Electromagnetismo - Lic. Física

Año 2020

Prof: O. Civitarese — JTP: M. Matera — Ay. Dipl: D. Actis

Práctica 0 — Repaso y algo más

Campos escalares y vectoriales, cálculo diferencial e integral, delta de Dirac. EDOs.

Problema 1. Grafique las siguientes curvas, y calcule sus vectores velocidad:

1. $\sigma(t) = \hat{\mathbf{x}}/t$ con $0 < t < 1$.
2. $\sigma(t) = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}t$ con $\mathbf{r}_0 = (1, 1, 1)$, $\Delta\mathbf{r} = (1, -1, -1)$ y $0 < t < 1$.
3. $\sigma(t) = (\cos(t) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) + 2)\hat{\mathbf{y}}$, $0 < t < \pi/2$
4. $\sigma(t) = \cos(t)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) - 2)\hat{\mathbf{y}} + (3t)\mathbf{z}$, $0 < t < 10$
5. $\sigma(t) = \sin(t)\hat{\mathbf{x}} - 3t\hat{\mathbf{y}}$ con $0 < t < 4\pi$.

Problema 2. Grafique las siguientes superficies, y encuentre los correspondientes elementos de área:

1. $A(u, v) = (1 - u)\hat{\mathbf{x}} + (1 - v)\hat{\mathbf{y}}$ $0 < u, v < 1$.
2. $A(\theta, \phi) = (\cos(\phi)\sin(\theta) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi)\sin(\theta) + 1)\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \theta < \pi/2$, $-\pi < \phi < \pi$.
3. $A(z, \phi) = \cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi) - 1)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \phi < \pi$, $-1 < z < 1$.

Problema 3. Dé una parametrización para las siguientes curvas:

1. Un segmento de recta que sale del punto $(1, 0, 0)$ y llega hasta el punto $(1, 2, 1)$
2. Un segmento de circunferencia que sale del punto $(1, 0, 0)$, pasa por el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y llega al punto $(0, 1, 0)$.

Problema 4. Dé una parametrización para las siguientes superficies, y sus correspondientes elementos de área:

1. El paralelogramo generado por los vectores $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.
2. La esfera de radio 2 centrada en el punto $(1, 0, 0)$.
3. Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

Problema 5. Dé una parametrización para los siguientes volúmenes, y sus correspondientes elementos de volumen:

1. Un cubo de lado 1, centrado en el origen, y con sus caras perpendiculares a los ejes cartesianos.
2. La esfera de radio 1, centrada en el origen.
3. Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

Problema 6. Sea $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} + z_0\hat{\mathbf{z}}$. Determine el gradiente de las funciones $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ y $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$.

Problema 7. Calcule la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales

1. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$
2. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}$
3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\hat{\mathbf{z}}$
4. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2+a^2}$
5. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$
6. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$
7. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ con $\mathbf{E_0}$ y $\mathbf{k}$ vectores constantes.

Problema 8. Demuestre que a) La divergencia del rotor de una función suave es siempre nula. b) El rotor del gradiente de una función suave es siempre nulo.

Problema 9. Dé las expresiones generales para $\nabla\psi(\vec{r})$, $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r})$, $\nabla \times \vec{A}(\vec{r})$ y $\nabla^2\psi(\vec{r})$ en coordenadas

a) Cilíndricas.

b) Esféricas.

c) Ortogonales generales ortogonales.

Problema 10. Demostrar las siguientes identidades, donde $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ y $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $\nabla \times \nabla \times \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2\vec{A}$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\phi) = 0$

Problema 11. Demostrar las siguientes identidades, donde $\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $\vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

a) $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$

c) $\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$

Problema 12. Integrales de línea Calcule las integrales de linea asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} + 2x\hat{\mathbf{y}}$ a lo largo de las siguientes curvas:

1. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a} = (2, -2, 0)$ al punto $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$.
2. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$.
3. Recorriendo un arco de circunferencia centrado en el origen, que va del punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{b}$.
4. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (1, 0, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$, y finalmente, volviendo en linea recta hasta el punto $\mathbf{a}$.

Repita los cálculos para el campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xy^2\mathbf{x} + 2yx^2\mathbf{y}$

Problema 13. Integrales de superficie Calcule las integrales de linea asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xz\hat{\mathbf{x}} + (x + 2)\hat{\mathbf{y}} + y(z^2 - 3)\mathbf{z}$ sobre la superficie de un cubo de lado 2, con un vértice en el origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y sus aristas paralelas a los ejes coordenados, excluyendo la cara que contiene al punto $(1, 1, 0)$.

Problema 14. Integrales de volumen Calcule las siguientes integrales de volumen sobre el cubo unitario $V = \{\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}/0 \leq x, y, z \leq 1\}$:

1. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = xyz^2$
2. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = z^2$

Problema 15. Teorema fundamental Compruebe el teorema fundamental para gradientes usando $\phi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2yz^3$ para calcular la integral de linea de la función $\mathbf{T}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ desde el punto $a = (0, 0, 0)$ al punto $b = (1, 1, 1)$ y los caminos:

1. $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$ de a tramos rectos.
2. por el camino parabólico $z = x^2$, $y = x$.

Problema 16. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 1. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = 0$$

y grafique el caso en que $f(0) = 1$ y $\lambda = 2$.

Problema 17. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 2. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = e^{-t^2/a^2}$$

y grafique el caso en que $f(-\infty) = 0$, $a = 1$ y $\lambda = 2$.

Problema 18. Soluciones Ec. Diferenciales lineales 3. Encuentre la solución general de la Ec. diferencial

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \eta\frac{df(t)}{dt} + \lambda f(t) = 0$$

y grafique el caso en que $f(0) = 1$, $\frac{df(0)}{dt} = 0$ si a) $\eta = 1$, $\lambda = 4\pi^2$, b) $\lambda = 4\pi^2 = \eta^2/4$ y c) $\lambda = 4\pi^2 = \eta^2/8$.

Problema 19. Delta de Dirac Calcule las siguientes integrales de volumen

1. $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a})(r^2 + \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} + a^2)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{a}$ un vector fijo y $a = |\mathbf{a}|$) sobre todo el espacio.
2. $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{c})(r^4 + r^2\mathbf{r}\cdot\mathbf{c} + c^4)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{c} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 6 centrada en el origen.
3. $\int \delta^3(\mathbf{d} - \mathbf{r})\mathbf{r}\cdot(\mathbf{d} - \mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{d} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 2 centrada en $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$.

Problema 20. Demostrar que $\{\sin(\frac{m\pi}{L}x)\}_{m\in\mathbb{Z}}$, $\{\cos(\frac{m\pi}{L}x)\}_{m\in\mathbb{Z}_0}$ y $\{\exp(-\alpha x)\}_{\alpha\in\mathbb{R}_+}$ son bases del espacio de Hilbert definido en el intervalo $(0, L)$. Recordar que no todas las bases tiene que ser ortonormales, pero *al menos*, sí tienen que ser completas.