• DISPERSION DE LA PERMITIVIDAD DIELECTRICA

• RELACIONES CONSTITUTIVAS. — NECESARIAS —

PARA CAMPOS DE ONDAS em (ALTA FRECUENCIA) →

* RELACIONES ≠ CASO ESTATICO

NO INSTANTANEAS !

(ESTABLECIMIENTO DE $\vec{P}$ y $\vec{M}$ NO INSTANTANEO)

* CASO ELECTRICO

* $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi k \vec{P}$ GENERAL !

SI $\vec{E}$ Y $\vec{D}$ SE RELACIONAN LINEALMENTE

RELACION CAUSAL (INDEPENDIENTE DE $t=0$) MAS GENERAL

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \epsilon_0 \int_0^\infty f(\tau)\,\vec{E}(t-\tau)\,d\tau$$

SEPARADO POR CONVENIENCIA (NO INCLUIR δ)

- $f(\tau)$ DEPENDE DEL MATERIAL (FINITA PARA TODO τ INCLUIDO $\tau=0$)

$f(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0$ (APRECIABLE PARA TIEMPOS DE RELAJACION DEL MATERIAL)

DEPENDENCIA ARMONICA: $e^{-i\omega t}$

$$\bullet\ \vec{D}(\omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\omega) \vec{E}(\omega)$$

$$\vec{D}(t) = \epsilon_0 \vec{E}(t) + \epsilon_0 \int_0^\infty f(\tau) \vec{E}(t-\tau)\, d\tau$$

$$\rightarrow \qquad \bullet\ \epsilon_r(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

DEPENDENCIA DE $\epsilon_r(\omega)$ $\equiv$ LEY DE DISPERSION DEL MEDIO

EN GENERAL COMPLEJA

$$\bullet\ \epsilon_r(\omega) = \epsilon_{r_R}(\omega) + i\, \epsilon_{r_I}(\omega)$$

LA DEFINICION $\Longrightarrow$ $\bullet\ \epsilon_r(-\omega) = [\epsilon_r(\omega)]^*$ $\qquad$ (ω REAL)

$\Downarrow$ RELACIONES DE CRUCE $\bullet \begin{cases} \epsilon_{r_R}(-\omega) = \epsilon_{r_R}(\omega) \\ \epsilon_{r_I}(-\omega) = -\epsilon_{r_I}(\omega) \end{cases}$

- $\omega \to 0 \Rightarrow \epsilon_r(0) = \epsilon_r$ (ESTATICA)
- $\omega \to \infty \Rightarrow \epsilon_r(\infty) \to \epsilon_r^{\text{VACIO}} = 1$

(PROCESO DE POLARIZACION NO TIENE TIEMPO DE OCURRIR)

'INDECISION' $\rightarrow$ $\langle \text{EFECTOS} \rangle_t = 0$

* MODELO MEJORADO: DE DIELECTRICO:

$$\vec{P}_\omega = \frac{n_0 e^2/m}{(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \vec{E}_\omega \underset{\omega \gg \omega_0}{\Longrightarrow} \vec{P}_\omega = -\frac{n_0 e^2}{m\omega^2} \vec{E}_\omega$$

- $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + 4\pi K \vec{P}$

$$\longrightarrow \lim_{\omega \to \infty} \epsilon_r(\omega) = 1 - \frac{4\pi K}{\epsilon_0} \cdot \frac{n_0 e^2}{m\omega^2}$$

VALIDA PARA UV LEJANO (ELEMENTOS LIVIANOS)

" " RAYOS X (" PESADOS)

PROPIEDADES DE $\epsilon_r(\omega)$

CONVIENE EXTENDER A • $\omega = \omega_R + i\,\omega_I$

$\Longrightarrow$ ESTUDIAR $\epsilon_r(\omega)$ EN EL SEMIPLANO SUPERIOR DE $\mathbb{C}$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau)\, e^{i\omega\tau}\, d\tau$$

$\downarrow$

ES UNIFORME Y REGULAR EN EL S.S. DE $\mathbb{C}$ YA QUE

• $e^{i\omega\tau} = e^{i\omega_R\tau}\, e^{-\omega_I\tau}$ $(\tau > 0)$ (CAUSALIDAD)

$\downarrow$

$$\epsilon_r(-\omega^*) = [\epsilon_r(\omega)]^* \Rightarrow \epsilon_r(i\omega_I) = [\epsilon_r(i\omega_I)]^*$$

