$$\Box^2 A_\mu = -\frac{4\pi k}{\epsilon_0 c} J_\mu \quad ; \quad \mu = 1,2,3;4$$

- $A_\mu \equiv (k'' c \vec{A}\, ;\ A_4 = i\phi)$
- $J_\mu \equiv (\vec{J}\, ;\ J_4 = ic\rho)$

- $g^{A}(x-x') = \dfrac{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'| \oplus (x_0 - x_0')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
- $A^{A}_\mu = \dfrac{k}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^{A}$

- $g^{R}(x-x') = \dfrac{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'| \ominus (x_0 - x_0')]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$
- $A^{R}_\mu = \dfrac{k}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^{R}$

$$A^{R}_\mu(\vec{r},t) = \frac{k}{\epsilon_0 c}\int d^3r'\, \frac{J_\mu(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- $\vec{A}^{R}(\vec{r},t) = k'\mu_0 \displaystyle\int d^3r'\, \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

- $\phi^{R}(\vec{r},t) = \dfrac{k}{\epsilon_0}\displaystyle\int d^3r'\, \frac{\rho(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

GENERALIZACION DE BIOT-SAVART

(CAMPO MAGNETICO DE UNA CORRIENTE LINEAL)

* CASO ESTACIONARIO

$$\nabla^2 \vec{A} = -4\pi k' \mu_0 \mu_r \vec{J} \Rightarrow \vec{B}(\vec{r}) = k' \mu_0 \mu_r I \vec{\nabla}_r \oint \frac{\vec{dl}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

CORRIENTE LINEAL ESTACIONARIA

$$\vec{\nabla} \wedge (f\vec{A}) = (f \vec{\nabla} \wedge \vec{A} - \vec{A} \wedge \vec{\nabla} f)$$

$$\downarrow$$

- $$d\vec{B} = k' \mu_0 \mu_r I \frac{dl' \wedge (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \qquad \propto \frac{1}{r^2}$$

* CASO NO ESTACIONARIO

$$I = I(t)$$

POTENCIAL VECTOR RETARDADO $\Rightarrow$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = k' \mu_0 \mu_r \oint \vec{\nabla} \wedge \left[\frac{I\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d\vec{l}' \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] = -\frac{1}{c} f'\left(t - \frac{x}{c}\right) \Rightarrow -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial x} f$$

$\Downarrow$

$$d\vec{B}(\vec{r},t) = k' \mu_0 \mu_r \left\{ \frac{I\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^2} + \frac{1}{c|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial}{\partial t}\left[I\left(t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)\right]\right\} d\vec{l}' \wedge \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$dB_i \propto \dfrac{1}{r^2}$ (INDUCCION)

$dB_r \propto \dfrac{1}{r}$ (RADIACION)

$$d\vec{B} = d\vec{B}_i + d\vec{B}_r$$

– FUENTES $= f(t) \Rightarrow$ ESTUDIAR RADIACION –

* CAMPOS DE RADIACION

CAMPOS EM RADIADOS POR FUENTES LOCALIZADAS

- FUENTES $\begin{cases} \rho(\vec{r},t) = \rho(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \\ \vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \end{cases}$

$\left(e^{-i\omega t} + \text{SUPERPOSICION...}\right)$

(AL FINAL TOMAR PARTE REAL O IMAGINARIA (COS, SEN))

CAMPOS REALES!

- GAUGE DE LORENTZ $\Rightarrow$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = k' \mu_0 \int dt' \int d\vec{r}'\, \frac{\vec{J}(\vec{r}',t')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \delta\left(t - t' + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right)$$

- PARTE ESPACIAL

$$\vec{A}(\vec{r}) = k' \mu_0 \int d\vec{r}'\, \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

• FUERA DE LAS FUENTES: $(\vec{j}=0)$

• $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

• $\vec{E} = i k'' \frac{c}{k} \vec{\nabla} \wedge \vec{B}$

• d: DIMENSION DE LA FUENTE
  λ: LONGITUD DE LA ONDA RADIADA
  r: DISTANCIA: P. FUENTE – P. CAMPO

• SITUACION:

