Función de Green dependiente del tiempo.

Problema general

Las ecuaciones a derivadas segundas espaciales y temporales que satisfacen los potenciales $\bar{A}$ y Φ son de la forma:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \Lambda(\bar{x}, t) = -4\pi f(\bar{x}, t)$$

donde $f(\bar{x},t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -4\pi \rho(\bar{x},t) \end{Bmatrix}$ para $\Phi(\bar{x},t)$

ó $f(\bar{x},t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{4\pi}{c} \bar{J}(\bar{x},t) \end{Bmatrix}$ para $\bar{A}(\bar{x},t)$.

Como herramientas necesarias definimos la $\delta^{(4)}$

$$\boxed{\delta(\bar{x}-\bar{x}')\,\delta(t-t') = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3k\, e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}\int d\omega\, e^{-i\omega(t}}$$

y a la función de Green como

$$\boxed{G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \int d^3k \int d\omega\, g(\vec{k},\omega)\, e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}\, e^{-i\omega(}}$$

(128)

En ausencia de superficies limitadoras escribimos para la solución

$$\boxed{\Lambda(\bar{x},t) = \int G(\bar{x}t,\bar{x}'t')f(\bar{x}'t')\,d^3x'dt'}$$

siendo

$$\boxed{\left(\nabla^2_{(x)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\bar{x}t,\bar{x}'t') = -4\pi\delta(\bar{x}-\bar{x}')\delta(t-t')}$$

Entonces, si aplicamos el operador diferencial a la función de Green resulta

$$\int d^3k\int dw\, g(\bar{k},\omega)\left\{-k^2+\frac{1}{c^2}\omega^2\right\}e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}e^{-i\omega(t-t')}$$

$$= -\frac{4\pi}{(2\pi)^4}\int d^3k\int dw\; e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}e^{-i\omega(t-t')}$$

Por lo tanto, el núcleo $g(\bar{k},\omega)$ resulta dado en

$$\int d^3k\int dw\left[-g(\bar{k},\omega)\left(k^2-\frac{1}{c^2}\omega^2\right)+\frac{1}{4\pi^3}\right]\cdot e^{i\bar{k}\cdot(\bar{x}-\bar{x}')}e^{-i\omega(t-t')} = 0$$

que se cumple si

$$\boxed{g(\bar{k},\omega) = \frac{1}{4\pi^3}\cdot\frac{1}{\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)}}$$

Causalidad si $(\bar{x}, t)$ corresponde al punto de observación, pedimos.

$$\boxed{G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = 0 \quad \text{si} \quad t < t'}$$

Singularidades de $g(\bar{k}, \omega)$

$\Rightarrow \quad w = \pm kc$

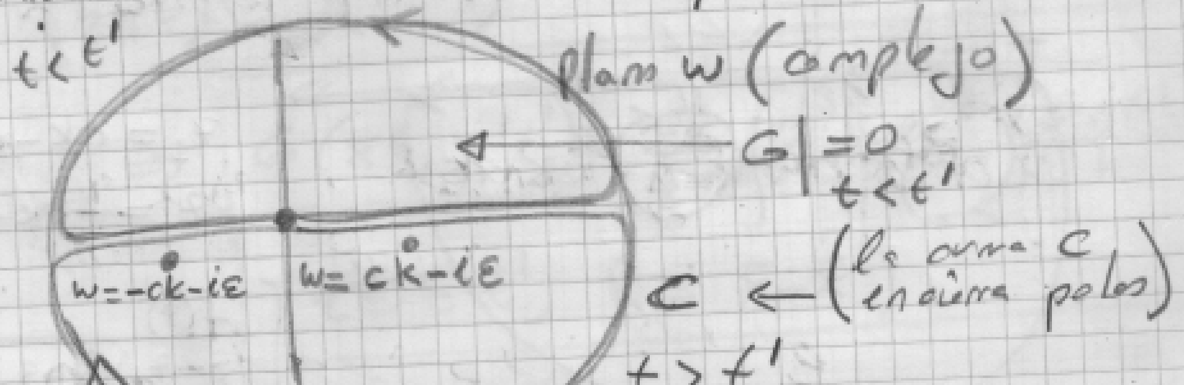
Integración

Hasta aquí

$$G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \frac{1}{4\pi^3} \int d^3k \int d\omega \frac{e^{i\bar{k}(\bar{x}-\bar{x}') - i\omega(t-t')}}{\left(k^2 - \frac{1}{c^2}(\omega + i\varepsilon)^2\right)}$$