$\downarrow$

✱ $\epsilon_r(\omega)$ REAL EN EL EJE IMAGINARIO DE $\mathbb{C}$

$\Downarrow$

• $\vec{D}$ TOMA VALORES REALES PARA $\vec{E}$ REAL

TERMODINÁMICA (ABSORCIÓN DE ONDAS em EN DIELÉCTRICOS) $\Rightarrow$

$*$ $\mathrm{Im}\, \epsilon_{r_I}(\omega) > 0$ PARA ω REAL > 0

$\downarrow$

- $\epsilon_{r_I}(\omega) \gtrless 0$ PARA $\omega = \omega_R \gtrless 0$

$\downarrow$

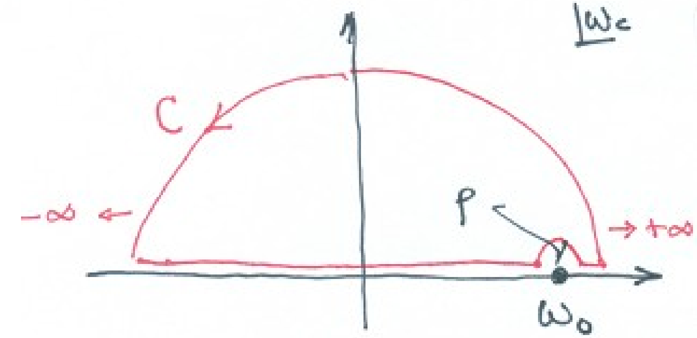
- ϵ_{r_I} SOLO SE ANULA EN EL EJE REAL PARA $\omega = 0$

- RESUMEN: $\epsilon_r(\omega)$ ES REAL SOLO EN EL EJE IMAGINARIO DE $\boxed{\omega_c}$

(DONDE VA DE $\epsilon_r(\omega=0)$ HASTA 1 PARA $\omega \to \infty$)

(NO TIENE CEROS EN EL SEMIPLANO SUPERIOR DE $\boxed{\omega_c}$)

* RELACIONAMOS $\epsilon_{r_R}(\omega)$ CON $\epsilon_{r_I}(\omega)$



DADO ω_0 REAL INTEGRAMOS $\dfrac{\epsilon_r(\omega)-1}{\omega-\omega_0}$

$\epsilon_r(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 1 \Rightarrow$ INTEGRAL CONVERGE

NO HAY POLOS

$\Downarrow \quad \oint = 0 \quad$ Y $\quad \int_{\text{SEMICIRCULO}} = 0 \quad \Rightarrow$

$$\lim_{\rho\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{\omega_0-\rho}\frac{\epsilon_r(\omega)-1}{(\omega-\omega_0)}\,d\omega+\int_{\omega_0+\rho}^{+\infty}\frac{\epsilon_r(\omega)-1}{(\omega-\omega_0)}\,d\omega\right\}-i\pi\left[\epsilon_r(\omega_0)-1\right]=0$$

¡O

• $$\mathcal{VP}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon_r(\omega)-1}{\omega-\omega_0}\,d\omega - i\pi\left[\epsilon_r(\omega_0)-1\right]=0$$

TOMANDO PARTE REAL E IMAGINARIA $\Rightarrow$

* RELACIONES DE KRAMERS - KRÖNIG

$$\begin{cases} \epsilon_{r_R}(\omega)-1 = \dfrac{1}{\pi}\,\mathcal{VP}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\epsilon_{r_I}(x)}{x-\omega}\,dx \\[2ex] \epsilon_{r_I}(\omega) = -\dfrac{1}{\pi}\,\mathcal{VP}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[\epsilon_{r_R}(x)-1\right]}{x-\omega}\,dx \end{cases}$$

* $\epsilon_{r_R}(\omega)$ y $\epsilon_{r_I}(\omega)$: TRANSFORMADAS DE HILBERT UNA DE OTRA

$\uparrow$

CAUSALIDAD (REGULARIDAD DE $\epsilon_r(\omega)$)

CASO PARTICULAR DEL TEOREMA DE TICHMARSH

ECUACION DE ONDA INHOMOGENEA

POTENCIALES ELECTROMAGNETICOS

MAXWELL CON FUENTES $\left(\rho(\vec{r},t), \vec{J}(\vec{r},t)\right)$ $\qquad t \Rightarrow \vec{E} \neq -\vec{\nabla}\Phi$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A}$$

