Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2021

Prof: O. Civitarese — JTP: M. Matera — Ay. Dipl: D. Actis

Práctica 1 — Electrostática

Distribuciones de Carga. Ecuación de Laplace y Poisson sin bordes. Momentos multipolares.

Problema 1. Distribuciones de carga Exprese, utilizando funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, las densidades volumétricas para las siguientes distribuciones de carga:

1. Una carga $Q = 500\mu\mathrm{C}$ distribuída uniformemente sobre una superficie esférica de radio $R = 10\mathrm{cm}$.
2. Una carga $\lambda = 10\mu\mathrm{C}$ por unidad de longitud, distribuída uniformemente sobre una superficie cilíndrica de radio $R = 1\mathrm{mm}$
3. Una carga $\sigma = 20\mu C/\mathrm{m}^2$ por unidad de superficie, distribuída uniformemente sobre un disco plano, de espesor despreciable y radio $R = 2\mathrm{cm}$.

Problema 2. Calcule el campo eléctrico y el potencial generado por una esfera de radio $a = 3\mathrm{cm}$ y carga total $Q = 5\mu\mathrm{C}$ en función de la posición para los siguientes casos:

1. La esfera es conductora
2. La esfera tiene una densidad volumétrica de carga constante
3. La esfera tiene una densidad volumétrica esféricamente simétrica, y que varía radialmente como r^n con $n = 2, -2$.

Graficar el potencial y el módulo del campo eléctrico en función de r en cada caso, y analizar la continuidad de estas funciones para $r = a$.

Problema 3. Calcule el campo eléctrico y el potencial electrostático en función de la posición, y las correspondientes líneas equipotenciales para las siguientes distribuciones de carga:

1. un alambre recto infinito con densidad de carga $\lambda = 20\mathrm{pC/m}$.
2. dos alambres rectos, infinitos, paralelos entre sí y separados por una distancia $d = 0,5\mathrm{mm}$, uniformemente cargados con cargas $\lambda = 5\mathrm{pCm}$ y $-\lambda$ respectivamente.
3. un plano infinito uniformemente cargado con densidad de carga $\sigma = 20\mu\mathrm{C/m}^2$.
4. dos planos paralelos infinitos, separados por una distancia $d = 1\mathrm{mm}$, uniformemente cargados con densidad de carga $\sigma = 50\mu\mathrm{C/m}^2$ y $-\sigma$.
5. Un cilindro infinito de radio $a = 1\mathrm{mm}$ cargado uniformemente en volumen con densidad de carga $\rho = 100\mu\mathrm{C/m}^3$.
6. Un cilindro infinito de radio $a = 2\mathrm{mm}$ cargado uniformemente en su superficie con densidad de carga $\sigma = 500\mathrm{pC/m}^2$.

Problema 4. Considere un cascarón esférico conductor de radio interior $a = 10\mathrm{cm}$ y radio exterior $b = 15\mathrm{cm}$, rodea a una carga puntual de valor $q = 50\mu\mathrm{C}$, ubicada en un punto a una distancia $a/2$ del centro del cascarón. Determine el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio en las siguientes situaciones:

1. La esfera se encuentra aislada, y posee una carga total $Q = 20\mu\mathrm{C}$.
2. La esfera se encuentra conectada a “tierra”.

¿Qué podemos decir de la distribución de carga sobre la esfera en estos casos?

Problema 5. Una esfera de radio $R = 20$cm uniformemente cargada tiene en su interior una "vacuola" esférica de radio $a = 1$cm, cuyo centro se encuentra a una distancia $d = 3$cm del centro de la esfera mayor. Si la carga total de la esfera es de $Q = 10\mu$C, determine el campo eléctrico en cualquier punto del interior de la vacuola.

Problema 6. Energía de configuración Una esfera de radio $a = 20$cm posee una carga total $Q = 10$pC. Determine la energía electrostática asociada a las siguientes configuraciones:

1. Toda la carga concentrada en una región esférica de radio $b \ll a$ en torno a algún punto dentro de la esfera.
2. La carga distribuída volumétricamente en la esfera, con densidad de carga proporcional a la distancia a su centro.
3. La carga distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera.

