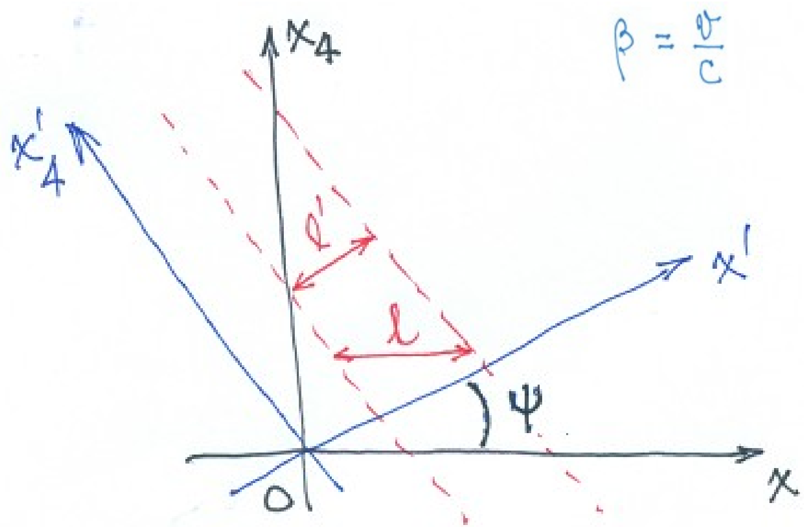
$\beta = \frac{v}{c}$

$$x_2 = \gamma(x'_2 - vt') \qquad x_1 = \gamma(x'_1 - vt')$$

$$x_2 - x_1 = \gamma(x'_2 - x'_1)$$

$$l' = (x'_2 - x'_1) = \frac{x_2 - x_1}{\gamma} = \frac{l}{\gamma}$$

- $\gamma > 1 \Rightarrow l' < l$



* LONGITUDES EN MOVIMIENTO SE ACORTAN

(PROPIEDAD GEOMETRICA DEL ESPACIO-TIEMPO NO DE LA MATERIA)

→ CONTRACCION DE UN VOLUMEN 3D : $V = \gamma V'$

b) DILATACION TEMPORAL

RELOJ EN REPOSO EN x_1 DE S EN t $\Rightarrow \Delta t = t_2 - t_1$

EN S'

- $t'_1 = \gamma\left(t_1 - \frac{v x_1}{c^2}\right)$
- $t'_2 = \gamma\left(t_2 - \frac{v x_1}{c^2}\right)$

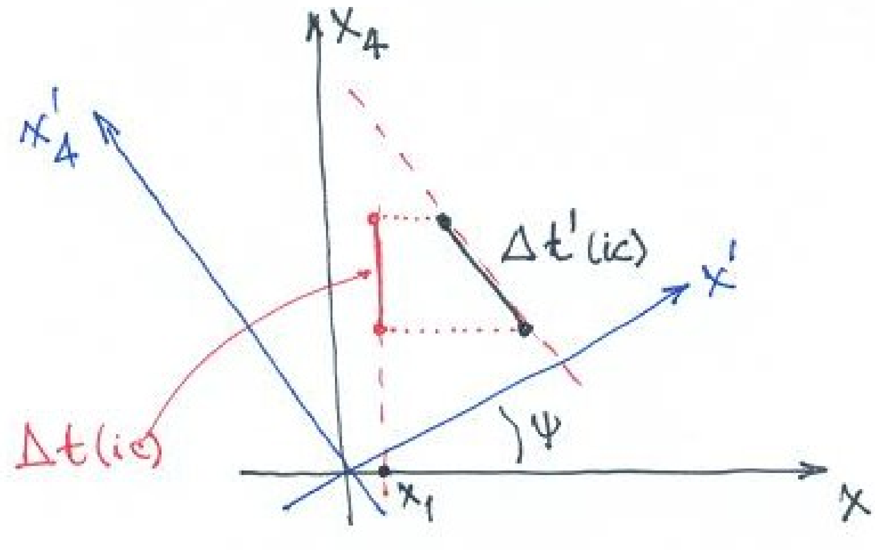
$$t'_2 - t'_1 = \gamma\,(t_2 - t_1)$$

$$\Delta t' = \gamma\,\Delta t$$

$\gamma > 1 \rightarrow \Delta t' > \Delta t$

DILATACION TEMPORAL

"ATRASO" EN MOVIMIENTO



* COMPROBACION EXPERIMENTAL: VIDA MEDIA DEL MUON

$(m_\mu = 207\, m_e \Rightarrow$ INESTABLE$)$

$(\mu \rightarrow e + \nu)$

- $\tau_\mu = 2.2\ \mu seg$ (EN SU SISTEMA)