• $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \gg d$

• $\Rightarrow$ TRES REGIONES

i) CERCANA O ESTATICA • $d \ll r \ll \lambda$

ii) INTERMEDIA (INDUCCION) • $d \ll r \sim \lambda$

iii) LEJANA O DE RADIACION • $d \ll \lambda \ll r$

- COMPORTAMIENTO DE LOS CAMPOS:

i) ESTATICOS, COMPONENTES RADIALES (LONGITUDINALES)

$f(r)$ DEPENDIENTE DE LA ESTRUCTURA DE LA FUENTE

iii) • TRANSVERSALES AL RADIO VECTOR P.FUENTE-P.CAMPO (MODOS TRANSVERSALES)

• COMPORTAMIENTO $1/r$

• SITUACION $r \gg d$: $\rightarrow |\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \check{r}\cdot\vec{r}'$

$$\Downarrow$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = k' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}' \, \frac{e^{-ik\check{r}\cdot\vec{r}'}}{1 - \frac{\check{r}\cdot\vec{r}'}{r}} \vec{J}(\vec{r}')$$

(V': VOLUMEN FUENTE)

- SITUACION $\lambda \gg d$:

$$e^{-ik\check{r}\cdot\vec{r}'} \simeq 1 - ik\check{r}\cdot\vec{r}' - \frac{k^2(\check{r}\cdot\vec{r}')^2}{2} + \dots$$

$\left(kr' = \frac{2\pi r'}{\lambda} \ll 1\right)$

($kr' = f$(FUENTE y RADIACION))

- PARENTESIS FISICA:

- $kr \sim \frac{d}{\lambda}$

FISICA ATOMICA: $d \sim 1$ Å; $\lambda \sim 10^3 - 10^4$ Å

FISICA NUCLEAR: $d \sim 10^{-5}$ Å; $\lambda \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ Å

$$\frac{e^{-ik\check{r}\cdot\vec{r}'}}{\left(1 - \frac{\check{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)} \simeq 1 + \left(\frac{1}{r} - ik\right)(\check{r}\cdot\vec{r}') + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - k^2\right)(\check{r}\cdot\vec{r}')^2 + \dots$$

$$\downarrow$$

- $$\vec{A}(\vec{r}) = k'\mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}'\, \vec{j}(\vec{r}') \sum_{m=0}^{\infty} C_m (\check{r}\cdot\vec{r}')^m$$

- $$C_m = \frac{(-ik)^m}{m!}\left(1 + \frac{a_1}{ikr} + \dots + \frac{a_m}{(ikr)^m}\right)$$

(a_i: NUMEROS ENTEROS)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{A}_m(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m k' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \int_{V'} d\vec{r}\,' \vec{J}(\vec{r}\,') (\check{r} \cdot \vec{r}\,')^m$$

LOS CAMPOS !

i) ZONA CERCANA $(\lambda \gg r)$

DOMINA EN C_m : $\dfrac{a_m}{(ikr)^m}$

$$\vec{A}_m^{\,i)}(\vec{r}) \simeq k' \mu_0 \frac{a_m}{m!} \frac{1}{r^{m+1}} \int_{V'} d\vec{r}\,' \vec{J}(\vec{r}\,') (\check{r} \cdot \vec{r}\,')^m$$

($kr \ll 1 \Rightarrow e^{ikr} \sim 1 \Rightarrow A_m^{i)}$ NO DEPENDE DE k)

(NO HAY FASE DEPENDIENTE DE r)

* NO HAY COMPORTAMIENTO ONDULATORIO : CUASI ESTATICOS (INDUCCION)

• iii) ZONA LEJANA: $(\lambda \ll r)$

DOMINA EL PRIMER TERMINO EN C_m:

$$\vec{A}_m^{(iii)}(\vec{r}) \approx k'\mu_0 \frac{e^{ikr}}{r} \frac{(-ik)^m}{m!} \int_{V'} d\vec{r}' \, \vec{J}(\vec{r}') \, (\check{r} \cdot \vec{r}')^m$$

INCLUYENDO $e^{-i\omega t}$ $\longrightarrow$ ONDA ESFERICA SALIENTE

• FORMA GENERAL DE LOS CAMPOS:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \vec{A}_m(\vec{r})$$: DESARROLLO MULTIPOLAR