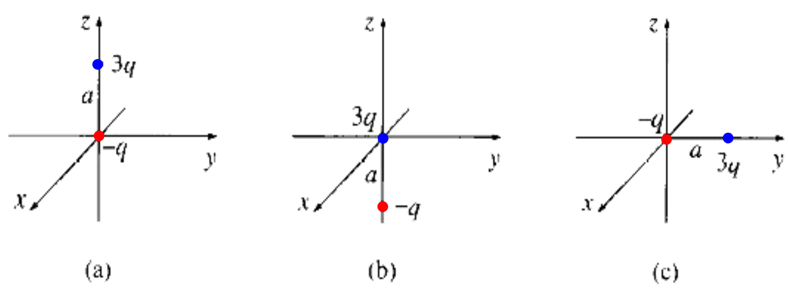
Problema 7. Dipolos eléctricos La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente de magnitud $|\mathbf{p}| = 6.1 \times 10^{-30}\mathbf{C}$m, orientado en la dirección que une al átomo de oxígeno con el punto medio de la linea que une a los átomos de Hidrógeno.

1. La fuerza que le ejerce un electrón (de carga $q \approx -1.6 \times 10^{-19}\mathbf{C}$) que se encuentra a una distancia grande respecto del tamaño de la molécula.
2. El torque que sufre la molécula en presencia de un campo externo de $1\mathbf{V/m}$, y el trabajo necesario para rotar a la molécula desde la orientación paralela a la antiparalela al campo.
3. La fuerza que le ejerce otra molécula de agua, que se encuentra a una distancia grande respecto del tamaño de las moléculas.
4. El torque que siente una molécula de agua debido a la presencia de la otra, como función de la distancia y la orientación relativa.

Problema 8. Utilizando el desarrollo multipolar de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, determine en forma genérica el potencial originado por una distribución de cargas $\rho(\vec{r})$ localizada en una región $\mathcal{R}$, en la región exterior a $\mathcal{R}$. Represente gráficamente las contribuciones dipolares (l=1) y cuadrupolares (l=2) y dé explícitamente las expresiones para los momentos correspondientes en coordenadas cartesianas.

Problema 9. Determine la expansión en multipolos para un disco de radio a y espesor despreciable, con una distribución uniforme de carga σ.

Problema 10. Momentos multipolares para distribuciones discretas de carga Dos cargas puntuales $3q$ y $-q$ se encuentran separadas una distancia a. Para cada configuración de la figura, encontrar los dos primeros momentos multipolares y el potencial aproximado, a grandes distancias, incluyendo ambas contribuciones (monopolar y dipolar).



Problema 11. El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro viene dado por

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} e^{-2r/a}(1/r + 1/a)$$

donde $a \approx 1 \times 10^{-10}$m es el "radio de Bohr" y $q \approx 1.6 \times 10^{-19}$C es la carga del electrón. Encuentre la distribución de carga estática que daría lugar a este potencial e interprete este resultado físicamente.

Problema 12. Una carga $+q$ se encuentra distribuida uniformemente a lo largo del eje z, entre $z = -a$ y $z = +a$. Determine la expresión del potencial electrostático asociado, como serie de potencias en $1/r$.

Problema 13. Capacitores Calcular la capacidad de los siguientes capacitores y la energía total almacenada en función de la carga:

1. Dos placas conductoras paralelas, de gran área $A = 20\text{cm}^2$, separadas por una distancia $d = 1\text{cm}$. Determine la fuerza que una de las armaduras ejerce sobre la otra.

2. Dos esferas concénctricas conductoras de radios a y b. ¿Qué ocurre en el límite $b \gg a$? ¿ y si $|a - b| \ll a, b$?

3. dos cilíndros concéntricos, conductores de radios a y b, de longitud $L \gg a, b$.

Problema 14. En coordenadas esféricas, la ecuación de Laplace tiene la forma

$$\nabla^2 F(r,\theta,\phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rF(r,\theta,\phi))}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial F(r,\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 F(r,\theta,\phi)}{\partial\phi^2} = 0$$

a) Construya la solución general por el método de separación de variables. b) Exprese la función de Green correspondiente como combinación lineal de soluciones de variables separadas. c) Utilizando el teorema de adición de los esféricos armónicos, verifique que las sumas parciales para los primeros valores de l coinciden con la expansión en serie de potencias en $1/r_>$ de $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}$.

Problema 15. Encuentre la solución general para la ecuación de Laplace para simetría cilíndrica, regular fuera del origen.