donde hemos reemplazado w por $w + i\varepsilon$

Aplicando el método de Cauchy en el contorno



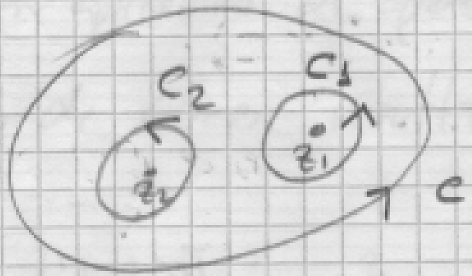
$$\left[\int_C d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{\left(k - \frac{1}{c}(\omega + i\varepsilon)\right)\left(k + \frac{1}{c}(\omega + i\varepsilon)\right)}\right]_{\tau = t - t' > 0} = I(k, \tau)$$

donde

$$I(k,t) = 2\pi i\,(K_1 + K_2)$$

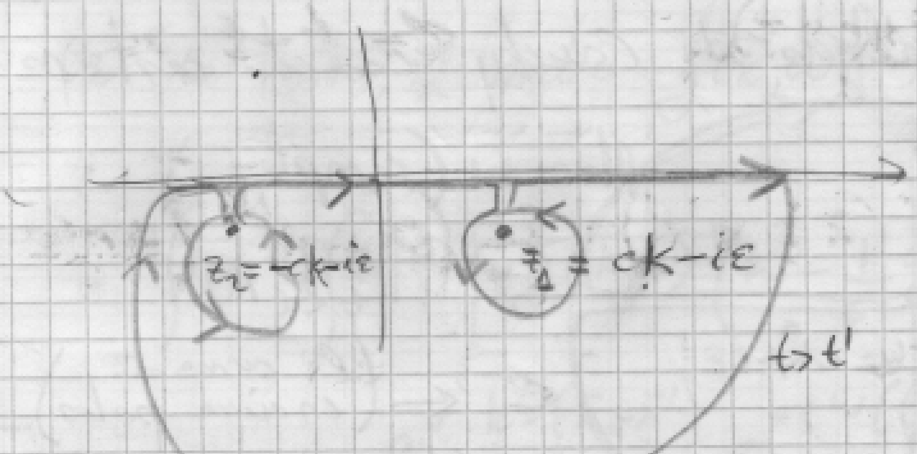
K_1 y K_2 son los residuos en los puntos singulares de la función.

(el signo de circulación es positivo si cerremos la curva en sentido antihorario



$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_j K_j \qquad (\text{Cauchy})$$

Entonces ⟹ en nuestro caso



$z_1 = ck - i\varepsilon$

$z_2 = -ck - i\varepsilon$

$$\left[\frac{f(z)}{(z-z_1)(z-z_2)}\right] = F(z)$$

$$\int_C F(z) = 2\pi i \left[\frac{f(z_1)}{(z_1 - z_2)} + \frac{f(z_2)}{(z_2 - z_1)}\right]$$

$$= \frac{2\pi i}{(z_1 - z_2)}\left(f(z_1) - f(z_2)\right)$$

111

$$z_1 - z_2 = ck - i\varepsilon - (-ck - i\varepsilon) = 2ck$$

$$\int_C F(z)dz = \frac{\pi i}{ck}\left[e^{-i\tau(ck-i\varepsilon)} - e^{-i\tau(-ck-i\varepsilon)}\right]_{\varepsilon=0}$$

$$= \left(\frac{\pi i}{ck}\right)\left[e^{-ick\tau} - e^{ick\tau}\right]$$

$$= \frac{\pi i}{ck}\left[\cancel{\cos\varphi} - i\sin\varphi - \cancel{\cos\varphi} - i\sin\varphi\right]_{\varphi = ck\tau}$$

$$= \frac{2\pi}{ck}\,\mathrm{sen}(ck\tau)$$

todavia debemos multiplicar por $\left(\frac{c^2}{4\pi^3}\right)$

entonces, la integral en ω resulta

$$= \frac{c^2}{4\pi^3}\cdot\frac{2\pi}{ck}\,\mathrm{sen}(ck\tau)$$

$$= \left(\frac{c}{2\pi^2}\right)\left(\frac{\mathrm{sen}(ck\tau)}{k}\right) \qquad \tau = t - t' > 0$$