• $\vec{A}_0(\vec{r})$: DIPOLAR ELECTRICA

• $\vec{p} = \int_{V'} d\vec{r}\,'\, \vec{r}\,' \rho(\vec{r}\,')$

$* \; \vec{\nabla}\cdot(\varphi \vec{J}) = \nabla\varphi\cdot\vec{J} + \varphi \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$

CONTINUIDAD $* \; i\omega\rho = \vec{\nabla}\cdot\vec{J}$

$\varphi = r_i$

$\int d\vec{S}\cdot\vec{J}\varphi = 0$

$(\check{n}\cdot\vec{J} = 0$: NORMAL A $\vec{S})$

$$\int_{V'} d\vec{r}\,'\, \vec{r}\,' (\vec{\nabla}\cdot\vec{J}(\vec{r}\,')) = -\int_{V'} d\vec{r}\,'\, \vec{J}(\vec{r}\,')$$

$\downarrow$

• $i\omega\vec{p} = \int_{V'} d\vec{r}\,'\, \vec{J}(\vec{r}\,')$

$\downarrow$

• $$\vec{A}_0(\vec{r}) \equiv \vec{A}_{DE}(\vec{r}) = -i k' \mu_0 c k \vec{p} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$\Downarrow$ CAMPOS

- $\vec{B} = k' \mu_0 c k^2 (\check{r} \wedge \vec{p}) \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \frac{e^{ikr}}{r}$

- $\vec{E} = k' k'' \mu_0 c^2 \left[k^2 (\check{r} \wedge \vec{p}) \wedge \check{r} \frac{e^{ikr}}{r} + (3 \check{r} (\check{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}) \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}\right) e^{ikr} \right]$

($\vec{B} \perp \vec{r}$ PERO $\vec{E}$ TIENE COMPONENTES $\parallel \vec{r}$)

- iii) ZONA LEJANA ($d \ll \lambda \ll r$)

  - $\vec{B} = k' \mu_0 c k^2 (\check{r} \wedge \vec{p}) \frac{e^{ikr}}{r}$
  - $\vec{E} = k'' c \vec{B} \wedge \check{r}$

(AMBOS $\perp \vec{r}$) TRANSVERSALES

i) ZONA CERCANA $(kr \ll 1)$

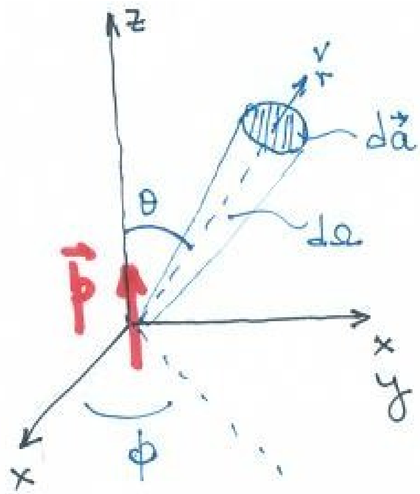
- $\vec{B} = i k' \mu_0 c\, k\, (\check{r} \wedge \vec{p}) \dfrac{1}{r^2}$

- $\vec{E} = k' k'' \mu_0 c^2 \left(3\check{r}(\check{r} \cdot \vec{p}) - \vec{p}\right) \dfrac{1}{r^3}$

- $\vec{E}$ DE UN DIPOLO DE MOMENTO $\vec{p}$
- $\vec{B}$ TIENE FACTOR $kr \ll 1 \Rightarrow$ DOMINA $\vec{E}$
- $\vec{B} \xrightarrow[k \to 0]{} 0$

• POTENCIA RADIADA:

PROMEDIO TEMPORAL DE P A TRAVES DE $d\Omega\ (\check{r})$



- $d\bar{P} = \mathrm{Re}\left\{\vec{S}_c\right\} \cdot \check{r}\ r^2 d\Omega \quad d\Omega$

- $\vec{S}_c = \dfrac{1}{2} \dfrac{1}{4\pi k' \mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B}^*$

