ELECTRO II: 2024

EXPERIMENTOS + FORMALIZACION + TIEMPO (t)

(COHERENTE Y SIMPLE)

+ MAXWELL

ECUACIONES DE

1 • $\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -K'' \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

2 • $\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi K' \left(\vec{J} + \dfrac{1}{4\pi K} \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$

3 • $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 4\pi K \rho$

4 • $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

• K, K', K'' : DEPENDEN DEL SISTEMA DE UNIDADES

GOBIERNAN LOCALMENTE LOS FENOMENOS ELECTROMAGNETICOS

$\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}, \vec{J}$: 5 VECTORES $\Rightarrow$ 15 $f(x, y, z, t)$

POCAS ECUACIONES !

↓

IMPLEMENTAR RELACIONES ENTRE VECTORES

(MATERIA AYUDA)

$\Downarrow$

RELACIONES CONSTITUTIVAS

- $\vec{D} = f_D(\vec{E})$
- $\vec{B} = f_B(\vec{H})$
- $\vec{J} = f_J(\vec{E})$

$f_i = f_i(\text{MATERIAL})$

MATERIALES LINEALES E ISOTROPOS:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

[ϵ_r, μ_r : RELATIVAS AL VACIO]

LEY DE OHM $\quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$

$$\vec{E}, \vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$$

SON CAMPOS "MACROSCOPICOS"
(PROMEDIOS ESPACIALES LOS DE ORIGEN ATOMICO)

REGIONES >> DIMENSIONES ATOMICAS
< SISTEMA CONSIDERADO

$\vec{\nabla}\cdot(2) \Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

CONTINUIDAD

CONSERVACION LOCAL DE LA CARGA ELECTRICA

TENSOR DE MAXWELL

CAMPO: (ELECTROSTATICA) IMAGEN QUE PERMITE INTERPRETAR LA ACCION A DISTANCIA

MAXWELL: DOTAR DE MAYOR REALIDAD FISICA AL CONCEPTO DE CAMPO DE FUERZAS. INCLUIDA LA ELECTROSTATICA

↓

TEORIA PURA DE CAMPOS PARA DETERMINAR LA FUERZA SOBRE UN VOLUMEN CARGADO

↓

TENSOR DE ESFUERZOS DE MAXWELL

$$* \ \vec{F}_2 = \int_{V_2} \rho_2 \vec{E}_1 \, dV$$

$$\left(\int_{V_2} \rho_2 \vec{E}_2 \, dV = 0 \right)$$

(FUERZAS INTERNAS SE CANCELAN)

$$\downarrow$$

$$* \ \vec{F} = \int_V \rho \vec{E} \, dV$$

$$\left(\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \right)$$

- $\rho \vec{E}$: DENSIDAD VOLUMETRICA DE FUERZA

- $$F_i = \frac{\epsilon_0}{4\pi K} \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, E_i \, dV$$

• $F_i = \frac{\epsilon_0}{4\pi K}\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\, E_i\, dV$

• $F_i = \underbrace{\frac{\epsilon_0}{4\pi K}\int_V \vec{\nabla}(E_i\vec{E})\, dV}_{G.O.} - \frac{\epsilon_0}{4\pi K}\int \vec{E}\cdot\vec{\nabla}E_i\, dV$

$\int_\Sigma E_i\vec{E}\cdot d\vec{a}$

$\vec{\nabla}\wedge\vec{E} = 0$ (ELECTROSTATICO) $\Rightarrow$ • $\frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \frac{\partial E_j}{\partial x_i}$

• $\vec{E}\cdot\vec{\nabla}E_i = \sum_{j=1}^{3} E_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{3} E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}E^2$

$\Rightarrow$ ✱ $F_i = \sum_{j=1}^{3}\int_\Sigma T_{ij}\, da_j$ ✱ $T_{ij} = \frac{\epsilon_0}{4\pi K}\left[E_i E_j - \frac{1}{2}E^2\delta_{ij}\right]$

TENSOR DE MAXWELL

* $$T_{ij} = \frac{\epsilon_0}{4\pi K}\left[E_i E_j - \frac{1}{2} E^2 \delta_{ij}\right]$$

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{(SIMETRICO)}$$

DIAGONALIZABLE ⇒ 3 COMPONENTES IND.