POTENCIAL VECTOR

FARADAY $\Rightarrow$ • $\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = -k'' \vec{\nabla}\wedge\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ $\Rightarrow$ • $\vec{E} + k''\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\Phi$

RESUMEN: •
$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi - k''\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla}\wedge\vec{A} \end{cases}$$

* PAGINA 2 DE PANOFSKY - PHILLIPS : DEFINICION CAMPO VECTORIAL

"TODO CAMPO VECTORIAL EN D=3 CUYAS FUENTES SE ANULAN EN INFINITO QUEDA DEFINIDO UNIVOCAMENTE DANDO SU ROTOR Y SU DIVERGENCIA EN TODOS LOS PUNTOS DEL ESPACIO"

$\downarrow$

- ARBITRARIEDAD EN LA CARACTERIZACIÓN DE $\vec{A}(\vec{r},t)$ •

- $\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = ?$

$\downarrow$

SIMETRIA DE GAUGE DEL em

(BASE DE LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA)

- TRANSFORMACIONES DE GAUGE •
$$\begin{cases} \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\psi \\ \Phi \to \Phi' = \Phi - k'' \dfrac{\partial \psi}{\partial t} \end{cases}$$

* $\vec{A}'$ y Φ' REPRESENTAN IGUALES $\vec{E}$ y $\vec{B}$ QUE $\vec{A}$ y Φ

MAXWELL $\Rightarrow$ $\vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})$

- $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}.\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} = 4\pi K' \mu_0\mu_r \vec{J} - \frac{\epsilon_0\epsilon_r\mu_0\mu_r K'}{K}\left[\vec{\nabla}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + K''\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}\right]$
- $\nabla^2\Phi + K''\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}.\vec{A} = -\frac{4\pi K}{\epsilon_0\epsilon_r}\rho$

ARBITRARIEDAD DE $\vec{\nabla}.\vec{A}$ PERMITE DESACOPLAR

- FIJAR $\vec{\nabla}.\vec{A}$ $\equiv$ FIJAR EL GAUGE

- GAUGE DE COULOMB

- $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

$\Downarrow$

- $\nabla^2\Phi = -\frac{4\pi K}{\epsilon_0\epsilon_r}\rho$ (POISSON)

$\Phi(\vec{r},t) = \frac{K}{\epsilon_0\epsilon_r}\int\frac{\rho(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}dr'$ $\Rightarrow$ $\vec{E} \underset{r\to\infty}{\sim} \frac{1}{r^2}$

$\Rightarrow \vec{E} \underset{r\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{r^2}$ PERO RADIACION $\Rightarrow \sim \dfrac{1}{r}$

- EN EL REGIMEN DE RADIACION VALE PONER $\Phi = 0$

GAUGE DE RADIACION $\begin{cases} \vec{\nabla}.\vec{A} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}$

* TAMBIEN LLAMADO GAUGE TRANSVERSAL $(\vec{\nabla}.\vec{A} = 0)$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \vec{E} = -k'' \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \end{cases}$$

GAUGE DE LORENTZ

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \frac{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r k'}{k}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -4\pi k' \mu_0 \mu_r \vec{J} \\[2ex] \nabla^2 \Phi - \dfrac{1}{v^2}\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\dfrac{4\pi k}{\epsilon_0 \epsilon_r}\rho \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{k}{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r k' k''}\right)^{1/2}$$

RESTA ARBITRARIEDAD! LORENTZ SIGUE VALIDO SI SE HACE OTRA TRANSFORMACION DE GAUGE CON ψ TAL QUE

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

(¡SIMETRIA BRST)

* FUNCION DE GREEN DEL D'ALAMBERTIANO

$\epsilon_r = \mu_r = 1 \Longrightarrow \bullet \ \frac{1}{c^2} = \frac{K' \mu_0 K''}{K/\epsilon_0}$

NOTACION TETRADIMENSIONAL: x_μ , $\mu = 1,2,3,4$

- $x_\mu \equiv (x_1 = x ; x_2 = y ; x_3 = z ; x_4 = ict)$
- $A_\mu \equiv (K'' c \vec{A} ; A_4 = i\phi)$
- $J_\mu \equiv (\vec{J} ; J_4 = ic\rho)$

– EN GAUGE DE LORENTZ: $\bullet \ \nabla^2 A_\mu + \frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_4^2} = -\frac{4\pi K}{\epsilon_0 c} J_\mu$

