

## Práctica 5 — Electrodinámica: Ecuaciones de Maxwell

### Teorema de Poynting

**Problema 1.** Dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  están separadas por un material conductor de conductividad  $\sigma$ . Se establece una diferencia de potencial  $V$  entre las esferas. Calcule la corriente que fluye desde  $a$  hasta  $b$  y encuentre la resistencia del material.

**Problema 2.** En el interior de una esfera metálica de conductividad  $\sigma$ , existe a  $t = 0$  una carga  $Q$  localizada en el punto  $\mathbf{x}_0$ . Determine la distribución de cargas en un tiempo posterior  $t$ . Tip: Tenga en cuenta el principio de conservación de la carga.

**Problema 3.** Por un alambre recto muy largo circula una corriente eléctrica que varía como  $I(t) = I_0(1 - e^{-t/\tau})$ . Determine los campos eléctrico y magnético en puntos arbitrarios del entorno del alambre. Asuma que  $\tau \gg \frac{\epsilon_0}{\sigma}$  de manera que el término de Maxwell puede asumirse despreciable. Tip: Descomponga el campo eléctrico en un término irrotacional y uno solenoidal.

**Problema 4.** Muestre que  $\frac{d}{dt} \int_S \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} + \oint_{\partial S} \vec{B}(\vec{r}, t) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \times d\vec{\ell}$

**Problema 5. Inducción mutua** Una espira conductora cuadrada de lado  $a$ , se encuentra cerca del centro de un alambre conductor largo, que yace en el plano de la espira, paralelo a uno de los lados, a una distancia  $b$ . Por el alambre circula una corriente alterna de amplitud  $i_0$  y frecuencia  $f = \omega/(2\pi)$ . Si la resistencia de la espira es  $R$ , determine

- los campos eléctrico y magnético inducidos por el alambre.
- la inducción mutua del sistema.
- la FEM inducida sobre la espira, y la corriente que circula por esta, y la energía disipada. ¿Quién aporta esta energía?

**Problema 6.** En una región del espacio se tienen los siguientes campos, en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{E} = \begin{cases} \frac{E_0 t}{T} \rho (1 - \rho^2/a^2) e^{-t^2/T} \hat{\phi} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases} \quad \mathbf{B} = \begin{cases} \frac{E_0}{2} (1 - 3\rho^2/a^2) e^{-t^2/T} \hat{z} & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$$

- Verifique que se trata de un campo electromagnético (soluciones de las ecuaciones de Maxwell) y encuentre las fuentes.
- Hallar las densidades de energía eléctrica, magnética y electromagnética.
- Encuentre la expresión del vector de Poynting en todo el espacio. ¿Hacia dónde se dirige el flujo de energía?
- Halle la fuerza que experimentará una carga puntual  $q$  que en el instante  $t = a/c$  se encuentra en el punto  $\vec{r} = (a/2)\hat{x}$  y se mueve con velocidad  $\vec{v} = -(3c/4)\hat{x}$ .

**Problema 7.** Un alambre cilíndrico recto y muy largo de sección uniforme  $\pi a^2$ , de un material de conductividad  $\sigma$  y permeabilidad  $\mu \approx \mu_0$ , transporta una corriente alterna de amplitud  $I_0$  y frecuencia  $f$ . Asumiendo que  $\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E}$ , determinar 1) la distribución de cargas y corrientes, y los correspondientes campos eléctricos y magnéticos en función de la frecuencia. 2) las densidades de energía eléctrica y magnética. 3) El vector de Poynting.

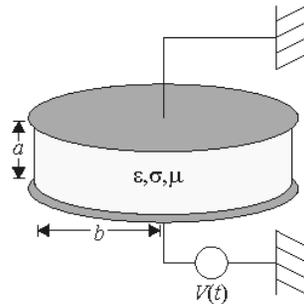
**Problema 8.** En el problema 5 se discutió el caso de una espira conductora acoplada a un alambre infinito por el fenómeno de inducción mutua. En las condiciones de ese problema, determine 1) el valor medio del vector de Poynting en todo el espacio, despreciando las contribuciones a los campos provenientes de la espira, y el flujo medio por unidad de longitud. 2) Los campos eléctrico y magnético generados por la espira, en la aproximación dipolar. 3) La contribución al flujo del vector de Poynting a través de una superficie que rodee al alambre.

**Problema 9. Teorema de Poynting** Suponga un pequeño imán (un dipolo magnético  $m$ ) en cuyo interior hay una carga  $q$ .

1. Calcule las densidades de energía eléctrica y magnética en el sistema.
2. Determine el vector de Poynting en cada punto del espacio.
3. Compruebe que se verifica el teorema de Poynting en forma diferencial.

**Problema 10.** El espacio entre dos placas circulares conductoras y paralelas, se encuentra lleno de un material de permitividad  $\epsilon$ , conductividad  $\sigma$  y permeabilidad magnética  $\mu$ . El radio de las placas es  $b$ , y la distancia entre ellas es  $a$  ( $a \ll b$ ). La placa superior está permanentemente a tierra, mientras que el centro de la inferior se encuentra a una tensión  $V(t)$ .

1. Halle el campo eléctrico entre las placas y la corriente total que fluye entre ellas.
2. Calcule el campo magnético entre las placas.
3. Calcule la energía electromagnética almacenada en el dieléctrico.
4. Halle el vector de Poynting en el espacio entre las placas, así como su flujo a través de una superficie cilíndrica de radio  $b$  y altura  $a$ , concéntrica con el sistema.



**Problema 11.** Considere un material con una relación de dispersión  $\omega(k) = \omega_0 + \frac{c^2 k^2}{2\omega_0}$ , ( $\omega_0 = 1\text{GHz}$ ) en el que se produce un pulso electromagnético con una distribución gaussiana, de forma que inicialmente

$$\vec{E}(\vec{r}, 0) = (1\text{V/m}) \times e^{-\frac{z^2}{2a^2}} \cos(kz) \check{u}_x \text{ y } \vec{B}(\vec{r}, 0) = \left(\frac{2}{c}\text{V/m}\right) \frac{z}{a} e^{-\frac{z^2}{2a^2}} \cos(kz) \check{u}_y$$

con  $a = 1\text{mm}$  Determine a) la velocidad de grupo asociada al paquete b) la forma funcional de los campos como función del tiempo. ¿Será aceptable esta relación de dispersión en el régimen  $k > k_0$ ?