(11½ a)

(Agregado)

Comentario sobre la invariancia de Gauge

Sabemos que $\begin{cases} \bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \\ \bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A} \end{cases}$

Si reemplazamos $\bar{A}$ por $\bar{A} + \bar{\nabla}\eta(x t)$
y ϕ por $\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \eta(x t)}{\partial t}$

tendremos

$$\bar{B} = \bar{\nabla}\times(\bar{A} + \bar{\nabla}\eta) = \bar{\nabla}\times\bar{A}$$

ya que $\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\eta) = 0$

y
$$\bar{E} = -\bar{\nabla}(\phi) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\eta) - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\eta)$$

Es decir los campos $\bar{B}$, $\bar{E}$ son <u>independientes</u> de la elección de la función $\eta(x,t)$.

A nivel de los potenciales:

(a) $\bar{A}$, ϕ <u>cumplen</u> la condición de Lorentz $\bar{\nabla}\bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$, entonces debe ser

$$\nabla^2\eta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} \equiv \Box\eta = 0$$

(b) $\bar{A}$, ϕ <u>no</u> cumplen la condición de Lorentz, entonces $\begin{cases} \Box^2\eta = -f(x t) \text{ si} \\ \bar{\nabla}\bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = f(x,t) \end{cases}$

y reemplazamos $\begin{cases} \bar{A} \text{ por } \bar{A} + \bar{\nabla}\eta(x,t) \\ \text{y } \phi \text{ por } \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \eta}{\partial t}(\bar{x},t) \end{cases}$

Luego $\Rightarrow$

(114.b)

De este manera pedimos

$$\bar{\nabla}\circ\left(\bar{A}+\bar{\nabla}\eta\right)+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)=0$$

lo que implica $\left(\bar{\nabla}\circ\bar{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)+\left(\nabla^2\eta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\right)=0$

que queda satisfecha por la elección de gauge

$$\underbrace{\nabla^2\eta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}}_{-f(\bar{x},t)}=-\underbrace{\left(\bar{\nabla}\circ\bar{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)}_{f(\bar{x},t)}$$

Luego las ecuaciones por los potenciales desplazados se desacoplan.

(115) Problema de valores iniciales

Hasta el momento, hemos obtenido, como soluciones para el problema sin superficies limitadoras

$$\boxed{G(xt, \bar{x}'t') = \frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,\delta\left(-t+t'+\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}\right)}$$

$$\boxed{\Psi(\bar{x},t) = \int \frac{\delta\left(t'+\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}-t\right)}{|\bar{x}-\bar{x}'|} f(\bar{x}',t')\,d^3x'\,dt'}$$

para

$$\boxed{\nabla^2\Psi(\bar{x},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi(\bar{x},t)}{\partial t^2} = -4\pi f(\bar{x},t)}$$

(Solución "retardada")

$(x',t') \equiv$ fuente
$(x,t) \equiv$ observador $\Big\}$ $\boxed{t' = t - \frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}}$

Ahora podemos introducir como elementos conocidos $\Psi(\bar{x},t)\Big|_{t=t_0}$ y $\frac{\partial\Psi}{\partial t}(\bar{x},t)\Big|_{t=t_0}$

(Como la solución se expresa en 3+1 dimensiones, las condiciones a $t=t_0$ representan la superficie en 3 dimensiones. Aplicaremos las identidades de Green en espacio-tiempo.

Consideremos la integración

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt' \int d^3x' \left(f_1 \nabla^2_{(x')} f_2 - f_2 \nabla^2_{(x')} f_1 \right)}_{A}$$

$$= \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} dt' \oint_S \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial n'} - f_2 \frac{\partial f_1}{\partial n'} \right) da'}_{B}$$

Reemplazando $\begin{cases} f_1 = G(xt, \bar{x}'t') \\ f_2 = \psi(\bar{x}\, t) \end{cases}$

$$A \Rightarrow \int_{t_0}^{t_1} dt' \int d^3x' \Big[G(xt, \bar{x}'t') \left(-4\pi f(\bar{x}'t') + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t'^2} \right)$$
$$- \psi(\bar{x}'t') \left(-4\pi \delta(\bar{x} - \bar{x}') \delta(t - t') \right)$$
$$- \psi(\bar{x}'t') \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G(xt, \bar{x}'t')}{\partial t'^2} \right) \Big]$$

$$A = 4\pi \psi(\bar{x}\, t) - 4\pi \int_{t_0}^{t_1} dt'\, d^3x'\, f(\bar{x}'t')\, G(xt, \bar{x}'t')$$

$$+ \frac{1}{c^2} \int d^3\bar{x}' \Big[G(xt, \bar{x}'t') \frac{\partial \psi}{\partial t'}(\bar{x}'t')$$
$$- \psi(\bar{x}'t') \frac{\partial G(xt, \bar{x}'t')}{\partial t'} \Big]_{t_0}^{t_1}$$

