183 **Radiación**

En estas clases estudiaremos la generación y propagación de ondas electromagnéticas.

Para un sistema localizado de cargas y corrientes definimos las densidades

$$\begin{cases} \rho(\bar{x},t) = \rho(\bar{x})e^{-i\omega t} \\ \bar{J}(\bar{x},t) = \bar{J}(x)e^{-i\omega t} \end{cases}$$

El potencial vector asociado tenemos

$$\vec{A}(\bar{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3x' \int dt' \frac{\bar{J}(\bar{x}',t')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\delta\left(t'+\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}-t\right)$$

Esta expresión es válida en ausencia de superficies limitadoras, dada la dependencia temporal que hemos adoptado (armónica) $\Rightarrow$

$$\bar{A}(\bar{x},t) = \frac{1}{c}\int d^3\bar{x}' \frac{\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\int dt' \delta\left(t'+\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}-t\right) \cdot e^{-i\omega t'}$$

$$= \frac{1}{c}e^{-i\omega t}\int d^3x' \frac{\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|} e^{i\left(\frac{\omega}{c}\right)|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

de donde

$$\boxed{\bar{A}(\bar{x},t) = \frac{e^{-i\omega t}}{c}\int d^3x' \frac{\bar{J}(\bar{x}')e^{ik|\bar{x}-\bar{x}'|}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}$$

(104)

A partir de esta expresión para $\bar{A}(\bar{x}, t)$ (la dependencia temporal es la misma que la de las fuentes), podemos calcular $\bar{B}$, $\bar{E}$ (los campos eléctricos y magnéticos generados)

$$\Rightarrow \quad \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$$

$$\bar{E} = \frac{i}{K} \bar{\nabla} \times \bar{B}$$

En ambos casos la dependencia temporal es la correspondiente a $\vec{A} \to e^{-i\omega t}$.

En el esquema siguiente relacionamos las dimensiones de la fuente ($\underline{\underline{d}}$) longitud de onda de la radiación ($\underline{\underline{\lambda}}$) la posición del observador ($\underline{\underline{r}}$)

$\Rightarrow$

$d \ll r \ll \lambda$	zona cercana
$d \ll r \approx \lambda$	zona intermedia
$d \ll \lambda \ll r$	zona de radiación

Propiedades de cada zona (caracterización)

185

la zona próxima (o estática) los campos dependen fuertemente de las propiedades de la fuente (componentes radiales).

En la zona lejana los campos son transversales, (y su dependencia radial, como veremos, difiere de la dependencia radial de los campos estáticos).

Comenzaremos desarrollando el integrando de $\bar{A}(\bar{x})$

$$|\bar{x}-\bar{x}'| \simeq \sqrt{(\bar{x}-\bar{x}')\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}$$

$$\simeq \sqrt{x^2+x'^2-2\bar{x}\cdot\bar{x}'}$$

$$\simeq \sqrt{x^2+x'^2-2\bar{x}\cdot\bar{x}'}$$

$$\simeq x\left(1-2\frac{\bar{x}}{x^2}\cdot\bar{x}'\right)^{1/2}$$

$$\simeq x\left(1-\left(\frac{\bar{x}}{x}\right)\cdot\bar{x}'\frac{1}{x}\right)$$

$$\simeq x-\bar{n}\cdot\bar{x}' \qquad (x=r)$$

$$\bar{A}(\bar{x}) \simeq \frac{1}{c}\int d^3x' \, \bar{J}(\bar{x}') \frac{e^{ikr}\, e^{-ik\bar{n}\cdot\bar{x}'}}{r\,(1-\bar{n}\cdot\bar{x}')}$$

$$\bar{A}(\bar{x}) = \left(\frac{e^{ikr}}{cr}\right)\cdot\int d^3x' \frac{\bar{J}(\bar{x}')\, e^{-ik\bar{n}\cdot\bar{x}'}}{(1-\bar{n}\cdot\bar{x}')}$$

(186)

