Ondas electromagnéticas

En esta clase resolveremos las ecuaciones de Maxwell, en ausencia de fuentes ($\rho = \bar{J} = 0$) y en un medio infinito caracterizado por ε y μ (constantes dieléctricas y permeabilidad magnética, respectivamente).

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = 0 \qquad (\text{porque } \rho = 0)$$

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \qquad (\text{porque } \bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{Faraday})$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = 0 \qquad (\text{Ampere-Maxwell con } \bar{J} = 0)$$

(usamos $B = \mu \bar{H}$, $\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$)

Si usamos $\bar{\nabla} \times (\bar{\nabla} \times \bar{V}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{V}) - \nabla^2 \bar{V}$ para cualquier vector $\bar{V}$ y aplicamos el rotor tanto a la expresión para $\bar{\nabla} \times \bar{E}$ como $\bar{\nabla} \times \bar{B}$ tendremos

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{E} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{E}) - \nabla^2 \bar{E} = -\nabla^2 \bar{E}$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \times \bar{B} = \bar{\nabla}(\bar{\nabla} \cdot \bar{B}) - \nabla^2 \bar{B} = -\nabla^2 \bar{B}$$

de donde resulta

$$-\nabla^2\overline{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\overline{E}}{\partial t}\right)=0 \qquad \text{(Faraday)}$$

$$-\nabla^2\overline{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial\overline{B}}{\partial t}\right)\right)=0 \qquad \text{(Amp-Max)}$$

o'

$$\boxed{\left[\nabla^2-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]\begin{Bmatrix}\overline{E}\\ \overline{B}\end{Bmatrix}=0}$$

que es una ecuación de la forma

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)f(x,t)=0 \quad \text{donde}$$

$$v=\frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

Las soluciones son de la forma

$$\left\{\begin{array}{l}\overline{E}(\overline{x},t)=\overline{E}_0\,e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}\mp i\omega t}\\ \overline{B}(\overline{x},t)=\overline{B}_0\,e^{i\overline{k}\cdot\overline{x}\mp i\omega t}\end{array}\right\}$$

Nota

[Los campos físicos serán las partes reales de estas soluciones.]

entonces $\Rightarrow$ aplicando el operador diferencial a estas soluciones obtenemos ($\overline{E}_0$ y $\overline{B}_0$ son vectores independientes de $\overline{x}$ y t) $\Rightarrow$

$$-k^2+\left(\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\right)\omega^2=0 \Rightarrow k=\frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$$

Condiciones de transversalidad

Si $\overline{\nabla} \cdot \overline{E} = 0$ entonces debe cumplirse

$$\overline{E}_0 \cdot \overline{k} = 0$$

y si diverge $\overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0 \Rightarrow \overline{B}_0 \cdot \overline{k} = 0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{E}_0 \cdot \overline{k} = 0 \\ \overline{B}_0 \cdot \overline{k} = 0 \end{array}}$$

Además $\Rightarrow$ $\overline{\nabla} \times \overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0$ implica

$$i\,\overline{k} \times \overline{E}_0 \mp i\frac{\omega}{c}\overline{B}_0 = 0$$ y análogamente

$$i\,\overline{k} \times \overline{B}_0 \pm i\frac{\mu\varepsilon}{c}\omega\,\overline{E}_0 = 0$$

Si definimos versores "eléctricos" $(\hat{\varepsilon}_1)$ y "magnéticos" $(\hat{\varepsilon}_2)$ para expresar los vectores $\overline{E}_0$ y $\overline{B}_0$ tendremos

$$\left.\begin{array}{l} \overline{E}_0 = \hat{\varepsilon}_1 E_0 \\ \overline{B}_0 = \hat{\varepsilon}_2 B_0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \hat{\varepsilon}_1 \cdot \overline{k} = 0 \\ \hat{\varepsilon}_2 \cdot \overline{k} = 0 \end{array}\right\}$$

de donde resulta

$$i\left(\overline{k} \times \hat{\varepsilon}_1 \mp \frac{k}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,\hat{\varepsilon}_2\,\frac{B_0}{E_0}\right) = 0$$

