

Práctica 1 — Electrostática

Distribuciones de Carga. Ecuación de Laplace y Poisson sin bordes. Momentos multipolares.

Problema 1. Distribuciones de carga Exprese, utilizando funciones delta de Dirac en las coordenadas apropiadas, las densidades volumétricas para las siguientes distribuciones de carga:

1. Una carga Q distribuída uniformemente sobre una superficie esférica de radio R .
2. Una carga λ por unidad de longitud, distribuída uniformemente sobre una superficie cilíndrica de radio R
3. Una carga σ por unidad de superficie, distribuída uniformemente sobre un disco plano, de espesor despreciable y radio R .

Problema 2. Calcule el campo eléctrico y el potencial generado por una esfera de radio a y carga total Q en función de la posición para los siguientes casos:

1. La esfera es conductora
2. La esfera tiene una densidad volumétrica de carga constante
3. La esfera tiene una densidad volumétrica esféricamente simétrica, y que varía radialmente como r^n con $n = 2, -2$.

Graficar el potencial y el módulo del campo eléctrico en función de r en cada caso, y analizar la continuidad de estas funciones para $r = a$.

Problema 3. Calcule el campo eléctrico y el potencial electrostático en función de la posición, y las correspondientes líneas equipotenciales para las siguientes distribuciones de carga:

1. un alambre recto infinito con densidad de carga λ .
2. dos alambres rectos, infinitos, paralelos entre sí y separados por una distancia d , uniformemente cargados con cargas λ y $-\lambda$ respectivamente.
3. un plano infinito uniformemente cargado con densidad de carga σ .
4. dos planos paralelos infinitos, separados por una distancia d , uniformemente cargado con densidad de carga σ y $-\sigma$.
5. Un cilindro infinito de radio a cargado uniformemente en volumen con densidad de carga ρ .
6. Un cilindro infinito de radio a cargado uniformemente en su superficie con densidad de carga σ .

Problema 4. Considere un cascarón esférico conductor de radio interior a y radio exterior b , rodea a una carga puntual de valor q , ubicada en un punto a una distancia $a/2$ del centro del cascarón. Determine el campo eléctrico y el potencial en todo el espacio en las siguientes situaciones:

1. La esfera se encuentra aislada, y posee una carga total Q .
2. La esfera se encuentra conectada a “tierra”.

¿Qué podemos decir de la distribución de carga sobre la esfera en estos casos?

Problema 5. Una esfera uniformemente cargada tiene en su interior una “vacuola” esférica de radio a , cuyo centro se encuentra a una distancia d del centro de la esfera mayor. Determine el campo eléctrico en cualquier punto del interior de la vacuola.

Problema 6. Energía de configuración Una esfera de radio a posee una carga total Q . Determine la energía electrostática asociada a las siguientes configuraciones:

1. Toda la carga concentrada en una región esférica de radio $b \ll a$ en torno a algún punto dentro de la esfera.
2. La carga distribuida volumétricamente en la esfera, con densidad de carga proporcional a la distancia a su centro.
3. La carga distribuida uniformemente sobre la superficie de la esfera.

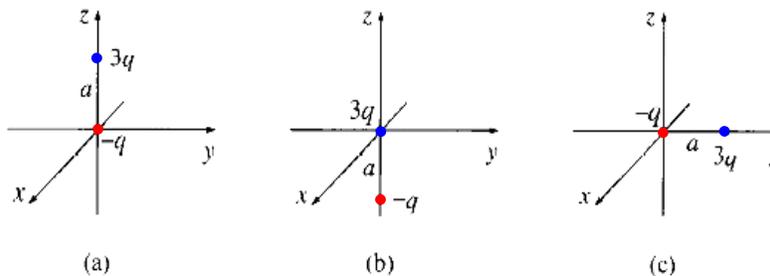
Problema 7. Dipolos eléctricos La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente de magnitud $|\mathbf{p}| = 6.1 \times 10^{-30} \text{Cm}$, orientado en la dirección que une al átomo de oxígeno con el punto medio de la línea que une a los átomos de Hidrógeno.

1. La fuerza que le ejerce un electrón (de carga $q \approx -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$) que se encuentra a una distancia grande respecto del tamaño de la molécula.
2. El torque que sufre la molécula en presencia de un campo externo de 1V/m , y el trabajo necesario para rotar a la molécula desde la orientación paralela a la antiparalela al campo.
3. La fuerza que le ejerce otra molécula de agua, que se encuentra a una distancia grande respecto del tamaño de las moléculas.
4. El torque que siente una molécula de agua debido a la presencia de la otra, como función de la distancia y la orientación relativa.

Problema 8. Utilizando el desarrollo multipolar de $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, determine en forma genérica el potencial originado por una distribución de cargas $\rho(\vec{r})$ localizada en una región \mathcal{R} , en la región exterior a \mathcal{R} . Represente gráficamente las contribuciones dipolares ($l=1$) y cuadrupolares ($l=2$) y dé explícitamente las expresiones para los momentos correspondientes en coordenadas cartesianas.

Problema 9. Determine la expansión en multipolos para un disco de radio a y espesor despreciable, con una distribución uniforme de carga σ .

Problema 10. Momentos multipolares para distribuciones discretas de carga Dos cargas puntuales $3q$ y $-q$ se encuentran separadas una distancia a . Para cada configuración de la figura, encontrar los dos primeros momentos multipolares y el potencial aproximado, a grandes distancias, incluyendo ambas contribuciones (monopolar y dipolar).



Problema 11. El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro viene dado por

$$\Phi(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} e^{-2r/a} (1/r + 1/a)$$

donde $a \approx 1 \times 10^{-10} \text{m}$ es el “radio de Bohr” y $q \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ es la carga del electrón. Encuentre la distribución de carga estática que daría lugar a este potencial e interprete este resultado físicamente.

Problema 12. Capacitores Calcular la capacidad de los siguientes capacitores y la energía total almacenada en función de la carga:

1. Dos placas conductoras paralelas, de gran área A , separadas por una distancia d . Determine la fuerza que una de las armaduras ejerce sobre la otra.
2. Dos esferas concéntricas conductoras de radios a y b . ¿Qué ocurre en el límite $b \gg a$? ¿y si $|a - b| \ll a, b$?
3. dos cilindros concéntricos, conductores de radios a y b , de longitud $L \gg a, b$.