Operadores diferenciales en coordenadas ortogonales

Mauricio Matera

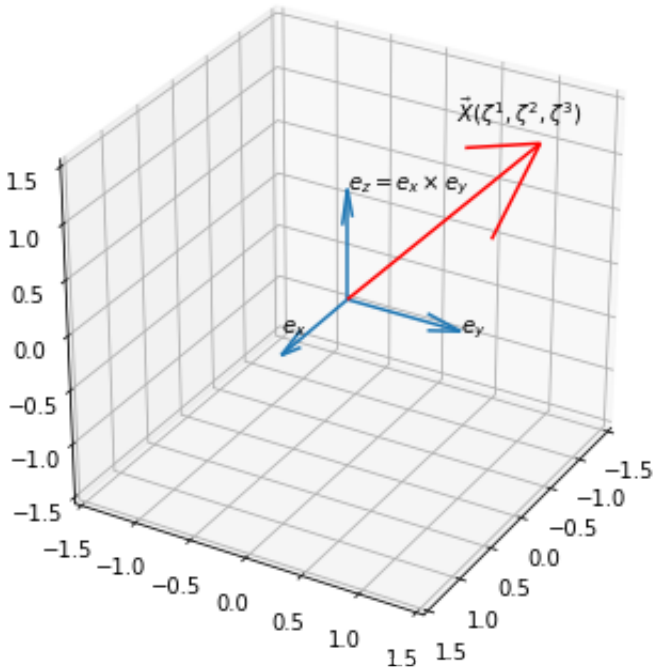
24 de marzo de 2020

1 Sistemas de coordenadas curvilineos

Un sistema de coordenadas curvilineas en $\mathbb{R}^3$ se define a partir de la relación

$$\vec{X}(\zeta^i) = \vec{X}(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \sum_i x^i(\zeta^i)\check{e}_i$$

donde $\{\check{e}_i\}$ es la *base canónica* de $\mathbb{R}^3$, que satisface $\check{e}_i = \check{e}_j \times \check{e}_k$.



El ejemplo trivial son las coordenadas cartesianas, en las que $x^i(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = \zeta^i$. Un ejemplo menos trivial, pero que conocemos bien son las coordenadas esféricas. En ese caso,

$$\begin{aligned}
\zeta^i &\equiv (\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3) = (r, \theta, \phi) && (1)\\
x^1 &= x = r\cos(\phi)\sin(\theta) && (2)\\
x^2 &= y = r\sin(\phi)\sin(\theta) && (3)\\
x^3 &= z = r\cos(\theta) && (4)
\end{aligned}$$

Si se fija el valor de dos coordenadas y se deja una libre, se obtienen tres familias de curvas, llamadas "curvas coordenadas":

$$\sigma^{(1)}_{\zeta^2,\zeta^3}(\zeta^1) = \vec{X}(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3) \tag{5}$$

$$\sigma^{(2)}_{\zeta^1,\zeta^3}(\zeta^2) = \vec{X}(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3) \tag{6}$$

$$\sigma^{(3)}_{\zeta^1,\zeta^2}(\zeta^3) = \vec{X}(\zeta^1,\zeta^2,\zeta^3) \tag{7}$$

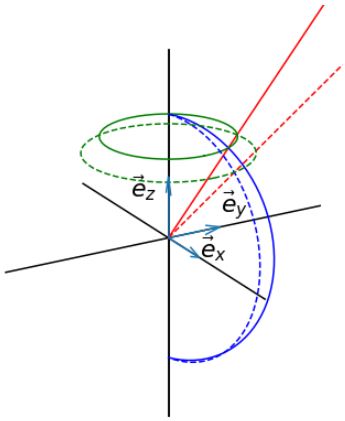
$$\tag{8}$$

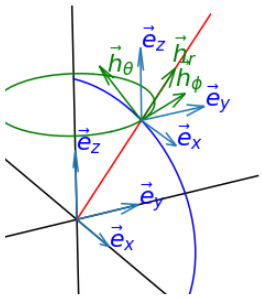
En el caso de las coordenadas cartesianas, estas tres familias cumplen que

- Dentro de cada familia, las curvas son líneas rectas paralelas
- En cada punto del espacio, se cortan extactamente tres curvas de familias distintas.
- Si dos curvas pertenecientes a familias distas son ortogonales.

Si hacemos lo mismo con el caso de las coordenadas esféricas,

- las curvas coordenadas de la familia $\sigma^{(r)}$ serán semirectas que salen del origen en la dirección (θ, ϕ).
- las curvas coordenadas de la familia $\sigma^{(\theta)}$ serán semicircunferencias sobre planos que se intersectan en el eje z. Estas curvas suelen llamarse "meridianos".
- las curvas coordenadas de la familia $\sigma^{(\phi)}$ serán circunferencias sobre planos paralelos entre sí, y usualmente nos referimos a ellas como "paralelos".





Vemos que ahora, algunas propiedades de las coordenadas cartesianas no se mantienen:

- Las curvas no son rectas
- para r fijo, todos los meridianos se intersectan en sus extremos.
- En el origen, todas las $\sigma^{(r)}$ se encuentra.