(VIDA MEDIA) (EN REPOSO)

VIAJANDO A "C" ~ RECORRE ~ 600 m ANTES DE DECAER

SE PRODUCEN EN LA ALTA ATMOSFERA (RAYOS COSMICOS)

$\Downarrow$

NUNCA LLEGARIAN A LA TIERRA

PERO: SE DETECTAN EN GRAN NUMERO POR QUE?

τ_μ MEDIDA EN LA TIERRA (T)

$$T = \gamma\, \tau$$

$v \sim 0.99c \rightarrow T \approx 16\ \mu s$

$\Rightarrow$ RECORRE EN T: 5 Km

c) EFECTO DOPPLER

FRECUENCIA DE UNA SEÑAL RECIBIDA DEPENDE DE LA VELOCIDAD FUENTE - OBSERVADOR !

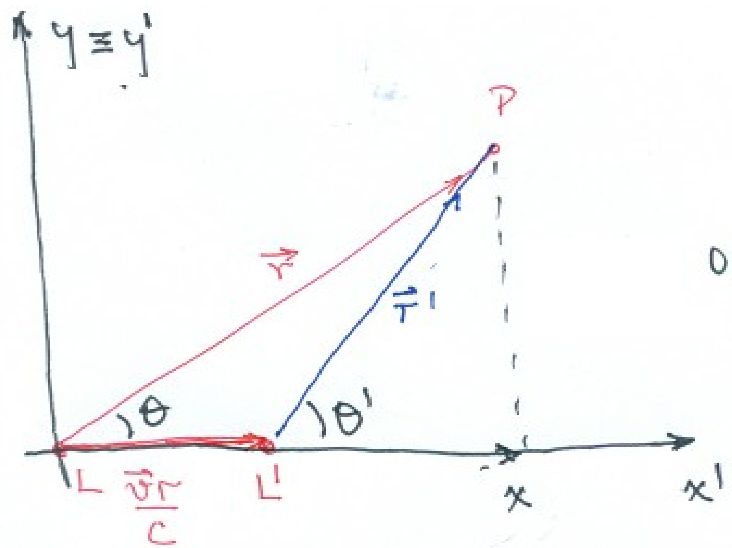
$\underline{\underline{L'}}$: FUENTE DE LUZ PUNTUAL EN REPOSO EN S'

EMITE ONDA

$$\bullet\ O' = \frac{A}{r'} e^{i\omega'\left(t' - \frac{r'}{c}\right)}$$

INTERCEPTA AL OBSERVADOR $P(x,y)$ EN S $\Rightarrow P(\text{EN } S'): (x', y')$

MOVIMIENTO S-S' A LO LARGO DE x (x')



$$\bullet\ r' = x'\cos\theta + y'\,\mathrm{sen}\,\theta$$

OBSERVADOR EN S: $\bullet\ O = \dfrac{A}{r} e^{i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)}$

$$\bullet\ r = x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$\Downarrow$

USANDO LORENTZ:

FASE DE O:

- $\omega\left[\gamma\left(t' + \frac{v x'}{c^2}\right) - \frac{\gamma(x' + v t')\cos\theta'}{c} - y'\frac{\sin\theta'}{c}\right]$

FASE DE O':

- $\omega'\left(t' - \frac{r'}{c}\right)$

COMPONENTE TEMPORAL $\Rightarrow$ $\underbrace{\omega' = \omega\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)}$

DOPPLER RELATIVISTA

$v\cos\theta = -\vec{v}\cdot\check{n}$ $\quad \check{n}$: DIRECCIÓN DE P A L (SENTIDO $-\vec{r}$)

$\Downarrow$ $\underbrace{\omega_{OBS} = \frac{\omega_{FUENTE}}{\gamma\left(1 + \frac{\vec{v}\cdot\check{n}}{c}\right)}}$

