Trabajo Práctico I

1. Coloque una carga puntual en cada uno de los vértices de un cuadrado. Muestre que una carga de prueba del mismo signo colocada en el centro del cuadrado está en equilibrio estable frente a pequeños desplazamientos en el plano del cuadrado pero es inestable frente a desplazamientos normales al plano. ¿Qué sucede si colocamos otras dos cargas en el eje normal al cuadrado, a ambos lados del mismo?

   Muestre que, en general, el potencial electrostático no posee puntos de equilibrio estable.

2. Demuestre las siguientes propiedades:

   a) $\vec{V} = \vec{\nabla}\phi \to \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0$

   b) $\vec{V} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \to \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$

   c) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla}^2 \vec{A}$

   ¿Valen las recíprocas de (a) y (b)?

3. Calcule el laplaciano en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

4. La función δ de Dirac

   A partir de la definición
   $$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x)\phi(x) = \phi(0) \tag{1}$$
   justifique las siguientes propiedades:
   $$\text{(i)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta(x) = 1\,, \qquad \text{(ii)}\ \delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0. \tag{2}$$

5. Verifique que las siguientes sucesiones de funciones satisfacen $f_n(x) \to \delta(x)$ si $n \to \infty$. Grafíquelas.

   $$\text{(i)}\ f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } |x| < \frac{1}{2n} \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{1}{2n} \end{cases} \qquad \text{(ii)}\ f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, e^{-nx^2} \qquad \text{(iii)}\ f_n(x) = \frac{n}{\pi} \frac{1}{1 + n^2 x^2}$$

6. Escriba $\delta^{(3)}(\vec{r})$ en coordenadas esféricas y en coordenadas cilíndricas.

7. Bases de funciones

   El conjunto $\{e_n(x) := e^{2\pi i\, nx}, n \in \mathbb{Z}\}$ es una base del espacio de funciones sobre el intervalo $[0,1]$. Esto implica que toda función $\phi(x)$ (bajo condiciones bastante generales) puede escribirse

$$\phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{2\pi i\, nx}$$

   a) Muestre que las funciones $e_n(x)$ de la base son ortogonales. Considere la función $\phi(x) = x$ y calcule los coeficientes c_n.

   b) Utilizando los mismos coeficientes c_n, calcule las sumas finitas

$$\phi_N(x) := \sum_{-N}^{N} c_n\, e^{2\pi i\, nx}$$

   Grafique la función $\phi(x) = x$ y las funciones $\phi_N(x)$, para $N = 0, 1, 2, 10, 100$. Compárelas. ¿Puede afirmarse que $\phi_N(x) \to \phi(x)$ si $N \to \infty$?

8. Exprese la densidad de carga eléctrica ρ para las siguientes distribuciones de carga en términos de la función delta.

   a) Carga q distribuída uniformemente sobre la superficie de un cascarón esférico de radio a centrado en el origen de un sistema de coordenadas esféricas.

   b) Carga q distribuída uniformemente sobre la superficie de un cilindro de longitud L y radio a alineado sobre el eje z.

   c) En coordenadas cilíndricas, una carga q distribuída uniformemente sobre un disco plano de altura despreciable y radio R.

9. Determine el campo eléctrico a una distancia z sobre el punto medio de una recta de longitud $2L$ que posee una densidad carga lineal uniforme λ. A partir del resultado obtenido, calcule el campo eléctrico: i) para puntos muy alejados de la recta ($z \gg L$); ii) si la recta tiene longitud infinita ($L \to \infty$).

10. Ley de Gauss

   a) Un cascarón esférico grueso tiene una densidad de carga dada por

$$\rho = \frac{k}{r^2}, \tag{3}$$

   para $a \le r \le b$. Encuentre el campo eléctrico en las regiones: i) $r < a$, ii) $a < r < b$, iii) $r > b$. Grafique $|\vec{E}|$ en función de r para el caso $b = 2a$.

b) Dos esferas, cada una de radio R y densidad de carga volumétrica uniforme $+\rho$ y $-\rho$, respectivamente, se disponen de forma tal que están parcialmente superpuestas. Llamemos $\vec{d}$ al vector que se dirige desde el centro positivo al negativo. Calcule el campo eléctrico en la región de solapamiento.

11. Considere dos cascarones esféricos concéntricos de radios a y b, respectivamente. Suponga que el cascarón interior tiene una carga q y el externo una carga $-q$, en ambos casos uniformemente distribuidas sobre su superficie. Calcule para esta configuración el potencial electroestático en todo punto del espacio.