Sin embargo, salvo sobre el eje z y en el origen, en la intersección de cualquier par de curvas coordendas, estas resultan ser (localmente) perpendiculares. Más formalmente: los vectores tangentes a dos curvas coordenadas en el punto en que se intersectan son vectores perpendiculares. Decimos por esto que las coordenadas esféricas son un *sistema de coordenadas ortogonal*.

1.1 El espacio tangente y las bases holonomicas.

En el entorno a cada punto $\mathbf{p}$, se define el *espacio tangente* $\mathcal{T}_{\mathbf{p}}$. Este es el espacio de los *desplazamientos infinitesimales* en torno al punto $\mathbf{p}$. Esto es: al variar las coordenadas ζ^i en $\delta\zeta^i$, nos movemos del punto $\mathbf{p} \equiv \vec{\mathbf{X}}(\zeta^i)$ al punto $\mathbf{p}' \equiv \vec{\mathbf{X}}(\zeta^i + \Delta\zeta^i) = \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$ con

$$\Delta\mathbf{p} \equiv \sum_i \vec{h}_i \delta\zeta^i$$

(Ver figura 1.)

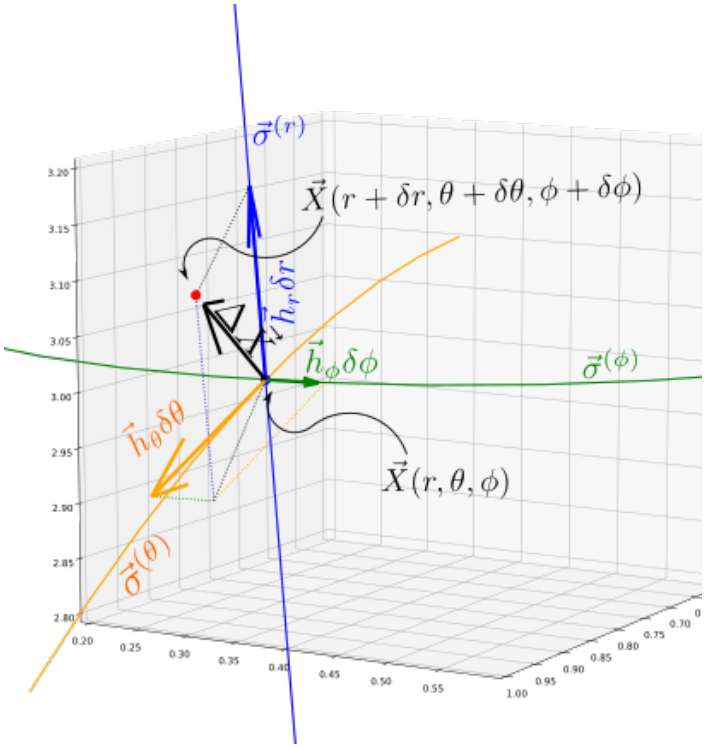


Figure 1: Espacio tangente en torno a un punto, y base holonoma asociada a las coordenadas esféricas. El desplazamiento resultante de un cambio $(\delta r, \delta\theta, \delta\phi)$ en las coordenadas es una combinación lineal de los vectores de la base holónoma $\vec{h}_r, \vec{h}_\theta, \vec{h}_\phi$.

De esta manera, una base coordenada para el espacio tangente viene dada por la *base coordenada*

(u holonómica) sobre el *espacio tangente* a un punto como $\{\vec{h}_i\}$ como aquella que satisface [1]

$$\frac{\partial f(\vec{X}(\zeta^j))}{\partial \zeta_i} = \vec{h}_i \cdot \nabla f(\vec{X})$$

En muchos textos de matemática, a la base $\vec{h}_i$ se la denota directamente por ∂_i.

Para interpretar qué son estos vectores, observamos que $\delta\vec{X} = \sum_i \frac{\partial \vec{X}}{\partial \zeta^i} d\zeta^i$ es desplazamiento que sufre $\vec{X}$ al variar la coordenada ζ^i en $d\zeta^i$, pero

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \zeta^i} = \vec{h}_i \cdot \nabla \vec{X} = \sum_j (\vec{h}_i \cdot \nabla x^j)\vec{e}_j = \sum_j (\vec{h}_i \cdot \vec{e}_j)\vec{e}_j = \vec{h}_i$$

de manera que $\vec{h}_i d\zeta^i$ es el vector desplazamiento que resulta de variar las coordenadas en $d\zeta^i$.

Notemos que esta definición asigna entonces tres vectores a cada punto del espacio en donde las coordenadas están definidas: en otras palabras, una base holonómica queda definida en términos de tres campos vectoriales. En el caso de las coordenadas cartesianas, estos campos son constantes, y coinciden con los vectores de la base canónica en todo el espacio.

Por otro lado, para el caso de las coordenadas esféricas, encontramos entonces que (probar)

$$\vec{h}_r(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{\vec{r}}{r} = \check{r} = \check{e}_r \tag{9}$$

$$\vec{h}_\phi(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi} = \check{e}_z \times \vec{r} = r\sin(\theta)\check{e}_\phi \tag{10}$$

$$\vec{h}_\theta(\vec{r}) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \frac{\vec{h}_\phi(\vec{r}) \times \vec{r}}{|\vec{h}_\phi(\vec{r})|} = r\check{e}_\theta \tag{11}$$

de donde se vé la condición de ortogonalidad.