En definitiva resulta

$$\Rightarrow \psi(\bar{x}, t) = \int \frac{f(\bar{x}'t')_{\text{retardada}}\, d^3x'}{|\bar{x} - \bar{x}'|}$$
$$- \frac{1}{4\pi c^2} \int_V d^3x' \left(G \frac{\partial \psi}{\partial t'} - \psi \frac{\partial G}{\partial t'} \right) \Big]_{t_0}^{t_1}$$
$$+ \frac{1}{4\pi} \int dt' \oint_S \left(G \frac{\partial \psi}{\partial n'} - \psi \frac{\partial G}{\partial n'} \right)$$

Ahora podemos introducir las condiciones iniciales, en el caso del dominio infinito (no consideraremos el término de superficie) y tomamos $\psi(\bar{x}, t_0=0) = f_1(\bar{x})$; $\frac{\partial \psi}{\partial t}(\bar{x} t)\Big|_{t=0} = f_2(\bar{x})$

Tomando el valor $\bar{x}=0$ (para simplificar) (punto de observación) escribimos

$|\bar{x}-\bar{x}'| = r'$ y utilizando coordenadas esféricas $d^3x' = dr' r'^2 d\Omega'$

$d\Omega' = d\theta' \sin\theta' d\phi'$, entonces $\Rightarrow$

$$\psi(\bar{x}=0, t) = \int d\Omega' \int dr' r' f(r', \Omega', t' = t - \frac{r'}{c})$$

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\left[\int d\Omega' \int dr' r' \left(f_2(r'\Omega')\delta(t'-t+\frac{r'}{c}) - f_1(r'\Omega')\frac{\partial}{\partial t'}\delta(t'-t+\frac{r'}{c})\right)\right]$$

usando la propiedad $\left.\frac{\partial}{\partial t'}\delta(t'-t+\frac{r}{c})\right|_{t'=0} = c^2\delta'(r'-ct)$

Esta solución, (solución de Poisson) define como fuentes de los potenciales tanto las fuentes en el volumen $(f(xt))$ como las condiciones iniciales.

de manera que si $f(\bar{x},t)=0$ (no hay fuentes en el volumen) las condiciones iniciales f_1 y f_2 determinan la solución.

Existe otra solución, la llamada solución de Kirchoff, que permite determinar el valor de $\psi(\bar{x},t)$ en el interior a partir de los valores de ψ y sus derivadas en la superficie.

(suponemos $f(\bar{x},t)=0$, $\psi(x=0,t_0)=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}(\bar{x}=0,t_0)=0$) $\Rightarrow$

$$\psi(\bar{x},t)=\frac{1}{4\pi}\int_{t_0}^{t_1}dt'\oint_S da'\left(G\frac{\partial\psi}{\partial n'}-\psi\frac{\partial G}{\partial n'}\right)$$

Si tomamos $G=\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,\delta\left(t-t'-\frac{|\bar{x}-\bar{x}'|}{c}\right)$

$$\frac{\partial G}{\partial n'}=-\bar{n}\cdot\frac{\partial}{\partial R}\left[\frac{\delta\left(t'+\frac{R}{c}-t\right)}{R}\right]$$

$(\bar{R}=\bar{x}-\bar{x}'=\bar{n}R=\bar{n}|\bar{x}-\bar{x}'|)$, integrando resulta $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\psi(\bar{x},t)=\frac{1}{4\pi}\left\{\oint_S\bar{n}\cdot\left[\frac{\bar{\nabla}_{x'}\psi(\bar{x}',t')}{R}-\frac{\bar{n}}{R^2}\psi(\bar{x}',t')-\frac{\bar{n}}{c}\frac{1}{R}\frac{\partial\psi(\bar{x}',t')}{\partial t'}\right]_{\text{retardada}}\right\}$$

Leyes de Conservación

Veamos que forma tiene la densidad de energía electromagnética en 3+1 dimensiones

Tomemos el producto $\bar{J}$ (densidad de corriente) y $\bar{E}$ (campo electrico)

$$\bar{J}\cdot\bar{E} = \frac{c}{4\pi}\left(\bar{\nabla}\times\bar{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}\right)\cdot\bar{E}$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left[(\bar{\nabla}\times\bar{H})\cdot\bar{E}\right] - \frac{1}{4\pi}\,\bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

