(145) Ondas en un medio conductor

En el caso anterior hemos visto las expresiones para los campos en medios no-conductores. Veamos ahora que pasa en un medio conductor

$$\bar{\nabla}\cdot(\varepsilon\bar{E})=0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{E}+\frac{\mu}{c}\frac{\partial\bar{H}}{\partial t}=0$$

$$\bar{\nabla}\cdot(\mu\bar{H})=0 \qquad \bar{\nabla}\times\bar{H}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\bar{E}}{\partial t}-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\bar{E}=0$$

donde hemos usado la ley de Ohm ($\bar{J}=\sigma\bar{E}$) en la ley de Ampere-Maxwell. (obviamente $\rho(\bar{x},t)=0$)

Para facilitar los cálculos separaremos las componentes transversales y longitudinales de los campos, en función de una variable espacial y el tiempo.

$$\begin{cases}\bar{E}(\eta,t)=\bar{E}_{long}(\eta,t)+\bar{E}_{transversal}(\eta,t)\\ \bar{H}(\eta,t)=\bar{H}_{long}(\eta,t)+\bar{H}_{transversal}(\eta,t)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\vec{\nabla}\rightarrow\hat{e}_{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\\ \vec{\nabla}\times\rightarrow\hat{e}_{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\times\end{cases}$$

luego ⇒ para las componentes longitudinales tenemos

$$\bar\nabla\cdot(\mu\bar H)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}H_{longit}=0$$

$$\bar\nabla\cdot(\varepsilon\bar E)=0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\eta}E_{longit}=0$$

$$\left(\bar\nabla\times\bar E+\frac{\mu}{c}\frac{\partial\bar H}{\partial t}\right)_{long}=0 \Rightarrow \frac{\partial H_{long}}{\partial t}=0$$

$$\left(\bar\nabla\times\bar H-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\bar E}{\partial t}-\frac{4\pi\sigma}{c}\bar E\right)_{long}=0 \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\right)E_{long}=0$$

Por lo tanto las soluciones longitudinales (E_{long}, H_{long})

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial E_{long}}{\partial\eta}=0\\[2ex] \left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{4\pi\sigma}{\varepsilon}\right)E_{long}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{E_{long}=E_0\,e^{-\frac{4\pi\sigma}{\varepsilon}t}}$$

En un conductor normal $\sigma\gg 1$ $[\Theta(10^{17}\,seg^{-1})]$

por lo tanto, el campo longitudinal en un conductor, (E_{long} es independiente de η)

no existe si $\bar J=0$ (densidad de corriente)). y $H_{long}(\eta,t)=$ constante

(como en un aislador).

Para las componentes transversales tenemos $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bar{H} = \bar{H}_0 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x} - i\omega t} \\ \bar{E} = \bar{E}_0 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x} - i\omega t} \end{cases}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -i\omega \bar{H}_0 e^{i\bar{k}\bar{x} - i\omega t}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} = i \bar{k} \times \bar{E}_0 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = -i\omega \bar{H}_0 e^{i\bar{k}\bar{x} - i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad \bar{k} \times \bar{E}_0 = \mu \frac{\omega}{c} \bar{H}_0$$

$$\boxed{\bar{H}_0 = \left(\frac{c}{\mu\omega}\right) \bar{k} \times \bar{E}_0} \qquad \text{(por Faraday)}$$

$$i\bar{k} \times \bar{H}_0 - \frac{\varepsilon}{c}\left(-i\omega \bar{E}_0\right) - \frac{4\pi\sigma}{c} \bar{E}_0 = 0$$

ó $$i\left[\bar{k} \times \bar{H}_0\right] + \left(\frac{\varepsilon\omega}{c} i - 4\pi \frac{\sigma}{c}\right) \bar{E}_0 = 0$$

y a partir de la definición de H_0 tenemos

$$\left(\bar{k} \times \frac{c}{\mu\omega} \bar{k} \times \bar{E}_0\right) = -\frac{ck^2}{\mu\omega} \bar{E}_0$$

$$\Rightarrow \left(-i\frac{ck^2}{\mu\omega} + \frac{\varepsilon\omega}{c} i\right) \bar{E}_0 - \frac{4\pi\sigma}{c} \bar{E}_0 = 0$$

ó $$\left\{k^2 - \left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2 + i\,\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right)\right\} \bar{E}_0 = 0$$

de donde

$$k^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\,i\right)$$

(vector de onda complejo)

$$k = a + ib$$

$$k^2 = (a+ib)(a+ib) = a^2 - b^2 + 2iab$$

$$a^2 - b^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$2ab = \mu\omega\frac{4\pi\sigma}{c^2}$$

$$\Rightarrow \quad b = \frac{\mu\omega\, 2\pi\sigma}{c^2 a}$$

$$a^2 - \frac{\mu^2\omega^2 4\pi^2\sigma^2}{c^4 a^2} = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$a^4 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}a^2 - \frac{\mu^2\omega^2 4\pi^2\sigma^2}{c^4} = 0$$

$$\alpha = a^2 \Rightarrow \quad \alpha^2 - A\alpha - B = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[A \pm \sqrt{A^2 + 4B^2}\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left[\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right) \pm \sqrt{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 + \left(\frac{4\pi\mu\omega\sigma}{c^2\varepsilon}\right)^2}\right]$$

$$\alpha = \frac{1}{2}(\mu\varepsilon)\frac{\omega^2}{c^2}\left\{1 \pm \left[1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2}\right\}$$