2 Base dual

Para trabajar con operadores diferenciales, es conveniente definir una base en términos de los gradientes de las funciones coordenadas. Definimos entonces los vectores

$$\vec{\omega}^j = \nabla \zeta^j$$

[1] Recordemos que el *operador gradiente* ∇ representa un *campo vectorial* que, dado un desplazamiento $\delta\vec{X}$ en torno a un punto $\vec{X}$ satisface

$$f(\vec{X} + \delta\vec{X}) - f(\vec{X}) = \delta\vec{X} \cdot (\nabla f)|_{\vec{X}} + \mathcal{O}^2(\delta\vec{X})$$

En coordenadas cartesianas, este vector se expresará en términos de la base canónica y las derivadas parciales de f según

$$\nabla f(\vec{X}) = f(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\check{e}_x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\check{e}_y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\check{e}_z$$

de manera que bajo un desplazamiento $\delta\vec{X} = \delta x\check{e}_x + \delta y\check{e}_y + \delta z\check{e}_z$ se satisface

$$\delta f = \vec{X} \cdot \nabla f = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\delta z$$

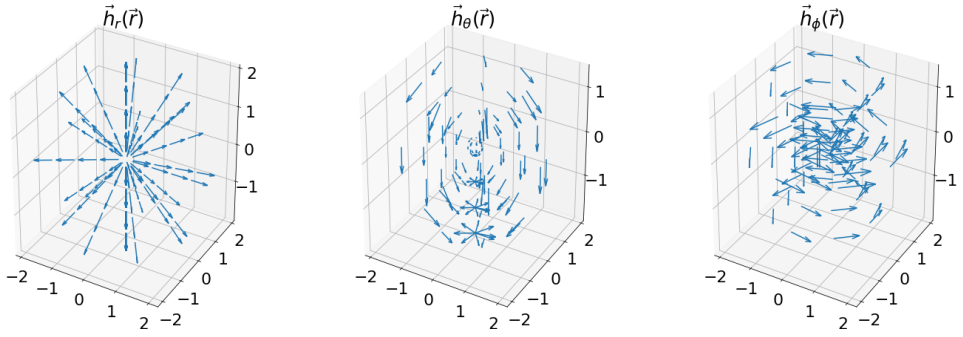


Figure 2: Campos que definen las bases coordenadas locales (holónomas) para las coordenadas esféricas

De la definición de $\{\vec{h}_i\}$, vemos que

$$\vec{h}_i \cdot \vec{\omega}^j = (\nabla \zeta^j) \cdot \vec{h}^i = \frac{\partial \zeta^j}{\partial \zeta^i} = \delta_i^j \,.$$

Decimos entonces que $\{\vec{\omega}^j\}$ y $\{\vec{h}_i\}$ son *biortonormales* o *duales*, respecto al producto interno (canónico) de $\mathbb{R}^3$. A cada vector $\vec{\omega}^i$ se le puede asignar una funcional lineal (o 1-formas)

$$\tilde{\omega}^i(\vec{v}) = \vec{\omega}^i \cdot \vec{v} \,,$$

que dan las componentes del vector $\vec{v}$ en la base $\{\vec{h}_i\}$. [2].

Notemos que debido a la condición de ortogonalidad, en $\mathbb{R}^3$, podemos expresar los vectores de la base dual en términos de los vectores de la base coordenada $\vec{h}_i$ según

$$\vec{\omega}_1 = \frac{\vec{h}_2 \times \vec{h}_3}{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3} \qquad \vec{\omega}_2 = \frac{\vec{h}_3 \times \vec{h}_1}{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3} \qquad \vec{\omega}_3 = \frac{\vec{h}_1 \times \vec{h}_2}{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3}$$

o, en forma compacta,

$$\vec{\omega}_i = \frac{\sum_{jk} \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \vec{h}_j \times \vec{h}_k}{\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3}$$

con $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij} = \varepsilon_{jki} = -\varepsilon_{jik}$ y $\varepsilon_{123} = 1$ el *símbolo de Levi-Civita*. En esta expresión, identificamos el denominador con el *volumen* del paralelepípedo generado por los vectores $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$ y $\vec{h}_3$, mientras que el numerador es un vector de magnitud proporcional al área del paralelogramo generado por $\vec{h}_j$, $\vec{h}_k$, y dirigido normalmente a estos vectores. De manera análoga, podemos probar que

$$\vec{h}_i = \frac{\sum_{jk} \frac{\varepsilon_{ijk}}{2} \vec{\omega}_j \times \vec{\omega}_k}{\vec{\omega}_1 \cdot \vec{\omega}_2 \times \vec{\omega}_3}$$

[2] Recordemos que el espacio dual V^* a un espacio vectorial $V = V_{\mathbb{K}}$ (sobre el cuerpo $\mathbb{K}$) es aquel que definen las *funcionales lineales* $g : V_{\mathbb{K}} \to \mathbb{K}$. Dada una base $\{\vec{h}_i\}$ de V, se define su base dual $\{\tilde{h}^j\}$ de manera que $\tilde{h}^j(\vec{h}_i) = \delta_i^j$. Por otro lado, el *producto interno* induce un *isomorfismo* sobre el espacio dual según $\tilde{g}_{\vec{w}} \in V^* / \tilde{g}_{\vec{w}}(\vec{v}) = \vec{w} \cdot \vec{v}$. De esta manera, $\tilde{h}_i(\vec{f}) = \vec{\omega}^j \cdot \vec{f}$ define la *base dual* a $\{\vec{h}_i\}$.