DETERMINANTE SECULAR

$$|T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\epsilon_0}{4\pi K}\dfrac{E^2}{2} \\ \underbrace{\lambda_2 = \lambda_3}_{} = -\dfrac{\epsilon_0}{4\pi K}\dfrac{E^2}{2} \end{cases}$$

DEGENERACION ⇒ EJE DE SIMETRIA

EJE PRINCIPAL $(\lambda_1) \parallel \vec{E}$

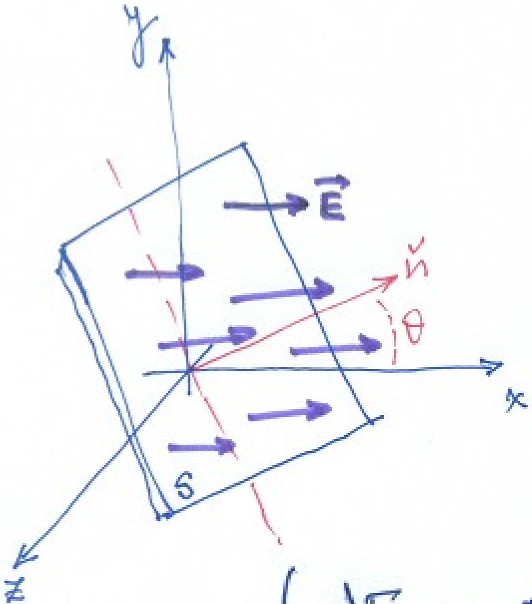
FUERZAS TRANSMITIDAS SEGUN LOS EJES

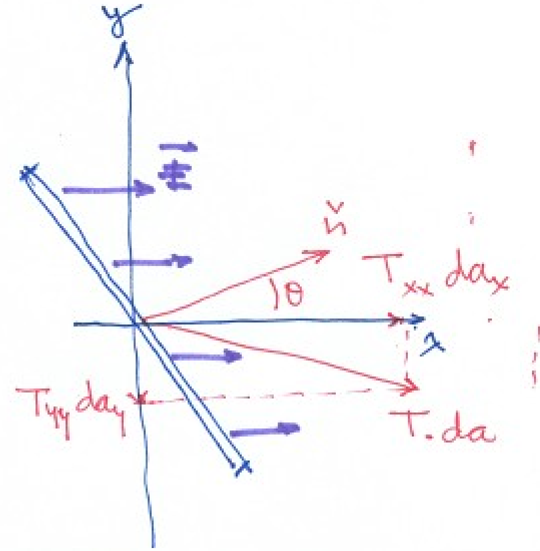
$$\begin{cases} dF^{(1)} = \lambda_1(\epsilon)\, da^{(1)} \\ dF^{(2)} = d\vec{F}^{(3)} = \lambda_2(\vec{\epsilon})\, da^{(2)} \end{cases}$$

⇓

- CAMPO ELECTRICO: TRANSMITE TENSION $\lambda_1 \parallel \vec{E}$

  TRANSMITE CONTRACCIONES EN PLANO $\perp \vec{E}$





$$\begin{cases} dF_x \propto E^2 \cos\theta \, da \\ dF_y \propto -E^2 \operatorname{sen}\theta \, da \end{cases}$$

- $\vec{E}$ BISECTOR DEL ANGULO $(\check{n}, \vec{F})$

$\vec{E} \parallel S$: PRESION CONTRA S

$\vec{E} \parallel \check{n}$: PRESION "NEGATIVA"

- CONSERVACION DE LA ENERGIA

(TEOREMA DE POYNTING)