Si $B_0 = \sqrt{\mu\varepsilon}\,E_0$ entonces

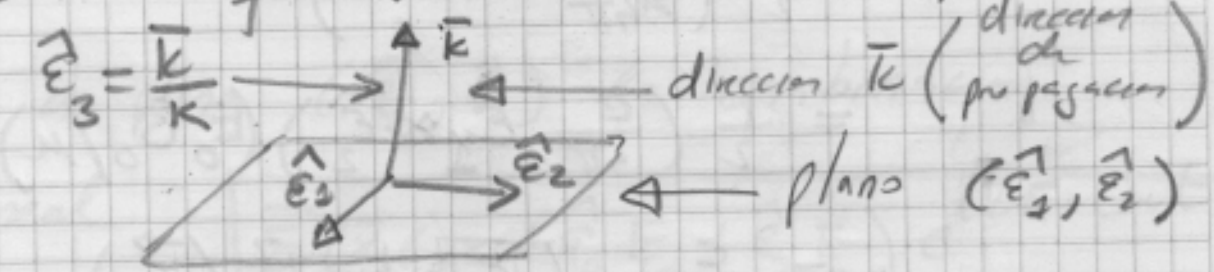
$$\frac{\bar{k} \times \hat{\varepsilon}_1}{k} \mp \hat{\varepsilon}_2 = 0 \quad \text{o'}$$

$$\boxed{\hat{\varepsilon}_2 = \pm \left(\frac{\bar{k} \times \hat{\varepsilon}_1}{k} \right)}$$

Esto significa que $\left(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \frac{\bar{k}}{k}\right)$

forman un conjunto de vectores ortogonales.

De manera que $(\bar{E}_0 \perp \bar{B}_0 \perp \bar{k})$



Se trata de ondas transversales

que propagan energía y momento en la dirección $\bar{k}$ (Poynting), ya que si definimos la media temporal de la densidad de energía

$$W = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon \bar{E} \cdot \bar{E}^* + \frac{1}{\mu} \bar{B} \cdot \bar{B}^*\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon |\bar{E}_0|^2 + \frac{1}{\mu} |\bar{B}_0|^2\right)\right]$$

130

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon|E_0|^2 + \frac{1}{\mu}\mu\varepsilon|E_0|^2\right)\right)$$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon}{8\pi}|E_0|^2}$$ (Media temporal de la densidad de energía)

y para el vector de Poynting complejo (tomando la media temporal del flujo)

$$\langle \bar{S} \rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{4\pi}\bar{E}\times\bar{H}^*\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{c}{4\pi}\hat{\varepsilon}_1\times\hat{\varepsilon}_2\right)(E_0 B_0/\mu)$$

$$= \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|E_0|^2\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)$$

$$\boxed{\langle \bar{S} \rangle = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|E_0|^2\,\hat{\varepsilon}_3}$$

(Media temporal del flujo de energía)

Estados de Polarización:

En general, ya que $\bar{E}$ y $\bar{B}$ son coplanares, podemos tomar una base en el plano que los contiene, y manteniendo la condición de ortogonalidad

121

escribir $\Rightarrow$

$$\bar{E}_1(\bar{x},t) = \hat{\varepsilon}_1 E_1 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega t}$$

$$\bar{E}_2(\bar{x},t) = \hat{\varepsilon}_2 E_2 e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega t}$$

$$\bar{B}_1(x,t) = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\bar{k}\times\bar{E}_1(x,t)}{k}$$

$$\bar{B}_2(\bar{x},t) = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\bar{k}\times\bar{E}_2(x,t)}{k}$$

En el plano $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ la combinación lineal

$$\boxed{\bar{E}(\bar{x},t) = (\hat{\varepsilon}_1 E_1 + \hat{\varepsilon}_2 E_2)\, e^{i\bar{k}\cdot\bar{x}-i\omega t}}$$

es una solución permitida para el campo eléctrico.

Aquí se pueden dar varias posibilidades, dependiendo de

(1) diferencia de fases entre E_1 y E_2

(2) diferencia de módulos de E_1 y E_2

(132)

De aquí resultan los siguientes estados de Polarización $\Rightarrow$ Polarización

(a) E_1 y E_2 en fase $\Rightarrow$ lineal

(b) E_1 y E_2 no están en fase $\Rightarrow$ elíptica

(c) $|E_1| = |E_2|$ y $E_1 \perp E_2$ $\Rightarrow$ circular

En general hemos definido

$$E_1 \Rightarrow E_1 e^{i\delta_1}$$
$$E_2 \Rightarrow E_2 e^{i\delta_2}$$

caso (a) $\delta_1 = \delta_2 = \delta$

(Polarización lineal) $\hat{\varepsilon}_1 E_1 + \hat{\varepsilon}_2 E_2 = e^{i\delta}(\hat{\varepsilon}_1 E_1 + \hat{\varepsilon}_2 E_2)$

$$|\overline{E}| = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$
$$\tan\theta = (E_2/E_1)$$