Para el caso de las coordenadas esféricas, encontramos que las relaciones anteriores llevan a

$$\vec{\omega}^r = \frac{\vec{h}_\theta \times \vec{h}_\phi}{r^2 \sin(\theta)} = \check{e}_r \tag{12}$$

$$\vec{\omega}^\phi = \frac{\vec{h}_\phi \times \vec{h}_r}{r^2 \sin(\theta)} = \frac{\check{e}_\theta}{r} \tag{13}$$

$$\vec{\omega}^\phi = \frac{\vec{h}_r \times \vec{h}_\theta}{r^2 \sin(\theta)} = \frac{\check{e}_\phi}{r \sin(\theta)} \tag{14}$$

2.0.1 Relación entre la base coordenada y su base dual. El tensor métrico

Como $\{\vec{h}_i\}$ y $\{\vec{\omega}^j\}$ son bases, existirán matrices de cambio de base η_{ij} y η^{ij}, de manera que $\vec{h}_i = \sum_j \eta_{ij}\vec{\omega}_j$ y $\vec{\omega}^i = \sum_j \eta^{ij}\vec{h}^j$, con $\eta^{ij} = (\eta_{rs}^{-1})^{ij}$. Utilizando la biortonormalidad, encontramos que $\eta_{ij} = \eta_{ji} = (\vec{h}_i, \sum_k \eta_{jk}\vec{\omega}_k) = (\vec{h}_i, \vec{h}_j)$, de manera que η_{ij} no es otra cosa que la *metrica* asociada a la base $\{\vec{h}_i\}$.

Para el caso de las coordenadas cartesianas, $\eta_{ij} = \eta^{ij} = \delta_i^j$. Por otro lado, en un sistema de coordenadas ortogonales, $\eta_{ij} = |\vec{h}_i|^2\delta_i^j$ y $\eta^{ij} = \frac{1}{|\vec{h}_i|^2}\delta_i^j$ (sin convención de suma), esto es, serán matrices diagonales. Para el caso particular de las coordenadas esféricas,

$$h_r^2 = |\vec{h}_r|^2 = 1 \tag{15}$$

$$h_\theta^2 = |\vec{h}_r|^2 = r^2 \tag{16}$$

$$h_\phi^2 = |\vec{h}_r|^2 = r^2 \sin(\theta)^2 \tag{17}$$

$$\tag{18}$$

de manera que

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

Usando estas relaciones, está claro que en coordenadas cartesianas, la base dual $\vec{w}^i$ coincide con la base canónica, mientras que para las coordenadas esféricas,

$$\vec{\omega}^r(\vec{r}) = \vec{h}_r = \check{r} = \check{e}_r \tag{19}$$

$$\vec{\omega}^\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{h}_\phi}{r^2 \sin^2(\theta)} = \frac{\check{e}_z \times \check{r}}{|\check{e}_z \times \check{r}| \sin(\theta) r} = \frac{\check{e}_\phi}{r \sin(\theta)} \tag{20}$$

$$\vec{\omega}^\theta(\vec{r}) = \frac{\vec{h}_\theta}{r^2} = \frac{\check{r} \times \vec{h}_\phi(\vec{r})}{|\vec{h}_\phi(\vec{r})| r} = \frac{\check{e}_\theta}{r} \tag{21}$$

2.1 Tensor Métrico y el elemento de volumen

Mencionamos antes que el *producto triple* $\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3$ representaba el *volumen* del paralelepípedo generado por los vectores de la base holonómica $\{\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\}$. Notamos que si ahora consideramos el volumen de la región diferencial que obtenemos al barrer intervalos $d\zeta^1$, $d\zeta^2$ y $d\zeta^3$ en las respectivas coordenadas, este viene dado por

$$d\mathcal{V} = \mathcal{V} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3$$

Llamamos a esta cantidad el *elemento (diferencial) de volumen*. Identificamos entonces a $\mathcal{V}$ con el *determinante jacobiano* asociado al cambio de variables entre las coordenadas cartesianas y el sistema de coordenadas curvilineas considerado.

Veamos ahora cómo se relaciona esta cantidad con el tensor métrico. Para eso, observamos que podemos expresarla en términos de la matriz de cambio de base A^i_j que relaciona a estos vectores con la base canónica:

