Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2021

Prof: O. Civitarese — JTP: M. Matera — Ay. Dipl: D. Actis

Práctica 8 — Simetrías de las ecuaciones de Maxwell

Transformaciones de Lorentz y transformaciones de Gauge

Problema 1. Transformaciones de Lorentz Muestre que a) las componentes contravariantes $x^\mu = (ct, \vec{x})$ de un tetravector se conectan con las componentes $(x')^\nu$ en un sistema de referencia con velocidad relativa $\vec{v} = c\vec{\beta}$ según

$$(x')^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x^\mu \;\text{ con }\; \Lambda^\nu{}_\mu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\vec{\beta}^t \\ -\vec{\beta} & \frac{\mathbf{1}_{3\times 3}}{\gamma} + \frac{\gamma}{\gamma+1}\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}^t \end{pmatrix} \;\text{ donde }\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^t\cdot\vec{\beta}}}$$

b) el intervalo $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ es una cantidad invariante ante cambios de sistemas de coordenadas (aquí $\eta_{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \vec{0} \\ \vec{0} & -\mathbf{1}_{3,3} \end{smallmatrix}\right)$ es el *tensor métrico*) c) Construya en forma explícita la transformación de Lorentz inversa. d) Muestre que las transformaciones de Lorentz junto con las rotaciones espaciales forman un grupo. Tip: analice las transformaciones infinitesimales.

Problema 2. Forma covariante de las Ec. de Maxwell Se define el tensor de Maxwell como $F_{\mu\nu} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \vec{E}/c \\ -\vec{E}/c & B^*_{ij} \end{smallmatrix}\right)$ con $B^*_{ij} = -\vec{B}^k\epsilon_{ijk}$. a) Dé la expresión covariante para la ley de Fuerza de Lorentz sobre una partícula cargada. b) Muestre que las ecuaciones de Maxwell se expresan como

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu \quad \partial_\mu(\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}) = 0$$

con $\vec{J}^\mu = (c\rho, \vec{j})$ el tetravector *densidad de corriente* y $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ el *tensor de Levi-Civita*. c) Mediante sus propiedades de transformación, dé la expresión para los campos $\vec{E}'$ y $\vec{B}'$ observados desde un sistema de referencia en movimiento, con velocidad $\vec{v}$. d) Muestre que $\vec{E}\cdot\vec{B}$ y $\vec{E}^2 - \vec{B}^2c^2$ con cantidades invariantes ante transformaciones de Lorentz.

Problema 3. Efecto Doppler relativista a) Construya el tensor $F_{\mu\nu}$ para una onda electromagnética originada por una fuente en reposo, en la aproximación de onda plana. b) Calcule cómo transforman las componentes de $F_{\mu\nu}$ bajo transformaciones de Lorentz. c) Determine la frecuencia y longitud de onda que detecta la onda un observador que se mueve con velocidad relativa $\vec{v}$ respecto a la fuente si i) se acerca a la fuente ii) se aleja a la fuente iii) se mueve en dirección perpendicular a la dirección en la que está la fuente.

Problema 4. Densidad de corriente Muestre que $J^\mu = (\rho c, \rho\vec{v})$ a) transforma ante transformaciones de Lorentz como un tetravector. b) $\int_\Sigma J^0 d^3x = Q$ con Σ el volumen en todo el espacio para cualquier tiempo t fijo, respecto a cualquier sistema de referencia.

Problema 5. Integrales y transformaciones de Lorentz a) Muestre que el elemento de (hiper)volumen d^4x es invariante ante transformaciones de Lorentz. b) Si $\Phi(x,t) \to \delta(t-t_0)$ en un marco de referencia, determine explícitamente la forma límite de $\tilde{\Phi}(\tilde{x},\tilde{t})$ respecto a otro marco de referencia. c) Si Φ es un campo escalar, determine cómo se relacionan las integrales $\int \Phi(x,t)d^3x$ y $\int \tilde{\Phi}(\tilde{x},\tilde{t})d^3\tilde{x}$. d) Determine cómo transforma $\delta(\check{n}\cdot\vec{x} - a)$ donde $\check{n}$ es un versor en $\mathbb{R}^3$

Problema 6. Tensor de energía Momento El tensor de Energía-Impulso del campo electromagnético se define según

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}(F_{\mu\alpha}F_{\nu\beta}\eta^{\alpha\beta} - \frac{\eta_{\mu\nu}}{4}F_{\alpha\beta}F_{\alpha'\beta'}\eta^{\alpha\alpha'}\eta^{\beta\beta'})$$

Dé una interpretación de sus componentes y mueestre que satisface a) $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ b)$T_{\mu\nu}\eta^{\mu\nu} = T^\mu_\mu = 0$ c)$T^{00} < 0$ d)$T_{\mu\nu,\alpha}\eta^{\nu\alpha} + F_{\mu\nu}J^\nu = 0$

Problema 7. Potencial tetravector a) Muestre que las Ec. de Maxwell homogeneas se satisfacen trivialmente si, $F_{\mu\nu} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\alpha A_\beta/2 = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ para cierto tetravector A_μ. b) Dé una expresión para las componentes de A_μ en términos del potencial escalar ϕ y el potencial vector $\vec{A}$. c) Muestre que A_μ y $A_\mu + \partial_\mu \Phi$ dan origen al mismo $F_{\mu\nu}$, y que por lo tanto, se puede asumir que $\partial_\mu A^\mu = f(t, \vec{x})$ para cualquier función arbitraria f. d) ¿Qué condición debe satisfacer $\vec{A}_\nu$ para que $F_{\mu\nu}$ sea solución de las ecuaciones de Maxwell inhomogeneas?

Problema 8. Solución fundamental en el gauge de Lorentz Muestre que

$$A_\mu(x^\nu) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}_\mu((x')^\nu)\delta(t' - t + \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c})}{|(x^\mu - (x')^\mu)U_\mu|} d^4x'$$

con $U_\mu = \partial_\mu(ct)$, $x^\mu = (ct, \vec{x})$ y $(x')^\mu = (ct', \vec{x}')$ a) Transforma como un campo tetravectorial, b) satisface la condición del gauge de Lorentz y c) es solución de $\Box A_\mu = \mu_0 j_\mu$.

Problema 9. Fuentes dipolares Considere una distribución de cargas y corrientes, con carga neta nula, tales que respecto a cierto sistema de referencia, poseen un momento dipolar eléctrico $\vec{p}_0$ y un momento dipolar magnético $\vec{m}_0$ estacionarios, localizados cerca del origen. a) Determine el correspondiente tetravector potencial, a grandes distancias del origen. b) Determine la forma de los campos eléctrico y magnético. c) Dé una expresión covariante para ese potencial tetravector. d) Determine a partir de esa expresión cómo deberían transformar los momentos dipolares ante transformaciones de Lorentz.

Problema 10. Gauge de Coulomb Considere una elección de gauge tal que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ respecto de un cierto sistema de coordenadas. a) Escriba las ecuaciones que satisfacen las componentes de $\vec{A}$ en dicho sistema de coordenadas. b) Determine qué condición de gauge satisface A_μ respecto de un sistema de referencia en movimiento a velocidad $\vec{v}$. c) Determine la transformación de gauge que debe realizarse para que el potencial en el nuevo sistema de referencia cumpla con $\nabla \cdot \vec{A}' = 0$. d) Muestre que en el gauge de Coulomb, la fuente del potencial vector es la componente transversal de la densidad de corriente. e) Muestre que para un sistema de cargas y corrientes estacionarias, los gauges de Coulomb y Lorentz son equivalentes.