Utilicemos la identidad

$$\bar{\nabla}\cdot(\bar{E}\times\bar{H}) = \sum_{\substack{\alpha\\ \beta\gamma\delta}} \hat{e}_\alpha\,\partial_\alpha\left(\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\,E_\gamma H_\delta\right)\hat{e}_\beta$$

$$= \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} \hat{e}_\alpha\cdot\partial_\beta\,\varepsilon_{\beta\gamma\delta}\left[(\partial_\alpha E_\gamma)H_\delta + E_\gamma(\partial_\alpha H_\delta)\right]$$

$$= \sum_{\alpha\gamma\delta}\left(\varepsilon_{\alpha\gamma\delta}\,(\partial_\alpha E_\gamma)H_\delta + \varepsilon_{\alpha\gamma\delta}\,(\partial_\alpha H_\delta)E_\gamma\right)$$

$$= \sum_{\delta}\left\{\sum_{\alpha\gamma}{}' \varepsilon_{\delta\alpha\gamma}\,\partial_\alpha E_\gamma\right\}H_\delta - \sum_{\gamma}\left\{\sum_{\alpha\delta}\varepsilon_{\gamma\alpha\delta}\,\partial_\alpha H_\delta\right\}E_\gamma$$

$$= (\bar{\nabla}\times\bar{E})\cdot\bar{H} - (\bar{\nabla}\times\bar{H})\cdot\bar{E}$$

de donde $\Rightarrow$

$$\bar{J}\cdot\bar{E} = \frac{c}{4\pi}\left[\left(\bar{H}\cdot\bar{\nabla}\times\bar{E}\right) - \bar{\nabla}\cdot\left(\bar{E}\times\bar{H}\right) - \frac{\bar{E}}{c}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} \right]$$

$$= -\frac{c}{4\pi}\,\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{E}\times\bar{H}\right) - \frac{c}{4\pi}\,\frac{\bar{E}}{c}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t}$$

$$- \frac{c}{4\pi}\,\bar{H}\cdot\underbrace{\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}\right)}_{\text{por Faraday}}$$

En definitiva

$$\left(\bar{J}\cdot\bar{E}\right) = -\frac{1}{4\pi}\left[c\,\bar{\nabla}\cdot\left(\bar{E}\times\bar{H}\right) + \bar{E}\cdot\frac{\partial\bar{D}}{\partial t} + \bar{H}\cdot\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} \right]$$

Integrando

$$\int_V \bar{J}\cdot\bar{E}\,d^3\bar{x}' = -\frac{c}{4\pi}\int \bar{\nabla}\cdot\left(\bar{E}\times\bar{H}\right)d^3x' - \frac{1}{8\pi}\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{E}\cdot\bar{D} + \bar{H}\cdot\bar{B}\right)$$

Si ahora definimos

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{S} &= \frac{c}{4\pi}\left(\bar{E}\times\bar{H}\right) \\ U &= \frac{1}{8\pi}\left(\bar{E}\cdot\bar{D} + \bar{H}\cdot\bar{B}\right) \end{aligned}}$$

121

obtenemos

$$\int_V \bar{J}\cdot\bar{E}\,d^3x' = -\int_V \left[\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{\nabla}\cdot\bar{S}\right] d^3x'$$

ó simplemente

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{S} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\,\bar{J}\cdot\bar{E}}$$

Esta relación tiene la forma de una ecuación de continuidad que relaciona la variación temporal de la densidad de energía por unidad de volumen (U) y la divergencia del flujo de energía (energía / unidad de tiempo x unidad de area) ($\bar{S}$) con el trabajo ($-\bar{J}\cdot\bar{E}$) efectuado por el campo eléctrico sobre las fuentes presentes en el volumen (V).