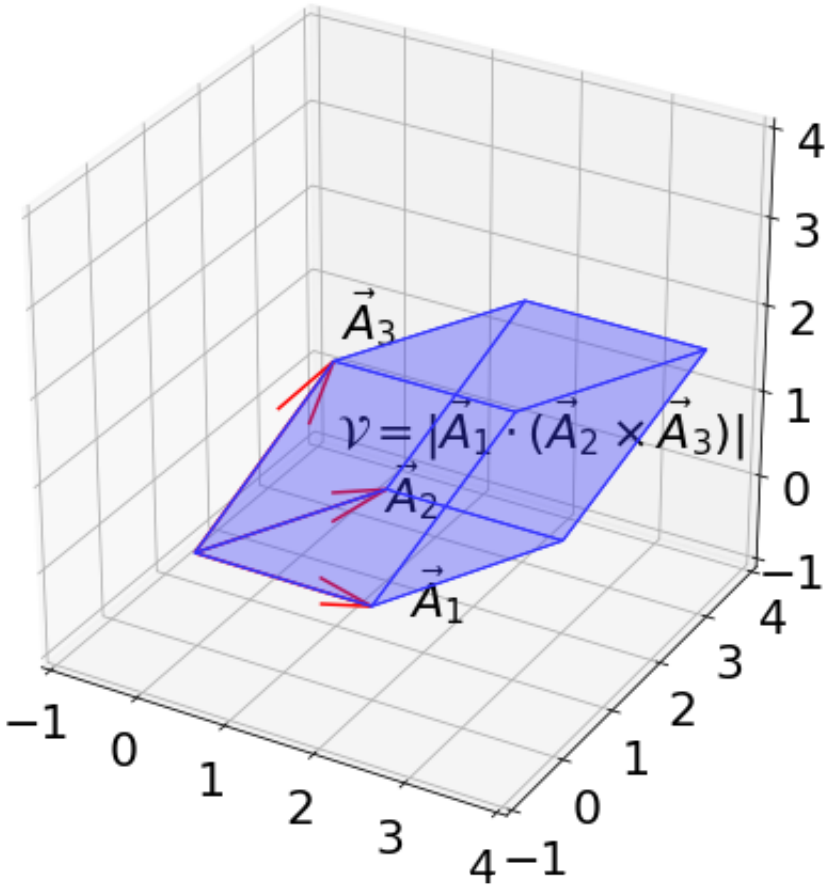
$$\mathcal{V} = \mathcal{V}[\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3] = \vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 \times \vec{h}_3 = A^i_1 A^j_2 A^j_3 \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \times \vec{e}_k = \det(A)$$

Por otro lado, el tensor métrico se relaciona con la matriz b^i_j según

$$\eta_{ij} = (\vec{h}_i, \vec{h}_j) = A^k_i A^m_j (\vec{e}_k, \vec{e}_m) = (A \cdot A^T)_{ij}$$

De esta relación se sigue que

$$\det(\eta) = \det(A.A^T) = \det(A)^2 = \mathcal{V}^2$$



Para el caso de las coordenadas esféricas, el elemento de volumen tomará la forma

$$V[\vec{h}_r, \vec{h}_\theta, \vec{h}_\phi] = r^2 \sin(\theta)$$

donde reconocemos al *jacobiano* asociado a estas coordenadas, respecto a las coordenadas cartesianas.

2.2 El elemento de área

Consideremos ahora la región rectangular que barremos realizar desplazamientos $\vec{v}_1 du + \vec{v}_2 dw$. Para describir esta región, introducimos el vector *elemento de área*

$$d\vec{A} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 du dw$$

cuya dirección es perpendicular a la región generada, y cuyo módulo dá el área asociada a la región. La *integral de flujo* de un campo vectorial $\vec{B}$ a través de una superficie $\mathcal{S}$ se expresa entonces como

$$\Phi_B = \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int\int \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{X}}{\partial v} du dw$$

donde u y v parametrizan la superficie.

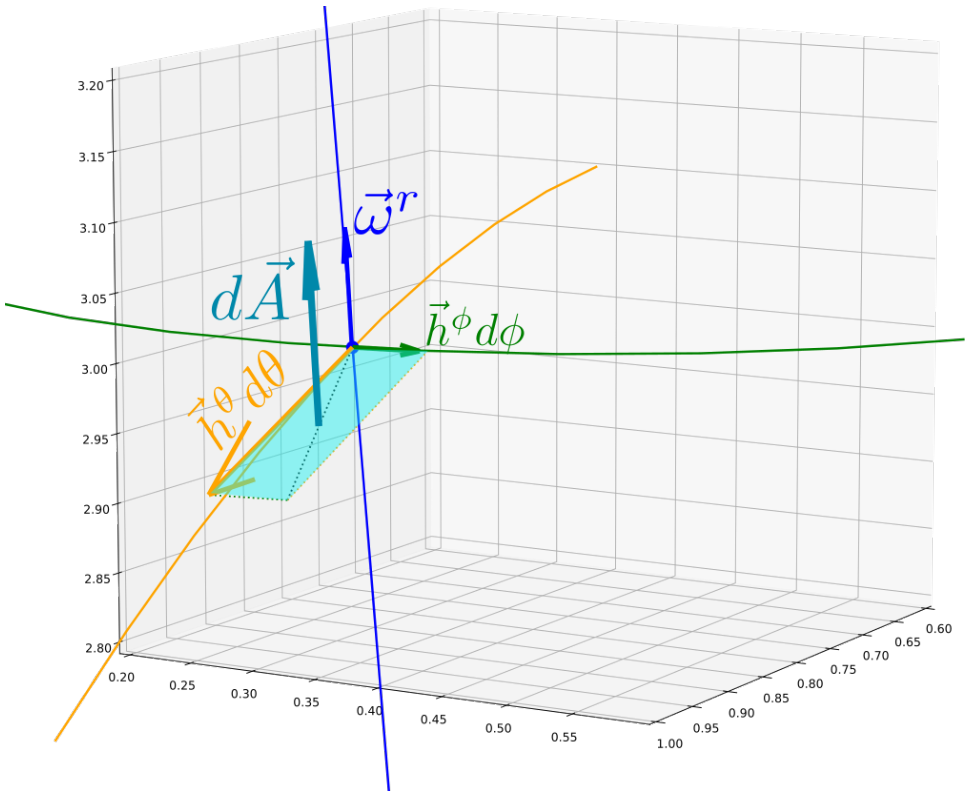


Figure 3: Elemento de área para una superficie con r = cte. Nótese que $\vec{\omega}^r$ es paralelo a $\vec{h}_r$ (y tangente a la correspondiente curva coordenada) debido a que las coordenadas esféricas son un sistema de coordenadas ortogonales.