- ϵ_r y μ_r : CONSTANTES REALES (MEDIO NO DISPERSIVO)

$$u_{em} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{K}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{K''}{K'}\vec{H}\cdot\vec{B}\right]$$

VECTOR DE POYNTING

$$\vec{S} = \frac{1}{4\pi K'}\vec{E}\times\vec{H}$$

CONSERVACION :

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V u_{em}\, dv + \int_V \vec{E}\cdot\vec{j}\, dv + \int_{\Sigma_V} \vec{S}\cdot d\vec{a} = 0$$

NO CONDUCTORES EN LA REGION $\Rightarrow$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = 0$$

CONTINUIDAD

- CONSERVACION DEL IMPULSO LINEAL:

- $$\vec{p}_{em} = \frac{K''}{4\pi K} \int_V (\vec{D} \wedge \vec{B})\, dv = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{S}\, dv$$

- CONSERVACION DEL IMPULSO ANGULAR:

- $$\vec{m}_{em} = \frac{K''}{4\pi K} \int_V \vec{r} \wedge (\vec{D} \wedge \vec{B})\, dv = \frac{1}{c^2} \int_V \vec{r} \wedge \vec{S}\, dv$$

ONDAS

- ONDA ≡ SOLUCION DE

$$\nabla^2 \psi(\vec{r},t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \psi(\vec{r},t)}{\partial t^2} = 0$$

ψ (ESCALAR) $\Rightarrow$ ONDA LONGITUDINAL

$$\vec{\psi} = \vec{F}(\vec{r},t) \begin{cases} \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0 & \text{LONGITUDINAL} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 & \text{TRANSVERSAL} \end{cases}$$

EN GENERAL $\vec{F} = \vec{F}_t + \vec{F}_l$

ONDAS ELECTROMAGNETICAS

$\vec{\nabla} \wedge (1)$ y $\vec{\nabla} \wedge (2)$ + POEMA VECTORIAL

($\mu_r, \epsilon_r, \sigma$ CONSTANTES)
($\rho = 0$)

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{k' k''}{k} \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \underbrace{4\pi k' k'' \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{\text{DISIPACION (TIPO FOURIER)}} = 0$$

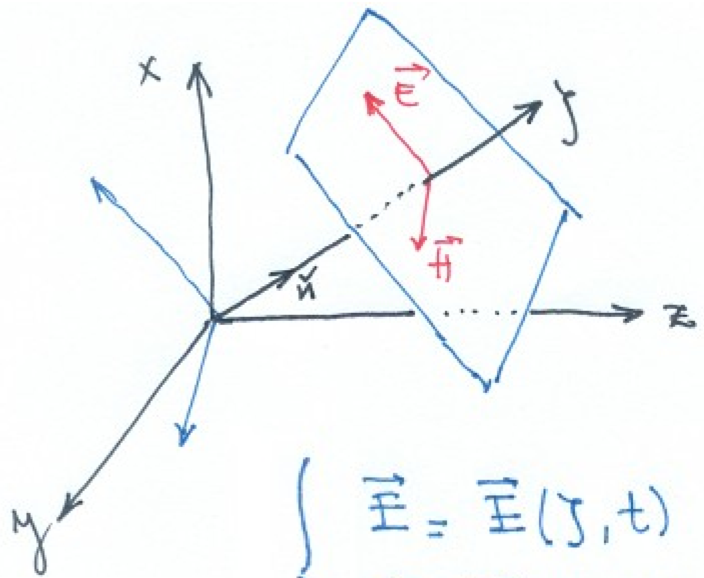
$$\vec{H} \qquad \vec{H} \qquad \vec{H} = 0$$

$$v = \left(\frac{k/(\epsilon_0 \epsilon_r)}{k' \mu_0 \mu_r k''} \right)^{1/2}$$

$\sigma = 0 \rightarrow$ ECUACIONES HOMOGENEAS

VACIO $\rightarrow$ $\left[\frac{k}{\epsilon_0 \mu_0 k' k''} \right] = [v]^2$ • $c = \sqrt{\frac{k/\epsilon_0}{k' \mu_0 k''}} = 299792458 \frac{m}{seg}$

