Problema 1. Sea una corriente estacionaria I que circula por una espira conductora circular de radio a y de sección despreciable. a) Dé una expresión para el vector densidad de corriente. b) Determine el campo magnético generado por la corriente en los siguientes casos:

i) En el centro de la circunferencia.

ii) Cerca de la corriente ($|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll a$ para algún $\mathbf{r}'$ sobre el alambre).

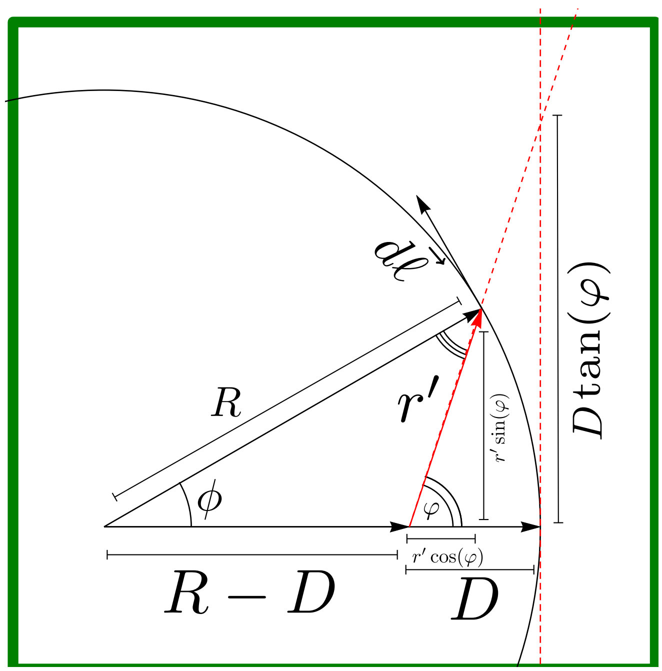
iii) A distancias grandes del centro de la circunferencia ($|\mathbf{r}| \gg a$).

c) Repita los cálculos para una espira cuadrada de lado $2a$.

Solución

Para calcular cerca del centro de la circunferencia, notamos que $|\vec{r} - \vec{r}'| \approx R$ y $d\vec{l} \times \hat{r} \approx Rd\phi\vec{k}$, de manera que remplazando, $\vec{B} \approx \frac{\mu_0 I}{2 \; R}\hat{k}$

Para $\vec{r}$ cercano a al corriente, conviene parametrizar la curva de acuerdo a la figura:



aquí, vemos que se satisface $R^2 = ((R - D) + r' \cos(\varphi))^2 + (r')^2 \sin(\varphi)^2$ y $r' \sin(\varphi) = R \sin(\phi)$. Despejando obtenemos

$$r' = |(R - D)\cos(\varphi)| \left(\sqrt{1 + D\frac{2R - D}{(R - D)^2 \cos^2(\varphi)}} - \frac{\cos(\varphi)}{|\cos(\varphi)|} \right) \approx D/\cos(\varphi)$$

y

$$\sin(\phi) = r'/R \sin(\varphi)$$

De esta manera,

$$\vec{r} - \vec{r}' = -r'(\cos(\varphi)\hat{i} + \sin(\varphi)\hat{j}) \approx -D(\hat{i} + \tan(\varphi)\hat{j})$$

y

$$d\vec{l} = \frac{d\vec{r}'}{d\varphi} d\varphi \approx \frac{\check{j}}{\cos^2(\varphi)}$$

. finalmente,

$$\vec{B} \approx \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\cos(\varphi)\frac{D}{\cos^2(\varphi)}}{D^2/\cos^2(\varphi)} \hat{k} d\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi D}\hat{k}$$

Integrando en $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$

Finalmente, para calcular el campo lejos de la espira, desarrollamos

$$|r - r'|^{-3} \approx r^{-1}(1 + 3\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}'}{r} + \ldots)$$

y

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(I_0 \oint d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') + 3I_0 \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}')(d\vec{r}' \times \hat{r})\right)$$

La primer integral dentro del paréntesis tiene dos términos. El primero es de la forma $(\oint d\vec{r}') \times \vec{r} = 0$, ya que la integral es sobre un camino cerrado. El segundo término puede escribirse en términos de

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\oint I_0 \vec{r}' \times d\vec{r}'$$

que es una cantidad independiente de $\vec{r}$, y por lo tanto es una propiedad de la distribución de corriente, conocida como Momento Dipolar Magnético.

Para calcular la segunda integral, observamos que

$$\begin{aligned}
(\hat{r} \cdot \vec{r}')d\vec{r}' \times \hat{r} &= \vec{r}' \times ((d\vec{r}' \times \hat{r}) \times \hat{r}) + (\vec{r}' \cdot (d\vec{r}' \times \hat{r}))\hat{r} && (1)\\
&= \vec{r}' \times (\hat{r} \times (\hat{r} \times d\vec{r}')) + (\hat{r} \cdot (\vec{r}' \times d\vec{r}'))\hat{r} && (2)\\
&= (\hat{r} \cdot d\vec{r}')\vec{r}' \times \hat{r} - \vec{r}' \times d\vec{r}' + (\hat{r} \cdot (\vec{r}' \times d\vec{r}'))\hat{r} && (3)\\
&= d((\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{r}' \times \hat{r}) - (\hat{r} \cdot \vec{r}')d\vec{r}' \times \hat{r} - \vec{r}' \times d\vec{r}' + (\hat{r} \cdot (\vec{r}' \times d\vec{r}'))\hat{r} && (4)\\
2(\hat{r} \cdot \vec{r}')d\vec{r}' \times \hat{r} &= d((\hat{r} \cdot \vec{r}')\vec{r}' \times \hat{r}) - \vec{r}' \times d\vec{r}' + (\hat{r} \cdot (\vec{r}' \times d\vec{r}'))\hat{r} && (5)
\end{aligned}$$

De esta manera,

$$I_0 \oint (\hat{r} \cdot \vec{r}')d\vec{r}' \times \hat{r} = -\oint \frac{\vec{r}' \times d\vec{r}'}{2} + \oint \frac{(\hat{r} \cdot (\vec{r}' \times d\vec{r}'))\hat{r}}{2} = -\vec{m} + \hat{r} \cdot \vec{m}\hat{r}$$

y por lo tanto,

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(2\vec{m} + 3(-\vec{m} + \hat{r} \cdot \vec{m}\hat{r})\right) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\hat{r} \cdot \vec{m})\hat{r} - \vec{m}\right)$$

que es exactamente la forma del campo de un dipolo eléctrico, pero con el momento dipolar magnético en lugar del eléctrico.