Podemos expresar $d\vec{A}$ en la base dual como

$$d\vec{A} = \sum_{jk} (\vec{h}_j \cdot \vec{v}_1)(\vec{h}_k \cdot \vec{v}_2) \vec{h}_j \times \vec{h}_k du dv \tag{22}$$

$$= \sum_{ijk} (\vec{h}_j \cdot \vec{v}_1)(\vec{h}_k \cdot \vec{v}_2)(\vec{h}_i \cdot \vec{h}_j \times \vec{h}_k) \vec{\omega}^i du dv \tag{23}$$

$$= \sum_{ijk} \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial \zeta^j} \frac{\partial \vec{v}_2}{\partial \zeta^k} \varepsilon_{ijk} \sqrt{\det \eta} \vec{\omega}^i du dv \tag{24}$$

Así, podemos identificar al vector $\sqrt{\det \eta}\vec{\omega}^i$ con el elemento de área asociado a las superficies con coordenada ζ^i constante.

3 Bases normalizadas

Si queremos trabajar con vectores normalizados, definimos $\check{h}_i = \vec{h}_i/h_i$ y $\check{\omega}^i = \vec{\omega^i}_i/\omega_i$ de manera que $\check{h}_i.\check{h}_i = 1$ y $\check{\omega}^i.\check{\omega}^i = 1$. Debido a la biortonormalidad,

$$\check{\omega}^i \cdot \check{h}_j = \frac{\delta^i_j}{\omega_i h_i}$$

(nótese que no estamos usando la convención de Einstein para la suma).

En términos de estas bases normalizadas, podemos ahora expresar el operador gradiente como:

$$\nabla f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\nabla\zeta_i = \sum_i \omega_i \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\check{\omega}^i = \sum_{ij} \frac{\partial f}{\partial \zeta_i}\eta^{ij}h_i\check{h}_j$$

A partir de este, expresamos los operadores divergencia y rotor de un vector $\vec{A} = A_i\check{\omega}^i = A^i\check{h}_i$ ($A^i = \sum_j A_j h_i/\omega_j\eta^{ij}$) como[3]

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot\vec{A} &= \nabla\cdot(\sum_i A_i\check{\omega}^i) && (25)\\
&= \sum_i \vec{\omega}^i\cdot\nabla(A_i/\omega_i) + \sum_i (A_i/\omega_i)\nabla\cdot\vec{\omega}^i && (26)\\
&= \sum_{ij}\eta^{ij}\vec{h}_j\cdot\nabla(A_i/\omega_i) + \sum_i (A_i/\omega_i)\nabla^2\zeta^i && (27)\\
&= \sum_{ij}\eta^{ij}\frac{\partial}{\partial\zeta_j}(A_i/\omega_i) + \sum_i (A_i/\omega_i)\nabla^2\zeta^i && (28)
\end{aligned}$$

$$\nabla^2\phi = \sum_{ij}\eta^{ij}\frac{\partial^2\phi}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} + \sum_i(\nabla^2\zeta^i)\frac{\partial\phi}{\partial\zeta_i} \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
\nabla\times\vec{A} &= \nabla\times(\sum_i A_i\check{\omega}^i) && (30)\\
&= \sum_i -\vec{\omega}^i\times\nabla(A_i/\omega_i) + \sum_i (A_i/\omega_i)\nabla\times\vec{\omega}^i && (31)\\
&= \sum_{i,j} -\vec{\omega}^i\times\vec{\omega}^j\frac{\partial}{\partial\zeta^j}(A_i/\omega_i) && (32)\\
&= \sum_{i,j,k}\frac{h_k}{\sqrt{\det(\eta_{mn})}}\check{h}_k\varepsilon_{kji}\frac{\partial}{\partial\zeta^j}(A_i/\omega_i) && (33)
\end{aligned}$$

[3] Recordemos que el rotor $\nabla\times$ y la divergencia $\nabla\cdot$ son generalizaciones del concepto de derivada, que se definen por

$$\nabla\cdot\vec{A}(\vec{X}) = \lim_{\mathcal{V}\to 0}\frac{\int_{\partial\mathcal{V}}\vec{A}\cdot d\vec{S}}{\int_{\mathcal{V}} d\mathcal{V}} \qquad \text{y} \qquad \vec{n}\cdot\nabla\times\vec{A}(\vec{X}) = \lim_{\substack{\mathcal{S}\to 0\\ \vec{n}\cdot d\vec{S}=0}}\frac{\int_{\partial\mathcal{S}}\vec{A}\cdot d\vec{\ell}}{\int_{\mathcal{S}} d|\vec{\mathcal{S}}|}$$

con $\mathcal{V}$ un volumen en el entorno de $\vec{X}$, $\mathcal{S}$ una superficie plana, normal a $\vec{n}$ que contiene a $\vec{X}$ y $\partial\mathcal{V}$ y $\partial\mathcal{S}$ son las respectivas fronteras.