Notemos que el prefactor es de la forma $\left(\frac{e^{ikr}}{cr}\right)$. Ahora desarrollaremos la integral, expresando numerador y denominador en potencias de (kr)

$$e^{-ik\bar{n}\cdot\bar{x}'} \Rightarrow 1 - ik(\bar{n}\cdot\bar{x}') - \frac{k^2}{2}(\bar{n}\cdot\bar{x}')^2 + \frac{ik^3}{3!}(\bar{n}\cdot\bar{x}')^3 + \cdots$$

$$\left(1 - \frac{(\bar{n}\cdot\bar{x}')}{r}\right)^{-1} \Rightarrow 1 + \frac{1}{r}(\bar{n}\cdot\bar{x}') + \frac{(\bar{n}\cdot\bar{x}')^2}{r^2} + \cdots$$

$$\Rightarrow \frac{e^{-ik\bar{n}\cdot\bar{x}'}}{\left(1 - \frac{\bar{n}\cdot\bar{x}'}{r}\right)} \simeq 1 + (\bar{n}\cdot\bar{x}')\left[\frac{1}{r} - ik\right] + \frac{(\bar{n}\cdot\bar{x}')^2}{2}\left[+\frac{2}{r^2} - \frac{2ik}{r} - \frac{k^2}{2}\right] + \cdots$$

El resultado, expresado en órdenes según potencias de $(-ik) \Rightarrow$

$$\bar{A}(\bar{x}) \simeq \frac{e^{ikr}}{cr}\left[\int d^3x'\, \bar{J}(\bar{x}') + \left(\frac{1}{r} - ik\right)\int d^3x'\, \bar{J}(\bar{x}')(\bar{n}\cdot\bar{x}') + \left(\frac{2}{r^2} - \frac{2k}{r} - \frac{k^2}{2}\right)\int d^3x'\, \bar{J}(\bar{x}')(\bar{n}\cdot\bar{x}')^2 + \cdots\right]$$

187

En general escribimos

$$\vec{A}_0(\bar{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}\int \bar{J}(\bar{x}')\, d^3x'$$

$$\vec{A}_1(\bar{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}(-ik)\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\int \bar{J}(\bar{x}')\,\bar{n}\cdot\bar{x}'\, d^3x'$$

$$\vec{A}_2(\bar{x}) = \frac{e^{ikr}}{cr}(-ik)^2\frac{1}{2}\left(1-\frac{4}{ikr}+\frac{4}{(ikr)^2}+\cdots\right)$$

es decir los coeficientes son de la forma

$$\boxed{\vec{A}_m(\bar{x}) \Rightarrow \frac{e^{ikr}}{cr}\frac{(-ik)^m}{m!}\cdot \left(1+\frac{a_1}{(ikr)}+\cdots+\frac{a_m}{(ikr)^m}\right)\cdot \int d^3\bar{x}'\, \bar{J}(\bar{x}')\,(\bar{n}\cdot\bar{x}')^m}$$

Notemos que en la zona próxima $kr \ll 1$ domina el último término de cada coeficiente $\Rightarrow \left[\bar{A}_m(\bar{x})\right]_{kr\to 0} \simeq \frac{a_m}{c\, m!}\left(\frac{1}{r^{m+1}}\right)\cdot I_m$

(en adelante $\boxed{I_m = \int \bar{J}(\bar{x}')\,(\bar{n}\cdot\bar{x}')^m\, d^3\bar{x}'}$)

(188)

En la zona lejana (radiación) $kr \gg 1$

y en consecuencia domina el primer

término de cada polinomio en $(ikr) \Rightarrow$

$$\lim_{kr\to\infty} \bar{A}_m(\bar{x}) \Rightarrow \frac{e^{ikr}}{cr}\frac{(-ik)^m}{m!} I_m$$

o sea
$$\begin{cases} kr\to 0 & A_m \simeq \left(\dfrac{1}{r^{m+1}}\right) \Rightarrow \text{independiente de } k \\ kr\to\infty & A_m \simeq \left(\dfrac{e^{ikr}}{r}\right) \Rightarrow \text{onda esférica} \end{cases}$$

En el caso $kr \to 0$ los campos son independientes de $\underline{k}$ (número de ondas),

Para $kr \to \infty$ tendremos ondas esféricas $\left(\simeq \dfrac{e^{ikr}}{r}\right)$.

Esta dependencia es típica de la zona de radiación.