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\,\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

$$\downarrow$$

$$d\overline{P} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{4\pi k' \mu_0}\left[\vec{B}\cdot\vec{B}^* - (\vec{B}\cdot\overset{v}{r})(\vec{B}^*\cdot\overset{v}{r})\right] r^2\, d\Omega$$

$$\downarrow$$

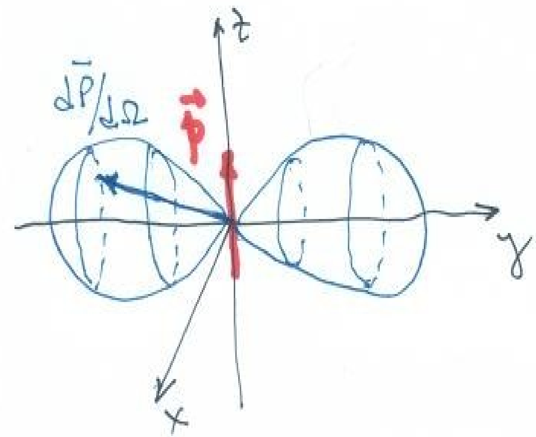
DISTRIBUCION ANGULAR DE LA POTENCIA MEDIA:

- $$\frac{d\vec{\overline{P}}}{d\Omega} = \frac{1}{8\pi}\, k' c^2 k^4 p^2 \sin^2\theta$$

- VARIACION CON k^4 (ω^4)
- DIRECCION MAXIMA POTENCIA $\vec{r} \perp \vec{p}$
- POTENCIA PROMEDIO TOTAL $\overline{P} = \frac{1}{3} k' c^2 k^4 p^2$

IDEA DISTRIBUCION ANGULAR DADA POR $D(\theta,\phi) = \dfrac{d\overline{P}/d\Omega}{\overline{P}} = \dfrac{3}{8\pi}\sin^2\theta$

LOBULO DE RADIACION



- TERMINO SIGUIENTE:

$$\bullet\ \vec{A}_1(\vec{r}) = k' \mu_0 \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int_{V'} d\vec{r}\,'\, \vec{J}(\vec{r}\,')\,(\check{r}\cdot\vec{r}\,')$$

$\downarrow$

SEPARAR $(\check{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{J}$ EN PARTES SIMETRICA Y ANTISIMETRICA EN $\vec{J}$

(VIA $(\vec{a}\cdot b)c = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$)

$$(\check{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{J} = \underbrace{\frac{1}{2}\left((\check{r}\cdot\vec{r}\,')\vec{J} + (\check{r}\cdot\vec{J})\vec{r}\,'\right)}_{S.} + \underbrace{\frac{1}{2}(\vec{r}\,'\wedge\vec{J})\wedge\check{r}}_{A.S.}$$

CUADRUPOLAR ELECTRICO — DIPOLAR MAGNETICO

* IMPORTANTES EN RADIACIONES NUCLEARES

$a \sim 1\,fm$; RAYOS γ: $\lambda \sim 10^{-12}\,cm$ $\rightarrow$ $ka \sim \frac{1}{10}$

ANTENAS

* INTERES PRACTICO DE LA RADIACION

SISTEMAS RADIANTES DE $I(t)$ EN HILOS CONDUCTORES (LARGOS) $\equiv$ ANTENAS:

LONGITUD: L $\qquad$ $I(z)\, e^{i\omega t}$

CONSIDERARA dz COMO DIPOLO ELEMENTAL CON $\vec{p} = I(z)\, e^{i\omega t}\, dz\, \dfrac{\check{z}}{\omega}$

INTEGRANDO: $\Rightarrow \vec{A}(\vec{r})$ EN ZONA DE RADIACION

$$* \quad \frac{dP}{d\Omega} = \frac{k}{\epsilon_0} \frac{I^2}{2\pi c} \left| \frac{\cos\left(\frac{kL}{2}\cos\theta\right) - \cos\left(\frac{kL}{2}\right)}{\operatorname{sen}\theta} \right|^2$$

- θ: DIRECCION DE $\check{r}$ CON RESPECTO A LA ANTENA

$$\begin{cases} kL = \pi & \text{MEDIA ONDA} \\ kL = 2\pi & \text{ONDA COMPLETA} \end{cases}$$