• ONDAS PLANAS (IDEALIZACION)



ζ : DIRECCION ESPACIAL DADA POR $\check{n} \equiv (n_x, n_y, n_z)$

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}(\zeta, t) \\ \vec{H} = \vec{H}(\zeta, t) \end{cases}$$

ζ CONSTANTE (PLANO) $\Rightarrow$ $\vec{E}$ y $\vec{H}$ ALLÍ CONSTANTES

$\vec{\nabla} \cdot = \check{n} \dfrac{\partial}{\partial \zeta}$ + MAXWELL

• $$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - 4\pi K' K'' \mu_0 \mu_r \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$$

$\vec{H}$ $\vec{H}$ $\vec{H}$

(ECUACION DEL TELEGRAFISTA)

- $\check{n} \cdot d\vec{H} = 0 \Rightarrow H_\zeta$ NO VARIA CON ζ NI CON t

ELEGIR $H_\zeta = 0$

- $\vec{H}$ DE ONDA PLANA YACE EN PLANO PERPENDICULAR A $\check{n}$

(DIRECCION DE PROPAGACION)

- $$\check{n} \cdot \left(d\vec{E} + \frac{4\pi K \sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \vec{E}\, dt \right) = 0$$

$$\downarrow$$

$$E_\zeta = E_\zeta(t=0)\, e^{-t/\tau}$$

SE ANULA EXPONENCIALMENTE SI $\sigma \neq 0$

($\sigma = 0 \rightarrow E_\zeta$ CONSTANTE $= 0$)

- $\vec{E}$ DE ONDA PLANA YACE EN PLANO $\perp \check{n}$

— ONDAS PLANAS SON TRANSVERSALES —

INDICE DE REFRACCION $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

$$\vec{E}(\zeta, t) = E_0 \, e^{i(\omega t \pm k \zeta)}$$

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad ; \quad \vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \check{n}$$

- $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ DEFINEN TERNA ORTOGONAL DERECHA

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega k'' \mu_0 \mu_r} \vec{k} \wedge \vec{E}$$

$\vec{S}$ COMPLEJO

DEPENDENCIA EXPONENCIAL + SIMPLE QUE SENOS Y/O COSENOS

PERO CAMPOS SON REALES!
(COS + SEN)

$\vec{E}$ y $\vec{H}$ COMPLEJOS ➡ $\vec{S} = \frac{1}{4\pi K'} \vec{E} \wedge \vec{H}$ COMPLEJO

* ¡OJO!

PARTE REAL DE $\vec{S}$ $\neq$ PRODUCTO VECTORIAL DE PARTES REALES DE $\vec{E}$ y $\vec{H}$
(O IMAGINARIAS)

PERO EN GENERAL INTERESA EL PROMEDIO TEMPORAL DE $\vec{S}$
(TIENE SENTIDO LA MEDIA EN EL TIEMPO DEL $\underbrace{\text{FLUJO DE ENERGÍA}}_{\vec{S}}$)

$$\langle \vec{S} \rangle_t \sim \vec{S}_R$$ (TEOREMA)

- DEFINICION: $\vec{S}$ COMPLEJO ($\vec{S}_c$)

$$* \quad \vec{S}_c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi K'}\left(\vec{E}\wedge\vec{H}^*\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\sim e^{i\omega t}\\ \vec{b}\sim e^{i\omega t}\end{array}\right\} \langle Re\,\vec{a}\,.\,Re\,\vec{b}\rangle_t = \frac{1}{2}Re\left(\vec{a}.\vec{b}^*\right) = \frac{1}{2}Re\left(\vec{a}^*.\vec{b}\right)$$

ONDA PLANA:

$$\vec{S}_c = \frac{1}{2}\frac{1}{4\pi K'}\frac{1}{\omega K''\mu_0\mu_r}\vec{E}\wedge\left(\vec{k}\wedge\vec{E}^*\right) = \frac{1}{8\pi\,\omega K' K''\mu_0\mu_r}|\vec{E}|^2\vec{k}$$