* D'ALAMBERTIANO: $\bullet \ \Box^2 \cdot \equiv \nabla^2 \cdot + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_4^2}$

$$\Box^2 A_\mu = -\frac{4\pi K}{\epsilon_0 c} J_\mu \ ; \quad \mu = 1,2,3,4$$

(POISSON EN EL ESPACIO DE MINKOWSKI)

Def: • $x_0 = ct$ $\quad (x_4 = i x_0)$

$\downarrow$

$x_\mu \equiv (x_1, x_2, x_3, i x_0)$

• $\square^2 \cdot = \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 \cdot}{\partial x_0^2}$

* SOLUCION PARA A_μ VIA GREEN:

• $\square^2 g(x, x') = -4\pi \delta^4 (x - x')$

• $\delta^4(x) \equiv \delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)\delta(x_0)$

DEF: TETRAVECTOR DE ONDA

• $k_\mu \equiv (k_1, k_2, k_3, i k_0)$; • $k_0 = \frac{\omega}{c}$

* FOURIER:

• $\delta^4(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i k.(x - x')} d^4 k$

• $g(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} G(k)\, e^{i k.(x - x')} d^4 k$

• $k.x \equiv k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 - k_0 x_0$ • $a.b = \vec{a}.\vec{b} - a_0 b_0$

↓ EN EL ESPACIO $\underline{|k}$ • $G(k) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{k\cdot k}$

↓

$$g(x-x') = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ik\cdot(x-x')}}{k\cdot k}\,d^4k$$

⇓

$$g(x-x') = \frac{1}{4\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\,d^3k \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ik_0(x_0-x_0')}}{k^2-k_0^2}\,dk_0$$

• $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\vec{k}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2-k_0^2}\,d^3k = 2\pi^2\,\frac{e^{\pm ik_0|\vec{r}-r'|}}{|\vec{r}-r'|}$$

$\pm$: REGULARIZANDO LA SINGULARIDAD (CEROS DEL DENOMINADOR)

VIA $k_0 \pm i0$

2 FUNCIONES DE GREEN !

- $g^{A}(x-x')$ (AVANZADA)
- $g^{R}(x-x')$ (RETARDADA)

- $$g^{A}(x-x') = \frac{1}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0[(x_0-x'_0)+|\vec{r}-\vec{r}'|]}\,dk_0$$

- $$g^{R}(x-x') = \frac{1}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_0[(x_0-x'_0)-|\vec{r}-\vec{r}'|]}\,dk_0$$

RECORDANDO $\delta(x)$:

- $$g^{A}(x-x') = \frac{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|+(x_0-x'_0)]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

- $$g^{R}(x-x') = \frac{\delta[|\vec{r}-\vec{r}'|-(x_0-x'_0)]}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$$

$\longrightarrow$

- $$A^{A}_{\mu} = \frac{K}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^{A}$$

- $$A^{R}_{\mu} = \frac{K}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^{R}$$

* RETARDADA !

- $A^R_\mu = \dfrac{K}{\epsilon_0 c} J_\mu \otimes g^R$

- $A^R_\mu(\vec{r},t) = \dfrac{K}{\epsilon_0 c}\displaystyle\int \dfrac{d^3r'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\int J_\mu(\vec{r}',t)\,\delta\left[|\vec{r}-\vec{r}'| - c(t-t')\right]\,d(ct')$

$\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x) \Rightarrow$

- $A^R_\mu(\vec{r},t) = \dfrac{K}{\epsilon_0 c}\displaystyle\int d^3r' \,\dfrac{J_\mu\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(TEOREMA DE LOS POTENCIALES RETARDADOS)

- $\vec{A}^R(\vec{r},t) = k'\mu_0\displaystyle\int d^3r' \,\dfrac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

- $\phi^R(\vec{r},t) = \dfrac{K}{\epsilon_0}\displaystyle\int d^3r' \,\dfrac{\rho\left(\vec{r}', t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

(PUNTO CAMPO)

POTENCIALES EN $\vec{r}$ EN EL TIEMPO t DEPENDEN DE LA DISTRIBUCION DE LAS FUENTES EN $\vec{r}'$ EN EL t' ANTERIOR $= t - |\vec{r}-\vec{r}'|/c$

PUNTO FUENTE

CAUSALIDAD !

ESFERA COLECTORA DE INFORMACION CAUSAL