Debemos ahora concentrarnos en la integral $\int \bar{J}(\bar{x}')\,(\bar{n}\cdot\bar{x}')^m\, d^3x'$

189

Para $n=0$ $\rightarrow$

$$I_0 = \int d^3x' \, \bar{J}(\bar{x}')$$

$$= -\int \bar{x}' (\bar{\nabla}' \cdot \bar{J}) d^3x' = -i\omega \int \bar{x}' \rho(\bar{x}') d^3x'$$

ya que $\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = i\omega\rho$

por lo tanto $I_0 = -i\omega \vec{p}_{electrico}$

donde $\vec{p}_{electrico}$ es el momento dipolar electrico

$$\vec{p}_{electrico} = \int \bar{x}' \rho(\bar{x}') d^3x'$$

y $$\bar{A}_{(dipolo\ electrico)}(\bar{x}) = -i\frac{\omega}{c}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}_{elec}$$

ó $$\boxed{\vec{A}_{(dipolo\ electrico)} = -ik\frac{e^{ikr}}{r}\vec{p}_{electrico}}$$

Para este potencial vector los campos se

escriben

$$\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} = -ik \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \vec{n} \times \vec{p}$$

$$= -ik \left[\frac{1}{r^2}\left(ikr\, e^{ikr} - e^{ikr}\right)\right] \bar{n} \times \bar{p}$$

$$\boxed{\bar{B} = k^2 \frac{e^{ikr}}{r}\left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \vec{n} \times \vec{p}}$$

y para el campo electrico resulta

(190)

$$\bar{E} = \frac{i}{k}\ \bar{\nabla}\times\bar{B}$$

$$= \frac{i}{k}\ \frac{d}{dr}\left(k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\right)\bar{n}\times\bar{n}\times\bar{p}$$

$$= ik\left\{\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)-\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{ikr}}{ikr^2}\right)\right\}(\bar{n}\times\bar{n}\times\bar{p})$$

$$= ik\left[\frac{1}{r^2}\left(rik\,e^{ikr}-e^{ikr}\right)-\frac{1}{(ikr^2)^2}\left((ik)^2r^2e^{ikr}\right.\right.$$

$$\left.\left.-2ikre^{ikr}\right)\right]\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{p})$$

$$= \left[e^{ikr}\right]\left(-\frac{k^2}{r}-\frac{ik}{r^2}-\frac{ik}{r^2}+\frac{2}{r^3}\right)\underbrace{\bar{n}\times\bar{n}\times\bar{p}}$$

$$\bar{n}\times(\bar{n}\times\bar{p}) = -(\bar{n}\times\bar{p})\times\bar{n}$$

$$= k^2\frac{e^{ikr}}{r}(\bar{n}\times\bar{p})\times\bar{n}$$

$$+\left[\frac{1}{r^3}-\frac{ik}{r^2}\right].e^{ikr}.\underbrace{2(\bar{n}\times\bar{n}\times\bar{p})}$$

$$2(\underbrace{\bar{n}\times\bar{n}\times\bar{p}}) = \hat{n}\times(\varepsilon_{ijk}n_jp_k\hat{e}_i)$$

$$= \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{esi}\hat{e}_e n_e n_j p_k$$

$$= \hat{e}_e(\varepsilon_{esi}\varepsilon_{jki})n_en_jp_k$$

$$= \hat{e}_e(-\varepsilon_{sei}\varepsilon_{jki})n_en_jp_k$$

$$= -\vec{p}+\bar{n}(3\bar{n}\cdot\bar{p})$$

$$\Rightarrow \bar{E} = k^2\frac{e^{ikr}}{r}(\bar{n}\times\bar{p})\times\bar{n}$$

191

De manera que si ahora hacemos $kr \to \infty$

tenemos $$\boxed{\begin{aligned} \overline{B} &\simeq k^2(\overline{n}\times\overline{p})\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right) \\ \overline{E} &\simeq \overline{B}\times\overline{n} \end{aligned}}$$ zona de radiación

Noten el factor $\left(\frac{e^{ikr}}{r}\right)$ típico de los campos de radiación (los campos estáticos $\simeq 1/r^2$).

El límite para $kr \to 0$ de los términos para $\overline{E}$ y $\overline{B}$ resultan

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{B} &\simeq (\overline{n}\times\overline{p})\left(\frac{ik}{r^2}\right) \\ \overline{E} &\simeq \left[3\overline{n}(\overline{n}\cdot\overline{p})-\vec{p}\right]\frac{1}{r^3} \end{aligned}}$$ zona próxima

———— ∝ ————

Potencia media temporal radiada por unidad de ángulo sólido.