Hasta ahora $\Rightarrow$

$$\boxed{G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \frac{c}{2\pi^2}\int d^3k\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{R}}\left(\frac{\mathrm{sen}(ck\tau)}{k}\right) \qquad (\tau = t - t',\ R = \bar{x} - \bar{x}')}$$

como $d^3k = dk\, k^2\, d\theta \sin\theta\, d\varphi$ podemos escribir

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta\, e^{ikR\cos\theta} = 2\pi\int_1^{-1}(-)\,d\alpha\, e^{ikR\alpha} = 2\pi\left[\frac{e^{ikR\alpha}}{ikR}\right.$$

112

$$= \frac{2\pi}{ikR} \cdot \left(e^{ikR} - e^{-ikR}\right)$$

$$= \frac{4\pi}{kR} \, sen(kR)$$

por lo tanto

$$G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \frac{c}{2\pi^2} \cdot \frac{4\pi}{R} \int_0^\infty dk \, k^2 \left[\frac{sen(kR)}{k}\right]\left[\frac{sen(ck\tau)}{k}\right]$$

$$\boxed{G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \left(\frac{2c}{\pi R}\right) \cdot \int_0^\infty dk \; sen(kR)\, sen(ck\tau).}$$

$R = |\bar{x} - \bar{x}'| > 0$

$\tau = (t - t') > 0$

El integrando en $\int_0^\infty dk \; sen(kR)\, sen(ck\tau)$

es par $\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dk \; sen(kR)\, sen(ck\tau)$

ahora definamos $\alpha = R/c$ y $\beta = \tau$

entonces tenemos

$$\left(\frac{1}{2c}\right) \int_{-\infty}^{\infty} du \; sen(u\alpha)\, sen(u\beta)$$

multiplicaremos y dividiremos por 2π

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2c}\right) \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du \; sen(u\alpha)\, sen(u\beta)$$

desarrollando el producto $\operatorname{sen}(u\alpha)\operatorname{sen}(u\beta)$

tenemos $\Rightarrow \left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{iu\alpha}-e^{-iu\alpha}\right)\left(\frac{1}{2i}\right)\left(e^{iu\beta}-e^{-iu\beta}\right)$

$$= (-)\frac{1}{4}\left[e^{iu(\alpha+\beta)} - e^{iu(\alpha-\beta)} - e^{-iu(\alpha-\beta)} + e^{-iu(\alpha+\beta)}\right]$$

como $\alpha = \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}$ $\qquad \beta = t-t'$

$\Rightarrow$ $\alpha+\beta$ no se anula y las

integrales $\int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{\pm iu(\alpha+\beta)}$ no contribuyen

mientras que las otras dos son funciones

$\delta\left(\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t + t'\right) \Rightarrow$

$$\frac{1}{2c} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \delta\left(\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t + t'\right)$$

$$= \frac{\pi}{2c}\,\delta\left(\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t + t'\right)$$

Por lo tanto

$$G(\bar{x}t, \bar{x}'t') = \frac{2c}{\pi R} \cdot \frac{\pi}{2c} \cdot \delta\left(\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t + t'\right)$$

ó

$$\boxed{G(\bar{x}t; \bar{x}'t') = \frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,\delta\left(t' + \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t\right)}$$

(la señal emitida en t' se detecta en $t - \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}$)

114

Por esta razon se la denomina función de Green Retardada

Entonces la solución para la ecuacion

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Lambda(\bar{x},t) = -4\pi f(\bar{x},t)$$

se escribe

$$\boxed{\Lambda(\bar{x},t) = \int d^3x'\,dt'\, \frac{\delta\left(t' + \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c} - t\right) f(\bar{x}'t')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}$$

o en general

$$\Lambda(\bar{x},t) = \int d^3x'\,dt'\, \frac{f(\bar{x}',t')\big|_{retardada}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

$$t' = t - \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}$$