- FUENTE SE ALEJA $\Rightarrow \vec{v}\cdot\check{n} > 0 \Rightarrow \omega$ HACIA EL ROJO
- FUENTE EN MOVIMIENTO TRANSVERSAL $\Rightarrow \vec{v}\cdot\check{n} = 0$
  (DOPPLER TRANSVERSO) (HACIA EL ROJO)
- FUENTE SE ACERCA $\Rightarrow \vec{v}\cdot\check{n} = -v \Rightarrow \omega$ HACIA EL VIOLETA

PARTE ESPACIAL
ABERRACIÓN DE LA LUZ
(ESTRELLAS EN 1 AÑO DESCRIBEN ELIPSES)

- ADICION DE VELOCIDADES ("$c \oplus c = c$")

COMBINACION DE v_1 Y v_2 : • $v = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$

≡ ADICION DE LA FUNCION TANGENTE

(SUMA DE v ⇒ COMPOSICION DE 2 Ts. DE LORENTZ)

∨ DE 2 "ROTACIONES" ψ_1 Y ψ_2

$\sum$ ANGULOS ≠ $\sum$ TANGENTES ⇒

• $\tan\psi = \dfrac{\tan\psi_1 + \tan\psi_2}{1 - \tan\psi_1 . \tan\psi_2}$

↓

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \Rightarrow (c \oplus c = c)$$

INTERVALO (ELEMENTO DE LINEA)

- $$\Delta s^2 = \sum_{\alpha=1}^{4} \Delta x_\alpha^2$$ INVARIANTE FUNDAMENTAL

(DISTANCIA MINKOWSKIANA)

INTERVALO ENTRE INFINITAMENTE PROXIMOS

$\Rightarrow$ NATURALEZA GEOMETRICA LOCAL DE $(3+1)D$

PROPIEDADES DE $\underline{ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - c^2 dt^2}$ (PUEDE SER $\gtreqless 0$!)

$\downarrow$

- INTERVALOS TIPO ESPACIO : $ds^2 > 0$

  (VIA LORENTZ SE PUEDE LLEVAR A REDUCIR LA TEMPORAL A $\underline{0}$)

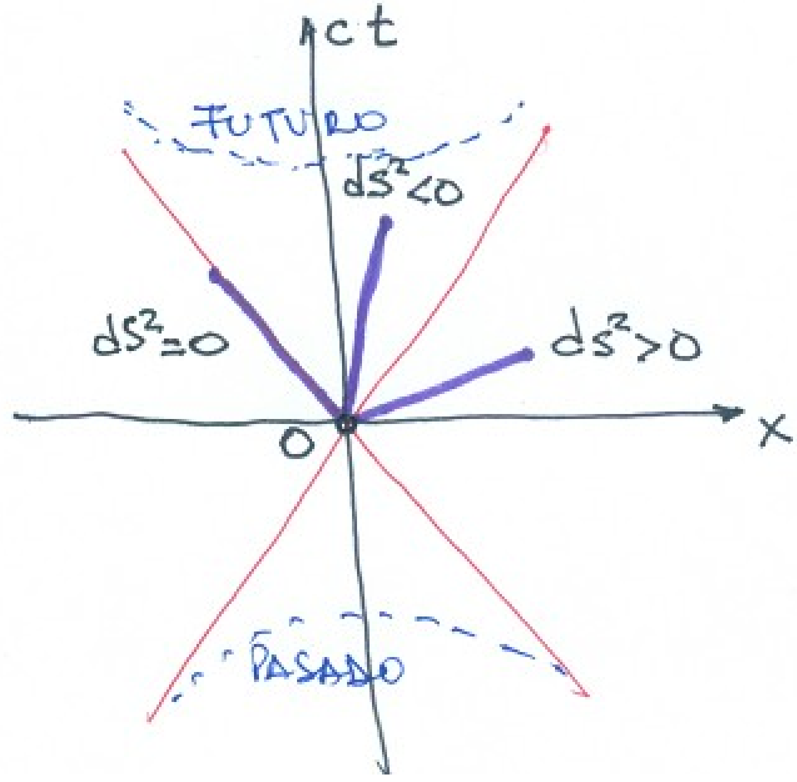
- INTERVALOS TIPO TIEMPO : $ds^2 < 0$

  (VIA LORENTZ ESPACIAL A $\underline{0}$)