149

de donde (tomando $a = +\sqrt{\alpha}$)

$$\boxed{a = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(\frac{w}{c}\right)\left[\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right)^2} \pm 1\right]^{1/2}}$$

límites

$$\left(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right) \ll 1 \quad \text{(mal conductor)}$$

$$\Rightarrow \quad a \Rightarrow \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$b \Rightarrow \frac{\mu w 2\pi\sigma}{c^2 \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}} \simeq \frac{2\pi\sigma}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

y entonces

$$\Longrightarrow \quad \boxed{k \simeq \frac{w}{c}\sqrt{\mu\varepsilon} + i\,\frac{2\pi\sigma}{c}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}$$

(límite del vector de onda (mal conductor)

En el caso $\left(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right) \gg 1$ tenemos

$$a \simeq \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left(\frac{w}{c}\right)\left[\left(\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}\right)\right]^{1/2}$$

$$b \simeq \frac{\mu w 2\pi\sigma}{c^2\left(\frac{w}{c}\right)\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\frac{4\pi\sigma}{w\varepsilon}}} = \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma w\mu}$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{k \simeq \frac{1}{c}\sqrt{2\pi\sigma w\mu}\,(1+i)} \quad \text{(buen conductor)}$$

(150)

Como en ambos casos el vector $\bar{k}$ es complejo, las ondas estan amortiguadas

$$\bar{k} = (k_{real} + i k_{img})\hat{k}$$

$$e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}} \Rightarrow e^{-k_{img}\hat{k}\cdot\bar{x}} \; e^{i k_{real}\hat{k}\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

Entonces

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \, e^{-k_{img}\hat{k}\cdot\bar{x}} \cdot e^{i k_{real}\hat{k}\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

$$\bar{H} = \bar{H}_0 \, e^{-k_{img}\hat{k}\cdot\bar{x}} \cdot e^{i k_{real}\hat{k}\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

Por las condiciones dadas, tenemos $\Rightarrow$

$$\bar{\nabla}\cdot(\varepsilon\bar{E}) = 0 \Rightarrow \hat{k}\cdot\bar{E}_0 = 0$$

$$\bar{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega}(k_{real} + i k_{img})\,\hat{k}\times\bar{E}_0$$

De manera que $\bar{H}$ y $\bar{E}$ no estan en fase en un conductor.

Para k complejo $(a, b > 0)$

$$|k| = \sqrt{a^2+b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

$$\operatorname{tg}\phi = (b/a) =$$

$$k = |k|\, e^{i\phi}$$

(15)

Con los valores obtenidos

$$a = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\left\{\frac{\sqrt{1+(4\pi\sigma/\omega\varepsilon)^2}+1}{2}\right\}^{1/2}$$

$$b = \frac{\mu\omega 2\pi\sigma}{c^2\, a}$$

$$b = \frac{\mu\omega 2\pi\sigma}{c^2 \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\,\{\ldots\}^{1/2}}$$

$$a^2+b^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\mu\varepsilon)\{\ \} + \frac{\mu^2\omega^2 4\pi^2\sigma^2}{c^2\omega^2\mu\varepsilon\ \{--\}}$$

$$\Rightarrow\ a^2+b^2 = \frac{1}{\{\ \}}\cdot\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon\{\ \}^2 + \frac{\mu^{\cancel{2}}\cancel{\omega^2}4\pi^2\sigma^2\times 2}{c^2\cancel{\mu}\varepsilon\cancel{\omega^2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\{\ \}}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon\{\ \}^2 + \frac{\mu\, 4\pi^2\sigma^2}{c^2\ \varepsilon}\times 2\right)$$

$$= \frac{1}{\{\ \}}\left(\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu\varepsilon}{2} + \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu\varepsilon}{2}\sqrt{1+\Lambda^2} + \frac{8\pi^2\sigma^2\mu}{\varepsilon c^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\{\ \}}\frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu\varepsilon}{2}\left(1+\sqrt{1+\Lambda^2} + \frac{8\pi^2\sigma^2\cancel{\mu}\times 2}{\varepsilon \cancel{c^2}\frac{\cancel{\mu}\varepsilon}{2}\frac{\omega^2}{\cancel{c^2}}}\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\mu\varepsilon}{\{\ \}}\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+\Lambda^2}+\Lambda^2\right)$$

$$= \frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon\,,\ \frac{(1+\Lambda^2)^{1/2}\,\cancel{(1+(1+\Lambda^2)^{1/2})}}{\cancel{(1+(1+\Lambda^2)^{1/2})}}$$