definimos $\Rightarrow$

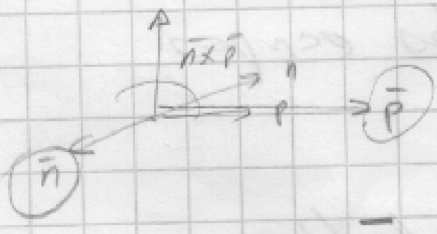
$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{Real}\left[r^2\,\overline{n}\cdot(\overline{E}\times\overline{B}^*)\right]$$

de manera que usando la expresión de los campos en la zona de radiación tenemos $\Rightarrow$

$$\bar E \times \bar B^* = (\bar B \times \bar n) \times \bar B^*$$

$$= \left(k^2 (\bar n \times \bar p) \frac{e^{ikr}}{r} \times \bar n\right) \times \left(k^2 (\bar n \times \bar p) \frac{e^{-ikr}}{r}\right)$$

$$= \frac{k^4}{r^2} \left[(\bar n \times \bar p) \times \bar n\right] \times \left[(\bar n \times \bar p)\right]$$



$$\Rightarrow \left((\underbrace{\bar n \times \bar p}_{\bar X}) \times \bar n\right) \times (\underbrace{\bar n \times \bar p}_{\bar X}) \; // \; \bar n$$

$$\Rightarrow \bar n \cdot (\bar E \times \bar B^*) = \bar n \cdot (\bar X \times \underbrace{\bar n \times \bar X})$$

$$= |\bar n \times (\bar n \times \bar p)|^2$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{d\Omega} = \frac{c k^4}{8\pi} |\bar n \times (\bar n \times \bar p)|^2$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{c k^4}{8\pi} |\bar p|^2 \sin^2 \theta_{\widehat{np}}$$

entonces $P_{\text{media tot}} = \dfrac{c k^4}{8\pi} |\bar p|^2 \cdot 2\pi \cdot \displaystyle\int_0^\pi d\theta \, \sin^3\theta$

$$= \frac{c k^4}{4} |\bar p|^2 \cdot \int_0^\pi d\theta \sin\theta \, (1 - \cos^2\theta)$$

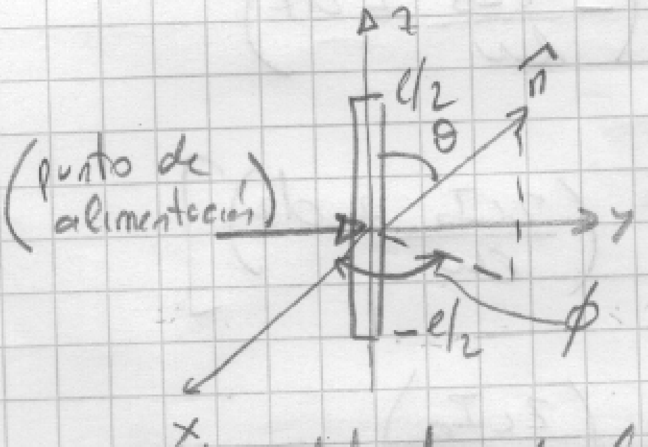
$$\sim \int_1^{-1} (-) dx \, (1 - x^2) \sim \int_{-1}^{1} dx - \int_{-1}^{1} x^2 dx \sim$$

$$= \frac{c k^4}{4} |\bar p|^2 \cdot \left(2 - \frac{1}{3}(1+1)\right) = \frac{c k^4}{3} |\bar p|^2$$

193

$$\Rightarrow \boxed{P_{\text{media total}} = \frac{c k^4}{3} |\bar{p}|^2}$$

Como ejemplo tomemos el caso de una antena como se muestra el dibujo $\Rightarrow$



$\hat{n} \equiv (\theta, \phi)$

El modelado de la corriente corresponde a la expresión

$$I(z) e^{-i\omega t} = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{l}\right) e^{-i\omega t}$$

(máxima en el centro y se anula en los extremos).

La carga por unidad de longitud es entonces

$$\left[\left(\pm \frac{2I_0}{l}\right) + \left(\mp \frac{2I_0}{l}\right) \Rightarrow 0\right]$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{I}(z) = \pm \left(\frac{2I_0}{l}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = \left(\pm \frac{2I_0}{l}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \rho = \left(\pm \frac{2i I_0}{l \omega}\right) e^{-i\omega t} = \rho(z) e^{-i\omega t}$$