$\boxed{\text{Casos (b) y (c)}}$ $\delta_1 \neq \delta_2$ $\delta_2 - \delta_1 = \Delta$

$$\left(\hat{\varepsilon}_1 e^{i\delta_1} E_1 + \hat{\varepsilon}_2 e^{i\delta_2} E_2\right)$$

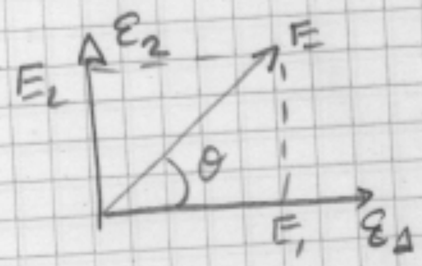
Si $|E_1| = |E_2|$ pero $\delta_1 - \delta_2 = \pm\pi/2$

$$\Rightarrow (e^{i\delta_1} E_1)\left(\hat{\varepsilon}_1 + \hat{\varepsilon}_2 e^{i(\delta_2 - \delta_1)}\right)$$
$$\Rightarrow (E_1)(\hat{\varepsilon}_1 \pm i\,\hat{\varepsilon}_2)$$

(133):

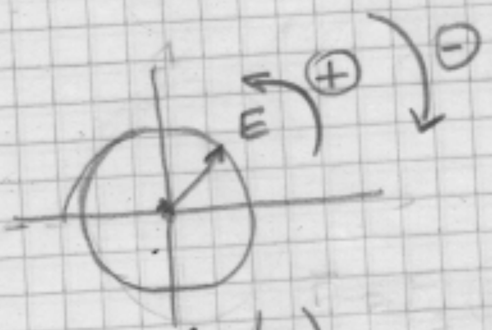
Este es el caso de la polarización <u>circular</u>

Si $\delta_1 - \delta_2 \neq 0$ y $|E_1| \neq |E_2|$ la polarización resultante es la <u>elíptica</u>



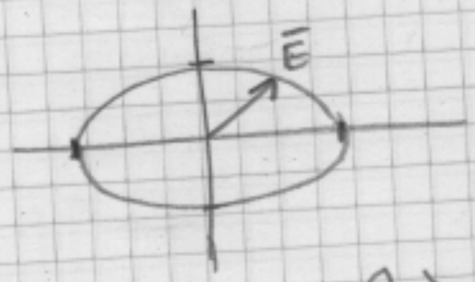
(lineal)

$(\hat{\varepsilon}_1 E_1 + \hat{\varepsilon}_2 E_2) e^{ikx - i\omega t}$



(circular)

$E_1 (\hat{\varepsilon}_1 \pm i \hat{\varepsilon}_2) e^{i\bar{k}\bar{x} - i\omega t}$



$(E_1 \hat{\varepsilon}_1 + E_2 \hat{\varepsilon}_2) e^{i\bar{k}\bar{x} - i\omega t}$

(caso b) (E_1 y E_2 en fase, complejos, $|E_1| \neq |E_2|$)
(polarización elíptica)

— x —

134 **Paquete de ondas**

Estudiaremos aquí la propagación de ondas electromagnéticas. Debemos distinguir las propiedades del medio donde se propagan las ondas: tendremos en general:

① Medios dispersivos
② Medios disipativos

En los medios dispersivos la relación entre la velocidad de propagación de la energía y la velocidad de fase no es directa, ya que cada componente del paquete de ondas tendrá su propia velocidad de fase.

Para el caso ② (Medios disipativos) el paquete de ondas puede atenuarse, con o sin distorsión de la forma del paquete.

caso 1) Tomaremos valores <u>reales</u> para w y k $w \equiv w(k)$ y escribimos para el paquete de ondas la expresión en una dimensión

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx - iw(k)t} \, dk$$

(13T)

dado $F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t=0)\,e^{-ikx}\,dx$

si $f(x,t=0)$ es una función armónica,
resulta $\left(f(x,t=0) \simeq e^{ik_0x} \right)$

entonces $$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_0-k)x}\,dx$$

$$F(k)=\sqrt{2\pi}\,\delta(k-k_0)$$

y con este valor la onda se escribe
$$f(x,t)\simeq e^{ik_0x-i\omega(k_0)t}$$

(onda monocromatica que avanza en $\underline{\underline{x}}$)

