Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2020

Prof: O. Civitarese — JTP: M. Matera — Ay. Dipl: D. Actis

Práctica 4 — Magnetostática

Problema 1. Una corriente I circula a traves de un alambre de radio a. Determine la densidad de corriente si esta está a) uniformemente distribuída y b) la distribución es inversamente proporcional a la distancia al eje.

Problema 2. Utilizando el hecho de que $\nabla \cdot \vec{J} = 0$, demuestre las siguientes identidades para distribuciones localizadas de corrientes:

1. $(\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{J}(\vec{x}') = (\vec{x} \cdot \vec{J})\vec{x}' - \vec{x} \times (\vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}'))$
2. $\int (\vec{x} \cdot \vec{x}')\vec{J}(\vec{x}')d^3x' = -\frac{1}{2}\vec{x} \times \int \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}')d^3x'$

Problema 3. Considere una distribución de cargas y corrientes confinadas en un volumen V, si $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente y $\mathbf{p}$ es el momento dipolar total, mostrar que $\int_V \mathbf{J} d^3r = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$

Problema 4. Mostrar que para una distribución de corriente acotada y si no hay variaciones de la densidad de carga en ningún punto del espacio, el potencial vector $\vec{A}$, está dado por $\vec{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|} d^3\mathbf{r}'$, que satisface $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$. Calcule el rotor de $\mathbf{A}$ y encuentre la expresión para $\mathbf{B}$. Muestre que si $\mathbf{J}(\mathbf{r}') = I_0 \int \delta^3(\mathbf{r}' - \mathcal{C}(s)) \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial s} ds$ para una cierta curva *cerrada* $\mathcal{C}$, se recupera la ley de Biot y Savart.

Problema 5. Mostrar que el primer término en el desarrollo multipolar del potencial vector viene dado por $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{r}|^3}$ con $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{x}' \times \vec{J}(\vec{x}')d^3x'$ es el momento dipolar magnético. A partir de este resultado, dé una expresión para el campo magnético $\vec{B}(\vec{r})$

Problema 6. Sea $\mathbf{B} = B\hat{k}$ un campo magnético constante. Verificar que los siguientes potenciales vector satisfacen $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$:

1. $\mathbf{A}(x, y, z) = xB\hat{j}$
2. $\mathbf{A}(\rho, \varphi, z) = \frac{1}{2}B\rho\hat{e}_\varphi$ (en coordenadas cilíndricas)
3. $\mathbf{A}(r, \theta, \phi) = \frac{1}{2}Br\sin(\theta)\hat{e}_\phi$ (en coordenadas esféricas). Tip: Mostrar que $\hat{k} = \cos(\theta)\hat{e}_r - \sin(\theta)\hat{e}_\theta$

Problema 7. Una esfera de radio a tiene una distribución uniforme de carga superficial σ sobre su superficie y se encuentra rotando con velocidad angular constante ω. a) Encuentre el potencial vector $\mathbf{A}$ y el campo magnético $\mathbf{B}$ en todo el espacio. b) Determine el momento dipolar magnético de la esfera y muestre que para $r > R$ los campo corresponden a los de ese dipolo.

Problema 8. Una esfera de radio $a = 10\text{cm}$ tiene una magnetización permanente $M = 300\,\text{kA/m}$. a) Determine el campo magnético B en todo el espacio. b) Determine la energía magnética asociada, y la energía asociada a la magnetización de la muestra. c) Si ahora se conecta un campo magnético externo uniforme B_{ext}, determine el cambio en la energía magnética asociada.

Problema 9. Sea una corriente estacionaria I que circula por una espira conductora circular de radio a y de sección despreciable. a) Dé una expresión para el vector densidad de corriente. b) Determine el campo magnético generado por la corriente en los siguientes casos:

i) En el centro de la circunferencia.

ii) Cerca de la corriente ($|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \ll a$ para algún $\mathbf{r}'$ sobre el alambre).

iii) A distancias grandes del centro de la circunferencia ($|\mathbf{r}| \gg a$).

c) Repita los cálculos para una espira cuadrada de lado $2a$.

Problema 10. Un cilindro infinito de radio R cuyo eje coincide con el eje z tiene una magnetización permanente $M = ks\hat{\mathbf{z}}$, donde k es una constante y s es la distancia al eje. No hay corrientes libres. Encuentre el campo magnético dentro y fuera del cilindro por dos diferentes métodos:

a Obteniendo las corrientes de magnetización y a partir de ahí el campo que generan.

b Usando la Ley de Ampère para obtener el campo $\mathbf{H}$.

Problema 11. Determine los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio originado por una barra cilíndrica ferromagnética uniformemente imantada con magnetización $\mathbf{M}_f$, longitud L y sección $A = \pi a^2$. Grafique las correspondientes líneas de campo.

Problema 12. Un toroide de sección cuadrada de radio interior a y radio exterior b, que está construído con un material de permeabilidad magnética μ, se encuentra rodeado completamente por un bobinado conductor con una densidad de n espiras por unidad de longitud. Si por el alambre circula una corriente I, a) determine el valor de los campos $\mathbf{H}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{M}$ en todo el espacio. Tip: utilice la noción de líneas de campo magnético.

Problema 13. Ferromagnetismo e histéresis Una esfera de radio 10 cm está compuesta por un material ferromagnético cuya curva de histéresis es de la forma

$$M(h) = \pm\frac{M_s}{\pi/2}\arctan(\chi\pi\frac{H+H_c}{2M_s})$$

con $H_c = 16\,\mathrm{kA/m}$ y $M_s = 480\,\mathrm{kA/m}$ y $\chi = 24$

a) Determine la magnetización remanente de la bolita en ausencia de campo externo.

b) Dé una estimación de la susceptibilidad magnética en estas condiciones, para campo pequeño.

c) Si ahora se somete al sistema a un campo externo uniforme $B_0 = 0.5\,\mathrm{T}$ alineado en la dirección y en sentido de la magnetización remanente, determine el campo magnético producido por la esferita.

d) Determine la energía magnética a. antes de encender el campo externo, b. inmediatamente después de encender el campo, c. cuando el sistema alcanza su estado estacionario. Discuta entre qué agentes piensa que se dan estos intercambios de energía.

e) Suponga que el sentido del campo magnético se invierte con una frecuencia de 50Hz. Determine la potencia neta absorbida por la esferita.