(177)

$$p = \int_{-\ell h}^{\ell h} z\,\rho\, dz$$

$$= \int_{-\ell h}^{\ell h} z \left(\frac{2 i I_0}{\ell w}\right)$$

$$= \left[\int_{-\ell h}^{0} \left(-\frac{2 i I_0}{\ell w} z\, dz\right) + \int_{0}^{\ell h} \left(\frac{2 i I_0}{\ell w} z\, dz\right)\right]$$

$$= 2 \int_{0}^{\ell h} z\,dz \left(\frac{2 i I_0}{\ell w}\right)$$

$$P = \frac{4 \ell^2}{4} \cdot \frac{i I_0}{\ell w 2} = i\left(\frac{\ell I_0}{2 w}\right)$$

luego $\dfrac{dP}{d\Omega} = \dfrac{c}{8\pi} \cdot k^4 \cdot \dfrac{\ell^2 I_0^2}{4 w^2} \sin^2\theta$

$$\boxed{\left(\frac{dP}{d\Omega}\right) = \left(\frac{1}{32\pi}\right) \frac{I_0^2}{c} \cdot (k\ell)^2 \cdot \sin^2\theta}$$

y la potencia radiada resulta

$$P = \frac{1}{32\pi} \cdot \frac{I_0^2}{c} (k\ell)^2 \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3}$$

$$\boxed{P = \frac{I_0^2 k^2 \ell^2}{12 c}}$$

(195) Radiacion $\Rightarrow$

Campos de un dipolo magnetico y cuadripolo electrico.

Como vimos, el termino m-esimo del desarrollo del potencial vector corresponde a

$$\vec{A} = \frac{e^{ikr}}{cr}\left(\frac{1}{r} - ik\right)\int \bar{J}(\bar{x}')(\bar{n}\cdot\bar{x}')\,d^3\bar{x}'$$

(la dependencia temporal sigue siendo la de la fuente $\Rightarrow e^{-i\omega t}$).

Trabajaremos con el integrando, esto es

$$\bar{J}(\bar{x}')(\bar{n}\cdot\bar{x}')$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(\bar{n}\cdot\bar{x}')\bar{J}}_{A} + \underbrace{(\bar{n}\cdot\bar{J})\bar{x}'}_{B}\Big] + \underbrace{(\bar{x}'\times\bar{J})\times\bar{n}}_{C}$$

Probemos la expresion anterior $\Rightarrow$

Componentes $\rightarrow$

$$(\bar{n}\cdot\bar{x}')J_\alpha = \sum_{i=1}^{3}(n_i x_i)J_\alpha$$

$$A = (\bar{n}\cdot\bar{x}')J_1 = \sum_i (n_i x_i')J_1$$

$$B = (\bar{n}\cdot\bar{J})\bar{x}_1' = \sum_i (n_i J_i)x_1'$$

$$C = (\bar{x}'\times\bar{J})\times\bar{n} = (-x_1'J_3 + x_3'J_1)n_3 - (x_1'J_2 - x_2'J_1)n_2$$

196

$$\frac{1}{2}(A + B + C) \underset{①}{\equiv}$$

$$\frac{1}{2}\Big[(n_1 x'_1 + n_2 x'_2 + n_3 x'_3) J_1 +$$

$$(n_1 J_1 + \cancel{n_2 J_2} + \cancel{n_3 J_3}) x'_1 +$$

$$(-\cancel{x'_1 J_3 n_3} + x'_3 n_3 J_1 - \cancel{x'_1 J_2 n_2} + x'_2 n_2 J_1 \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[(n_1 x'_1 + n_1 x'_1) J_1 + (n_2 x'_2 + n_2 x'_2) J_1 + (n_3 x'_3 + n_3 x'_3) J_1\Big]$$

$$= \Big[\sum_{i=1}^{3} (n_i x'_i)\Big] J_1$$, en consecuencia $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec{A}(\bar{x}) = \frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{1}{r} - ik\right) \cdot \frac{1}{2c}\int d^3\bar{x}' \left\{ (\bar{n}\cdot\bar{x}')\bar{J}(\bar{x}') + (\bar{n}\cdot\bar{J})\bar{x}' + (\bar{x}' \times \bar{J}(\bar{x}')) \times \bar{n} \right\}}$$

Separaremos esta expresión en dos partes $\Rightarrow$ (Ambas son vectores)

$$\vec{I}_e = \frac{1}{2c}\int d^3\bar{x}' \left[(\bar{n}\cdot\bar{x}')\bar{J}(\bar{x}') + (\bar{n}\cdot\bar{J})\bar{x}'\right]$$

$$\vec{I}_m = \frac{1}{2c}\int d^3\bar{x}' \, (\bar{x}' \times \bar{J}(\bar{x}')) \times \bar{n}$$