$$\nabla \vec{A} = \sum_i h_i \nabla (A^i/h_i) \check{h}_i + \sum_i A^i/h_i \nabla \vec{h}_i \tag{34}$$

$$= \sum_{i,j} h_i \frac{\partial A^i/h_i}{\partial \zeta^j} \vec{\omega}^j \check{h}_i + \sum_{i,j} \frac{A^i}{h_i} \vec{\omega}_j (\vec{h}_k \cdot \nabla \vec{h}_i) \tag{35}$$

$$= \sum_{i,j} h_i \frac{\partial A^i/h_i}{\partial \zeta^j} \vec{\omega}^j \check{h}_i + \sum_{i,j} \frac{A^i}{h_i} \vec{\omega}^j \frac{\partial \vec{h}_i}{\partial \zeta^j} \tag{36}$$

$$\tag{37}$$

3.1 Unidades

Una ventaja de usar bases normalizadas es que las componentes de los campos tendrán las unidades correspondientes a la magnitud que se quiere representar. Al respecto, notamos que las coordenadas curvilineas que utilizamos pueden no tener necesariamente las mismas unidades que el vector posición. Por ejemplo, en coordenadas esféricas, r tiene unidades de distancia, pero θ y ϕ se miden en radianes. Por esto, las unidades de h^i serán en general diferentes, y de la forma $[distancia]/[\zeta^i]$.

Cuando los operadores ∇, $\nabla\cdot$, y $\nabla\times$ actúan sobre un campo $[\vec{A}]$, el resultado es un nuevo campo con unidades $[\vec{A}]/[distancia]$, mientras que si se aplica el operador ∇^2, el campo resultante tendrá unidades $[\vec{A}]/[distancia]^2$. Podemos verificar esto en las expresiones anteriores.

3.2 Compatibilidad con el teorema de Stokes

Otra cosa a observar es que estas propiedades son compatibles con el teorema de Stokes:

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\vec{\ell} = \phi|_{\partial \mathcal{C}} \tag{38}$$

$$\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial \mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} \tag{39}$$

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} d\mathcal{V} = \oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{A} \cdot d\vec{S} \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

Para verlo, necesitamos expresar los diferenciales en términos de los correspondientes jacobianos:

$$d\vec{\ell} = \vec{h}_i d\zeta^i$$

$$d\vec{S} = \sqrt{\det(\eta)} \vec{\omega}^i d\zeta^j d\zeta^k \frac{|\varepsilon_{ijk}|}{2}$$

$$d\mathcal{V} = \sqrt{\det(\eta)} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3$$

(donde usamos la convención de Einstein para suma), y recordar que, de la biortonormalidad,

$$\vec{A} \cdot \vec{h}_i = A_i h_i$$

de forma que $\vec{A} = A_i \breve{\omega}^i$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot d\vec{\ell} &= \int_{\mathcal{C}} \nabla\phi \cdot \vec{h}_i d\zeta^i && (42)\\
&= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta^k} \eta^{km} \vec{h}_m \cdot \vec{h}_i d\zeta^i && (43)\\
&= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta^k} \eta^{km} \eta_{mi} d\zeta^i && (44)\\
&= \int_{\mathcal{C}} \frac{\partial\phi}{\partial\zeta^i} d\zeta^i = \phi|_{\partial C} && (45)\\
& && (46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \nabla \times \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \int_{\mathcal{S}} \left(\sum_{i,k} \frac{\varepsilon_{ijk} \vec{h}_i}{\sqrt{\det(\eta)}} \frac{\partial A_k h_k}{\partial \zeta^j} \right) \cdot \left(\vec{\omega}^{i'} \sqrt{\det(\eta)} \frac{|\varepsilon_{i'mn}|}{2} d\zeta^m d\zeta^n \right) && (47)\\
&= \int_{\mathcal{S}} \sum_{ik} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k h_k}{\partial \zeta^j} \frac{|\varepsilon_{imn}|}{2} d\zeta^m d\zeta^n && (48)\\
&= \oint_{\partial\mathcal{S}} \sum_k A_k h_k d\zeta^k = \oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{A} \cdot \vec{h}_k d\zeta^k && (49)\\
&= \oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{A} \cdot d\vec{\ell} && (50)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \eta^{il} \frac{\partial}{\partial\zeta^l} \left(\sqrt{\det(\eta)} A_i h_i \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \sum_i A_i h_i \nabla^2 \zeta^i d\mathcal{V} && (51)\\
&= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \eta^{il} \frac{\partial}{\partial\zeta^l} \left(\sqrt{\det(\eta)} A_i h_i \right) d\mathcal{V} + \int_{\mathcal{V}} \sum_i A_i h_i \frac{1}{\sqrt{\det\eta}} \frac{\partial}{\partial\zeta^l} \left(\eta^{il} \sqrt{\det(\eta)} \right) d\mathcal{V} && (52)\\
&= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{1}{\sqrt{\det\eta}} \frac{\partial}{\partial\zeta^l} \left(\eta^{il} \sqrt{\det(\eta)} A_i h_i \right) d\mathcal{V} && (53)\\
&= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial\zeta^l} \left(\eta^{il} \sqrt{\det(\eta)} A_i h_i \right) d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 && (54)\\
&= \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_i \left(\eta^{il} \sqrt{\det(\eta)} A_i h_i \right) \left(\frac{|\varepsilon_{lmn}|}{2} d\zeta^m d\zeta^n \right) && (55)\\
&= \int_{\partial\mathcal{V}} \left(\sum_i A_i h_i \vec{\omega}^i \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\det(\eta)} |\varepsilon_{lmn}| \vec{\omega}^l}{2} d\zeta^m d\zeta^n \right) = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{A} \cdot d\vec{S} && (56)
\end{aligned}$$