$\vec{k} = k\check{n}$

$$\langle u_{em}\rangle_t = \frac{1}{2}Re\left\{\frac{1}{8\pi}\left[\frac{1}{K}\vec{E}.\vec{D}^* + \frac{K''}{K'}\vec{H}.\vec{B}^*\right]\right\} = \frac{1}{8\pi}\frac{\epsilon_0\epsilon_r}{K}|\vec{E}|^2$$

$$* \quad Re\,\vec{S}_c = \langle u_{em}\rangle_t\, v\, \check{n} \quad *$$

$$[Re\,\vec{S}_c] = \frac{[\text{ENERGIA}]}{[\text{VOL}]}\frac{[l]}{[t]} = \frac{[\text{ENERGIA}]}{[\text{AREA}][t]}$$

VELOCIDAD DE GRUPO

ONDA MONOCROMATICA (1ω) : IDEAL

PERO MAXWELL LINEALES → PRINCIPIO DE SUPERPOSICION

↓

PAQUETES DE ONDAS

(DIFERENTES ω)

ONDAS EN MEDIOS DISPERSIVOS → DIFERENTE REACCION A DIFERENTES ω !

(DISIPATIVOS)

DISPERSION

• $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega) \rightarrow n = n(\omega)$ (INDICE DE REFRACCION)

↓ VELOCIDAD DE PROPAGACION CAMBIA CON ω → DEFORMACION DEL PAQUETE

→ VELOCIDAD DEL FLUJO DE ENERGIA ≠ VELOCIDAD DE FASE

$\omega = \omega(\vec{k})$ $\quad \omega = \omega(k)$ SUAVE PERO A VECES ANOMALA

DISPERSION (SIN DISIPACION)

PAQUETE: (FOURIER)

$$\bullet\ \psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i[kx - \omega(k)t]}\, dk$$

* $A(k)$: ANTITRANSFORMADA DE ψ A TIEMPO DE INGRESO $(t=0)$

$$\bullet\ A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,0)\, e^{-ikx}\, dx$$

DISTRIBUCION GAUSSIANA $\Rightarrow$ $\Delta x\, \Delta k \geq \frac{1}{2}$

(DESVIACIONES MEDIAS CUADRATICAS)

* VELOCIDAD DEL PAQUETE ?

(CADA COMPONENTE VIAJA CON UNA VELOCIDAD PROPIA)

PAQUETE ANGOSTO: $\underline{\Delta k}$ PEQUEÑO Y CENTRADO EN $\underline{k_0}$

$$\omega(k) \approx \omega(k_0) + \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_0 (k-k_0) = \omega_0 + \omega_0' (k-k_0)$$

$$\psi(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(k_0\omega_0' - \omega_0)t} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\, e^{i(x-\omega_0' t)k}\, dk}_{\psi(x',0)}$$

$(x' = x - \omega_0' t)$

- $\psi(x,t) \approx \psi(x',0)\, e^{i(k_0\omega_0' - \omega_0)t}$

→ Δk PEQUEÑO → $\psi(x,t)$ SURGE DEL PULSO EN $(x - \omega_0' t)$

DE DONDE SE PROPAGO CON

- $v_g = \omega_0' = \left.\dfrac{d\omega}{dk}\right|_0$ VELOCIDAD DE GRUPO (DE TRANSPORTE DE ENERGIA)

$$\omega(k) = \frac{c\,k}{n(k)}$$

VELOCIDAD DE FASE DE CADA COMPONENTE

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k} = \frac{c}{k}$$

SI $n(k) < 1 \Rightarrow v_f > c$ (RELATIVIDAD ?)

PERO IMPORTA

$$* \; v_g = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}} \quad (< c)$$

DISPERSION ANOMALA $\frac{dn}{d\omega} < 0$ Y GRANDE

NO VALE LA APROXIMACION !