En general, si expresamos la dependencia de la frecuencia con el número de onda como

$$\omega(k)=\omega(k_0)+\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}(k-k_0)+\cdots$$

entonces
$$f(x,t)\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\,F(k)\,e^{ikx-i\omega(k_0)t-i\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}(k-k_0)t}$$

$$\simeq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-i\omega(k_0)t+i\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}k_0t}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} dk\,F(k)\,e^{ikx}\,e^{-i\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_{k_0}kt}$$

$$\Rightarrow e^{i\left(\left[\frac{dw}{dk}\right]_{k_0} k_0 - w(k_0)\right)t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(k)\, e^{i\left(x - \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} t\right)k} dk$$

Factor de fase

$$\left[f\left(x - \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} t,\ 0\right) \right]$$

$\Rightarrow$ Vemos que la superposición

$\Rightarrow$ $f(x,t)$ $\Rightarrow$ se propaga sin distorción (conserva la forma) con velocidad

$\Rightarrow$ $\boxed{\left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} \Rightarrow \text{velocidad de grupo}}$

$x \to (x - v_g t)$

$\Rightarrow$ A esta velocidad se propaga el impulso

En un medio con índice de refracción $n(k)$ tenemos

$$w(k) = \frac{ck}{n(k)} \Rightarrow$$

por lo tanto $\boxed{\left(\frac{w(k)}{k}\right) = \frac{c}{n(k)}}$ = velocidad de fase

esta es la definición de la velocidad de fase (puede ser mayor o menor que c).

En condiciones normales

$$\left\{ \begin{aligned} v_g &= \left(\frac{dw}{dk}\right)_{k_0} \leq c \\ v_f &= \frac{w(k)}{k} = \frac{c}{n(k)} \end{aligned} \right\}$$

(137)

La velocidad de grupo se puede reescribir como función de la dependencia de n (índice de refracción) con $\underline{\underline{\omega}}$.

(dispersión normal $\frac{dn}{d\omega} > 0$ y tenemos $n > 0$)

(dispersión anómala $\frac{dn}{d\omega} < 0$, $\left|\frac{dn}{d\omega}\right| >> 1$)

$\boxed{\text{Propagación de un impulso en medios dispersivos.}}$

Como hemos visto

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk$$

Si imponemos las condiciones iniciales

$\left(f(x,t=0)\right)$, $\left(\frac{\partial f(x,0)}{\partial t}\right)_{t=0}$. Si tomamos solo en cuenta $\Downarrow f(x,t=0)$ resulta para la amplitud $F(k)$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x,0) e^{-ikx} dx = \int dk F(k).$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i(k-k')x} dx}_{\delta(k-k')}$$

$$\Rightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,0) e^{-ikx} dx$$

Agregando ahora la derivada $\left(\frac{\partial}{\partial t} f(x,0)\right)$

$\Rightarrow$

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \left[f(x,0) + \frac{i}{\omega(k)} \frac{\partial f(x,0)}{\partial t} \right] dx$$

Para una condición inicial consistente en una forma gaussiana, resulta

$$\begin{cases} f(x,0) = e^{-x^2/2\sigma^2} \cos(k_0 x) \\ \dfrac{\partial f(x,0)}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ikx} e^{-x^2/2\sigma^2} \cos k_0 x$$

El integrando se escribe

$$\frac{1}{2} e^{-ikx - x^2/2\sigma^2} \left(e^{ik_0 x} + e^{-ik_0 x}\right)$$

$$= \frac{1}{2} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-i(k-k_0)x} + \frac{1}{2} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-i(k+k_0)x}$$

Ahora $\rightarrow$ $\int dx\, e^{-\alpha x - \beta x^2} = \int dx\, e^{-\beta\left(x^2 + \frac{\alpha}{\beta} x\right)}$

$$= \int dx\, e^{-\beta\left[\left(x + \frac{\alpha}{2\beta}\right)^2 - \alpha^2/4\beta^2\right]}$$

$$= e^{(\alpha^2/4\beta)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta\left(x + \alpha/2\beta\right)^2}$$

$$\left.\begin{matrix} \left[\beta = \frac{1}{2\sigma^2}\ ;\ \alpha = i(k-k_0)\right] \\ \left[\beta = \frac{1}{2\sigma^2}\ ;\ \alpha = i(k+k_0)\right] \end{matrix}\right\}$$

(139)

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta\left(x+\frac{\alpha}{2\beta}\right)^2}$$

$z = x + \alpha/2\beta$

$dz = dx$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz\, e^{-\beta z^2}$$