Para la última identidad usamos que

$$\nabla^2 \zeta^i = \frac{1}{\sqrt{\det(\eta)}} \frac{\partial \eta^{il} \sqrt{\det(\eta)}}{\partial \zeta^l}$$

que se puede probar (con bastante trabajo) usando que

- $\sqrt{\det(\eta)} = \det(\frac{\partial x^t}{\partial \zeta^s})$
- $\frac{\partial \log\det M}{\partial M_{ij}} = (M^{-1})_{ji}$

4 Coordenadas ortogonales

Para ciertos sistemas de coordenadas, ocurre que

$$\vec{h}_i \times \vec{h}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk} \frac{h_i h_j}{h_k} \vec{h}_k \Rightarrow \check{\omega}^i = \check{h}_i \;\; \text{y} \omega^i = \frac{1}{h_i}$$

de manera que $\{\check{h}_i\}$ define una base ortonormal en cada punto del espacio. De esto se sigue que

a) $\eta_{ij} = h_i \delta_{ij}$

b) $\check{\omega}^i = \check{h}_i$ (por la biortonormalidad)

c) $\sqrt{\det(\eta_{mn})} = h_1 h_2 h_3$

d) $\nabla^2 \zeta^i = \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_j h_k}{h_i}$

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \zeta^i &= \nabla \cdot \vec{\omega}_i = \nabla \cdot \frac{\check{h}_i}{h_i} \\
&= \nabla \cdot \frac{\check{h}_j \times \check{h}_k}{h_i} \\
&= \nabla \cdot \frac{h_j h_k \omega_j \times \omega_k}{h_i} \\
&= (\omega_j \times \omega_k) \cdot \nabla \frac{h_j h_k}{h_i} + \frac{h_j h_k}{h_i} \nabla \cdot (\omega_j \times \omega_k) \\
&= \frac{\vec{h}_i}{h_i h_j h_k} \cdot \nabla \frac{h_j h_k}{h_i} + \frac{h_j h_k}{h_i} \nabla \cdot (\nabla \zeta^j \times \nabla \zeta^k) \\
&= \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_j h_k}{h_i} \\
&= \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_j h_k}{h_i}
\end{aligned}$$

Estas propiedades permiten simplificar las expresiones para los operadores ∇, $\nabla\cdot$, $\nabla\times$ y ∇^2:

$$\nabla \phi = \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^i} \omega^i = \sum_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta^i} \check{h}_i$$

y si $\vec{A} = A^i \check{h}_i$,

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_1 h_2 h_3 A^i}{h_i}$$

$$\nabla^2 \psi = \sum_{ij} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} \frac{h_1 h_2 h_3}{h_i^2} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta_j} \tag{57}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \sum_{ijk} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{h_k}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \zeta^j} h_k A^k \right) \check{h}_k$$

Nuevamente, y de forma más simple, observamos que los factores que aparecen antes y después de las derivadas en los operadores gradiente, divergencia y rotor son los necesarios para que el teorema de Stokes sea válido. Por ejemplo, en la divergencia, el factor que va con la inversa del elemento de volumen cancela al jacobiano en la integral triple, mientras que el factor que multiplica a las componentes dentro de la derivada "repone" el elemento de área en la integral doble:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{A} d\mathcal{V} &= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_1 h_2 h_3 A^i}{h_i} h_1 h_2 h_3 d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 && (58)\\
&= \int_{\mathcal{V}} \sum_i \frac{\partial}{\partial \zeta^i} \frac{h_1 h_2 h_3 A^i}{h_i} d\zeta^1 d\zeta^2 d\zeta^3 && (59)\\
&= \int_{\partial \mathcal{V}} \sum_{ijk} \frac{h_1 h_2 h_3 A^i}{h_i} \frac{|\varepsilon_{ijk}|}{2} d\zeta^j d\zeta^k \quad \text{(Teorema de Stokes)} && (60)\\
&= \int_{\partial \mathcal{V}} \sum_{ii'jk} \frac{A^{i'}}{h_{i'}} \vec{h}_{i'} \cdot \vec{\omega}^i \frac{h_1 h_2 h_3 |\varepsilon_{ijk}|}{2} d\zeta^j d\zeta^k && (61)\\
&= \int_{\partial \mathcal{V}} \vec{A} \cdot d\vec{S} && (62)
\end{aligned}$$