Finalmente

$$\boxed{\begin{aligned}|k| &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\,(1+\Lambda^2)^{1/4}\\ \Lambda &= \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)\end{aligned}}$$

152

y entonces

$$\tan\phi = \frac{\mu\omega 2\pi\sigma}{c^2\left(\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\left\{(1+\Lambda^2)^{1/2}+1\right\}^{1/2}\right)^2}$$

$$= \frac{\mu\omega 2\pi\sigma}{\cancel{c^2}\frac{\omega^2}{\cancel{c^2}}\frac{\mu\varepsilon}{2}\left((1+\Lambda^2)^{1/2}+1\right)}$$

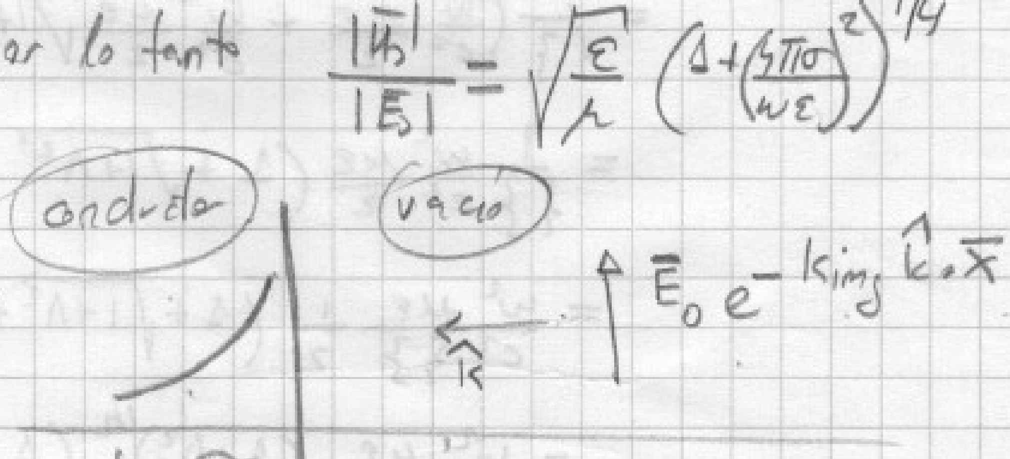
$$= \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \Big/ \left(1+(1+\Lambda^2)^{1/2}\right)$$

De esta manera

$$\bar{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega}\cdot\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\,(1+\Lambda^2)^{1/4}e^{i\phi}\,\hat{k}\times\bar{E}_0$$

ó $$\boxed{\bar{H}_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/4}e^{i\phi}\,\hat{k}\times\bar{E}_0}$$

por lo tanto $$\frac{|\bar{H}_0|}{|\bar{E}_0|} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right)^{1/4}$$



$\Rightarrow$ amortiguación $\Rightarrow$ $\boxed{\delta \simeq \frac{1}{k_{img}} \simeq \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega\mu}}}$

(profundidad de penetración)

(153)

Modelo sencillo de conductividad

(no demasiado actual, es de 1900 !!)

$$m\frac{d\bar{v}}{dt} + \underbrace{\alpha\bar{v}}_{} = e\bar{E}$$

"Fuerza dependiente de la velocidad, como en un fluido viscoso

$\Rightarrow$ proponiendo la dependencia temporal armónica para el campo eléctrico tendremos $\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-i\omega t}$

(en condiciones de localidad)

$\Rightarrow \bar{v} = v_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow -i\omega m\bar{v} + \alpha\bar{v} = e\bar{E}_0 e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow -i\omega m v_0 + \alpha v_0 = eE_0 \qquad (\bar{v} \parallel \bar{E}_0)$

ó $v_0 = \dfrac{eE_0}{(\alpha - i\omega m)}$

ó $\boxed{v_0 = \dfrac{(e/m)\,E_0}{(\frac{\alpha}{m} - i\omega)}}$

(154)

Si ahora la corriente

$$\bar{J} = \sigma \bar{E} = q\vec{v}$$

resulta $(q=e)$

$$\sigma = e v_0 n_0 \; o'$$

$$\boxed{\sigma = \frac{(e^2/m)}{\left(\frac{\alpha}{m} - i\omega\right)} n_0}$$

$\Rightarrow \sigma$ = conductividad
n_0 = densidad de carga
e/m = carga/masa para un electron
α = "viscosidad"
ω = Frecuencia del campo electrico

$\frac{\alpha}{m} \gg \omega$ — σ real
$\bar{J}$ en fase con $\bar{E}$

$\frac{\alpha}{m} \ll \omega$ — $\sigma \rightarrow$ compleja
$\bar{J}$ desfasado respecto a $\bar{E}$

$$\begin{cases} E \simeq e^{-i\omega t} \\ \sigma \simeq \sigma_0 e^{i\phi} \rightarrow J \sim e^{i(\phi - \omega t)} \end{cases}$$

——— x ———