$w = \beta z^2$

$dw = 2\beta z\, dz$

$$= 2\int_{0}^{\infty} dz\, e^{-\beta z^2}$$

$dw = 2\beta \frac{w^{1/2}}{\beta^{1/2}} \cdot dz$

$$= \frac{1}{\beta^{1/2}} \underbrace{\int_{0}^{\infty} dw\, w^{s-1} e^{-w}}_{\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}}$$

$dz = \frac{1}{2\beta^{1/2}} w^{-1/2} dw$

volviendo a la integral

$\Rightarrow$

$$\frac{1}{\cancel{\sqrt{2\pi}}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{\pi}}\, \cancel{\sqrt{2}}\, \sigma \left[e^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2} + e^{-(k+k_0)^2\sigma^2/2} \right]$$

de donde

$$\boxed{F(k) = \frac{\sigma}{2}\left(e^{-(k-k_0)^2\sigma^2/2} + e^{-(k+k_0)^2\sigma^2/2} \right)}$$

Esta forma es simétrica $F(-k) = F(k)$ implicando que a $t=0$ la solución consiste en dos paquetes de onda idénticos que se mueven hacia izquierda y derecha en $\underline{x}$.

Ejemplo

Supongamos $\omega(k) = \omega_0 (1 + \alpha k^2)$

$$v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0} = 2\alpha \omega_0 k \Big|_{k_0} = 2\alpha \omega_0 k_0$$

(Ejercicio en T. 9)

—— x ——

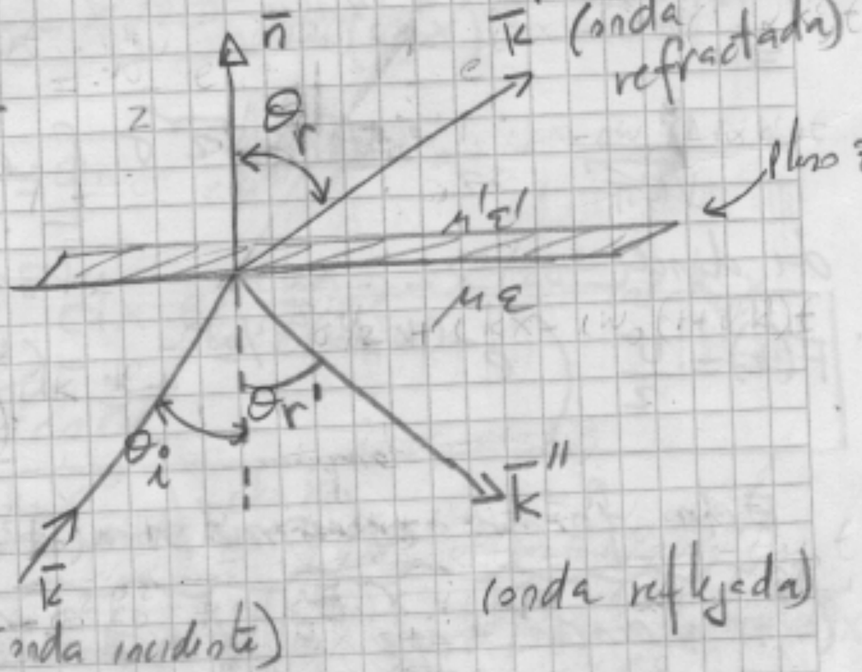
Condiciones de contorno en dieléctricos:

Consideremos la onda incidente

$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{i k x - i\omega t}$

$\bar{B} = \sqrt{\mu\varepsilon}\ \dfrac{\bar{k} \times \bar{E}}{k}$

Diagrama $\Rightarrow$



onda refractada

$$\bar{E}' = \bar{E}_0' e^{i\bar{k}'\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

$$\bar{B}' = \sqrt{\mu'\varepsilon'}\ \frac{\bar{k}' \times \bar{E}'}{k'}$$

onda reflejada

$$\bar{E}'' = \bar{E}_0'' e^{i\bar{k}''\cdot\bar{x} - i\omega t}$$

$$\bar{B}'' = \sqrt{\mu\varepsilon}\ \frac{\bar{k}'' \times \bar{E}''}{k}$$

Aquí $|\bar{k}| = |\bar{k}''| = k = \dfrac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}$

$$|\bar{k}'| = k' = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu'\varepsilon'}$$

(151)