- INTERVALOS TIPO LUZ : $ds^2 = 0$

  (UN RAYO DE LUZ ALCANZA A PROPAGARSE EXACTAMENTE ENTRE EXTREMOS)

DADO UN PUNTO O TODOS LOS SEPARADOS DE O POR INTERVALOS TIPO LUZ FORMAN LA SUPERFICIE DE UN CONO (EN 4D) : CONO DE LUZ DE O



GRUPO DE LORENTZ

- MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA

* ECUACION: $x_i = x_i(t)$; $i=1,2,3$

CURVA EN (x, ct)

LINEA DE UNIVERSO DE LA PARTICULA

AHÍ PARA 2 PUNTOS CERCANOS $ds^2<0$ $\Rightarrow$

DEFINIR: TIEMPO PROPIO (>0 PARA $ds^2<0$)

- $$d\tau^2 \equiv dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2\right) = -\frac{ds^2}{c^2}$$

- $d\tau^2$ INVARIANTE (ds^2 Y c LO SON!)

* VELOCIDAD: $\vec{u} \equiv \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)$$

$$\Rightarrow \quad \bullet\ d\tau = \sqrt{\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)}\, dt$$

- τ: TIEMPO DEL RELOJ QUE SIGUE EL MOVIMIENTO DE LA PARTICULA (PROPIO)
- τc: LONGITUD DE LA LINEA DE UNIVERSO DESCRIPTA POR LA PARTICULA

$\downarrow$

REEMPLAZAR $x_i = x_i(t)$; $i = 1,2,3$

POR

- $x_\mu = x_\mu(\tau)$; $\mu = 1,2,3,4$

GARANTIZAR COVARIANCIA (POSTULADO 1) $\Rightarrow$

TRANSFORMACIONES ADECUADAS DE LAS CANTIDADES FISICAS

$\downarrow$ REPASAR EL CALCULO TENSORIAL !

- $x_4 = ict \Rightarrow ds^2 = \sum_{\mu=1}^{4} dx_\mu^2$

- $x_0 = ct \Rightarrow$ INTRODUCIR UNA METRICA

(DISTINGUIR ESPACIO DE TIEMPO)

$\downarrow$

CARACTER COVARIANTE O CONTRAVARIANTE DE LAS MAGNITUDES TENSORIALES

(x_0 MAS APTA PARA ESPACIOS CURVOS : REL. GENERAL)

TENSORES

a) COVARIANTES Y CONTRAVARIANTES

- TRANSF. DE LORENTZ $\quad$ • $x'^{\alpha} = \sum^{3} a^{\alpha}_{\beta} x^{\beta}$

- TRANSF. INVERSA: $\quad$ • $x^{\beta} = \sum_{\alpha=0}^{3} b^{\beta}_{\alpha} x'^{\alpha}$

SE DEBE SATISFACER

• $\sum_{\gamma=0}^{3} a^{\alpha}_{\gamma} b^{\gamma}_{\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}$

$\rightarrow \{a^{\alpha}_{\beta}\}$ Y $\{b^{\beta}_{\alpha}\}$ · MATRICES INVERSAS

- TETRAVECTOR CONTRAVARIANTE

  - $$V'^{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} a^{\alpha}_{\beta} V^{\beta}$$ (SUPRAINDICE)

- TETRAVECTOR COVARIANTE

  - $$V'_{\alpha} = \sum_{\beta=0}^{3} b^{\beta}_{\alpha} V_{\beta}$$ (SUBINDICE)

- SI SE NECESITAN MAS INDICES $\Rightarrow$ TENSORES

(NÚMERO DE INDICES $\equiv$ RANGO (r))

* RANGO r $\Rightarrow$ 4^r COMPONENTES

$\Rightarrow$ (ESCALARES: $r=0$; TETRAVECTORES: $r=1$)

i) TENSORES CONTRAVARIANTES (SUPRAINDICES)

$$T'^{\alpha\beta\ldots\gamma} = \sum_{\epsilon=0}^{3}\sum_{\theta=0}^{3}\cdots\sum_{\omega=0}^{3} a^{\alpha}_{\epsilon}\, a^{\beta}_{\theta}\cdots a^{\gamma}_{\omega}\, T^{\epsilon\theta\ldots\omega}$$

ii) TENSORES COVARIANTES (SUBINDICES)

iii) TENSORES MIXTOS (SUPRA Y SUB)