Leyes de conservación para sistemas de partículas cargadas en campos electromagnéticos

Partiendo de la fuerza de Lorentz, tenemos

$$\vec{F} = q\left(\bar{E} + \frac{\bar{v}\times\bar{B}}{c}\right)$$

a partir de
$$\begin{cases} \bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho \\ \bar{\nabla}\times\bar{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} \end{cases}$$

entonces $\left(\rho\bar{E} + \frac{1}{c}\bar{J}\times\bar{B}\right)$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) + \left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{c}{4\pi}\right)\left(\bar{\nabla}\times\bar{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\right)\times\bar{B}\right]$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left[\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) + \frac{1}{c}\bar{B}\times\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} - \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})\right]$$

Como $\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}\times\bar{B}) = \frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\times\bar{B} + \bar{E}\times\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$

reemplazamos $\bar{B}\times\frac{\partial\bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}\times\bar{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}\times\bar{B}) + \bar{E}\times\frac{\partial\bar{B}}{\partial t}$

y como $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \Rightarrow$ de donde

$$\rho\bar{E} + \frac{1}{c}\bar{J}\times\bar{B} = \frac{1}{4\pi}\left[\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) + \bar{B}\underbrace{(\bar{\nabla}\cdot\bar{B})}_{=0} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}\times\bar{B}) + \frac{1}{c}\bar{E}\times\left(-c\,\bar{\nabla}\times\bar{E}\right) - \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})\right]$$

ó

$$\left(\rho\bar{E} + \frac{1}{c}\bar{J}\times\bar{B}\right) = \frac{1}{4\pi}\left[\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) + \bar{B}(\bar{\nabla}\cdot\bar{B}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E}\times\bar{B}) - \bar{E}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E}) - \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})\right]$$

123

Si ahora relacionamos la fuerza de Lorentz con la variación del momento respecto al tiempo, tenemos $\Rightarrow$ ($\vec{P}_{mecánico}$)

$$\frac{d\vec{P}_{mec}}{dt} = \int_V \left(\rho \bar{E} + \frac{1}{c} \vec{J} \times \bar{B}\right) d^3x'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_V \Big[\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) - \bar{E}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E}) + \bar{B}(\bar{\nabla}\cdot\bar{B}) - \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B}) \Big] d^3x'$$

$$- \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4\pi c}\int (\bar{E}\times\bar{B})\, d^3x'\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[\vec{P}_{mecánico} + \dfrac{1}{4\pi c}\displaystyle\int (\bar{E}\times\bar{B})\, d^3x'\right] \\ = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_V \Big[\big(\bar{E}(\bar{\nabla}\cdot\bar{E}) - \bar{E}\times(\bar{\nabla}\times\bar{E})\big) + \big(\bar{B}(\bar{\nabla}\cdot\bar{B}) - \bar{B}\times(\bar{\nabla}\times\bar{B})\big)\Big] d^3x' \end{cases}$$

Si $\boxed{\bar{P}_{TOTAL} = \bar{P}_{mecánico} + \vec{P}_{campo}}$ entonces

$$\bar{P}_{campo} = \frac{1}{4\pi c}\int_V (\bar{E}\times\bar{B})\, d^3x'$$

La correspondencia entre la variación de este momento TOTAL (mecánico + campo) con la divergencia de algún tensor.

Como $\overline{P}_{TOTAL}$ es un vector, la divergencia no puede ser de un vector sino la derivada direccional de un tensor de rango 2.

Ese tensor tiene la forma de una diada con componentes

$$\boxed{\mathbb{D}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\left[E_i E_j + B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(E^2+B^2\right)\right]}$$

A partir de esta definición resulta

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{P}_{mecánico} + \vec{P}_{campo}\right] = \int_V \overline{\nabla}\cdot \mathbb{D}\; d^3x'$$

$$= \oint_S \overline{n}\cdot \mathbb{D}\; da$$

donde $\mathbb{D} = \sum_{i,j}\left(\hat{e}_i\, \mathbb{D}_{ij}\, \hat{e}_j\right)$

125

Ecuaciones macroscópicas

Como $\bar{H} = \bar{B} - 4\pi \bar{M}$

$\bar{D} = \bar{E} + 4\pi \bar{P}$

entonces $\Rightarrow$

$$\bar{\nabla} \times \bar{H} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$$

$$= \bar{\nabla} \times (\bar{B} - 4\pi \bar{M}) = \frac{4\pi}{c}\bar{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{E} + 4\pi \bar{P})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c}\Big[\underbrace{\bar{J}}_{\text{(corrientes)}} + \underbrace{c\,\bar{\nabla}\times\bar{M}}_{\text{(magnetizaciones)}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{P}}{\partial t}}_{\text{(polarizaciones dieléctricas)}}\Big] + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

(Forma macroscópica de la ley de Ampere-Maxwell).

Analogamente, la forma macroscópica del teorema de Poynting, debe expresarse utilizando la corriente total

$$\left(\bar{J} + c\,\bar{\nabla}\times\bar{M} + \frac{\partial \bar{P}}{\partial t}\right)$$

en la integral $\left(-\int \bar{J}\cdot\bar{E}\,d^3x'\right)$.