* SUMA DE TENSORES

(IGUAL RANGO E IGUAL NUMERO DE SUPRA Y SUB)

- $S^{\beta}_{\alpha} = T^{\beta}_{\alpha} + V^{\beta}_{\alpha}$

⇒ TRANSF. LORENTZ:

- $S'^{\beta}_{\alpha} = T'^{\beta}_{\alpha} + V'^{\beta}_{\alpha} = \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\delta=0}^{3} a^{\beta}_{\gamma} b^{\delta}_{\alpha} (T^{\gamma}_{\delta} + V^{\gamma}_{\delta})$

$$= \sum_{\gamma=0}^{3} \sum_{\delta=0}^{3} a^{\beta}_{\gamma} \cdot b^{\delta}_{\alpha} S^{\gamma}_{\delta}$$

* PRODUCTO DE TENSORES

(SUMA DE SUPRAS Y SUB INDICES)

EJ: • $T^{\beta}_{\alpha} V^{\gamma} = S^{\beta\gamma}_{\alpha}$

* CONTRACCION

- RANGO r → RANGO r-2

(FIJANDO UN SUPRA = UN SUB Y SUMANDO)

EJ:

- $\sum_{\alpha=0}^{3} T_{\alpha}^{\alpha\beta} = T^{\beta}$

* PARA $r=2$: CONTRACCION ≡ TRAZA

- $Tr\{T^{\mu}_{\nu}\} = \sum_{\mu=0}^{3} T^{\mu}_{\mu}$

↓

CONTRACCION TETRAVECTOR COVARIANTE CON CONTRAVARIANTE ⇒ ESCALAR

- $\sum_{\alpha=0}^{3} T_{\alpha} V^{\alpha}$ = ESCALAR LORENTZ

* SIMETRÍA DE TENSORES :

$$T^{\alpha\dots\mu\dots\nu\dots} = \pm\, T^{\alpha\dots\nu\dots\mu\dots}$$

SIMÉTRICO $\mu\nu$

ANTISIMÉTRICO $\mu\nu$

$\Downarrow$

RANGO $r=2$ SIMÉTRICO : 6 ELEMENTOS

ANTISIMÉTRICO : 3 ELEMENTOS

* CONTRACCIÓN SIMÉTRICO CON ANTISIMÉTRICO $\equiv \underline{\underline{0}}$

× TENSOR METRICO:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - dx_0^2$$

dx^μ : CONTRAVARIANTE

$$\bullet\ ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$$

• $g_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$; • $g_{ij} = \delta_{ij}$; • $g_{00} = -1$

* $g_{\mu\nu}$: $r=2$ SIMETRICO $\equiv$ TENSOR METRICO

ds^2 INVARIANTE

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx'^{\mu}\, dx'^{\nu}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3}\sum_{\xi=0}^{3}\sum_{\gamma=0}^{3} g_{\mu\nu}\, a^{\mu}_{\xi}\, a^{\nu}_{\gamma}\, dx^{\xi}\, dx^{\gamma}$$

$\Downarrow$

- $$g_{\mu\nu} = \sum_{\xi=0}^{3}\sum_{\gamma=0}^{3} a^{\xi}_{\mu}\, a^{\gamma}_{\nu}\, g_{\xi\gamma}$$

* $g_{\mu\nu}$ NO CAMBIA AL PASAR DE S A S'

- PRODUCTO ESCALAR

$$\sum_{\mu=0}^{3}\sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, T^{\mu} V^{\nu} = T^1V^1 + T^2V^2 + T^3V^3 - T^0V^0$$

* TENSOR METRICO CONTRAVARIANTE (INVERSO DE $g_{\mu\nu}$)

$$\sum_{\sigma=0}^{3} g_{\mu\sigma}\, g^{\sigma\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

* TENSOR DE LEVI-CIVITA:

CONTRAVARIANTE TOTALMENTE ANTISIMETRICO

INDEPENDIENTE DEL SISTEMA DE REFERENCIA

$$r = 4$$

$$* \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \begin{cases} +1 & \text{SI } (\alpha\beta\gamma\delta) \text{ PERMUTACION PAR DE } (0123) \\ -1 & \text{〃 〃 〃 IMPAR DE 〃} \\ 0 & \text{CUALQUIER OTRO VALOR DE INDICES} \end{cases}$$