Condiciones de contorno

$$(\bar{k}\cdot\bar{x})_{z=0} = (\bar{k}'\cdot\bar{x})_{z=0} = (\bar{k}''\cdot\bar{x})_{z=0}$$

(igualdad de factores de fase en $z=0$)

Por la coplanaridad de los números de onda resulta

$$k \sin\theta_i = k' \sin\theta_r = k'' \sin\theta_{r'}$$

como $k''=k \Rightarrow \theta_i = \theta_{r'}$ (Snell)

y $$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{k'}{k} = \sqrt{\frac{\mu'\varepsilon'}{\mu\varepsilon}} = \frac{n'}{n}$$

<u>Ahora</u>

Conservación de componentes de $\bar{E}$ paralelas al plano de separación y normales de $\bar{D} \Rightarrow$

(D normal) $\Rightarrow \left(\varepsilon(\bar{E}_0 + \bar{E}_0'') - \varepsilon'\bar{E}_0'\right)\cdot\bar{n} = 0$

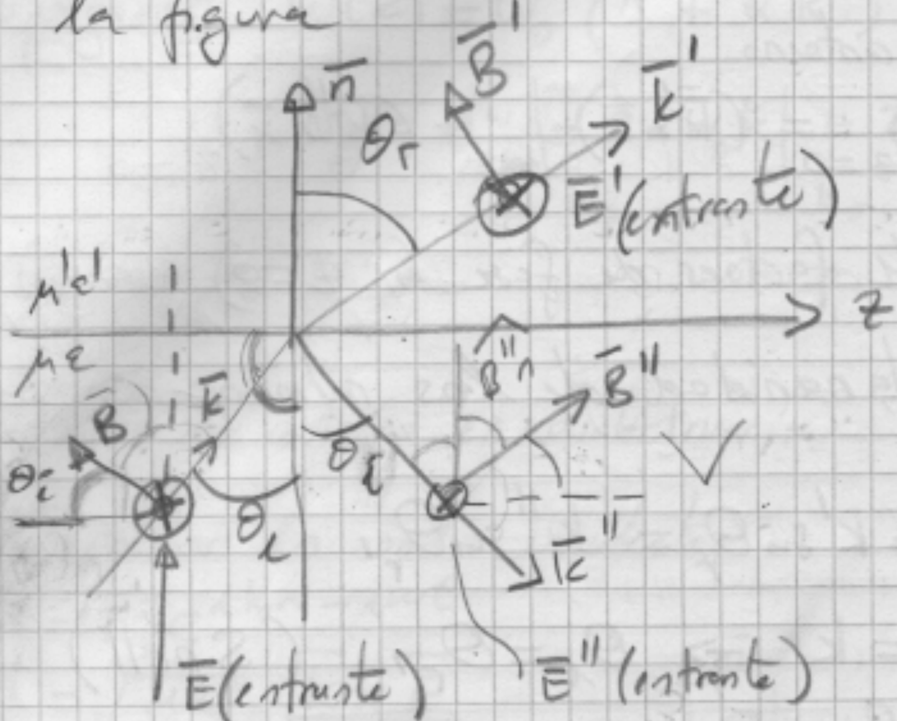
(B normal) $\Rightarrow (\bar{k}\times\bar{E}_0 + \bar{k}''\times\bar{E}_0'' - \bar{k}'\times\bar{E}_0')\cdot\bar{n} = 0$

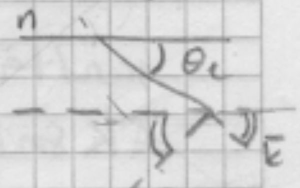
$B=\mu H$
$D=\varepsilon E$

(H tangencial) $\Rightarrow \left[\frac{1}{\mu}(\bar{k}\times\bar{E}_0 + \bar{k}''\times\bar{E}_0'') - \frac{1}{\mu'}(\bar{k}'\times\bar{E}_0')\right]\times\bar{n} = 0$

(E tangencial) $\Rightarrow [\bar{E}_0 + \bar{E}_0'' - \bar{E}_0']\times\bar{n} = 0$

Aplicaremos estas relaciones al caso de la figura





$\frac{\pi}{2}+\theta_i+\tilde{\theta}=\pi$

$\theta=\left(\frac{\pi}{2}-\theta_i\right)$

$\Rightarrow$ los campos eléctricos son todos paralelos a la superficie de separación

$$\begin{cases} \Rightarrow E_0+E_0''=E_0' \\ \Rightarrow \frac{1}{\mu}kE_0\,\mathrm{sen}\,\widehat{Bn}+\frac{1}{\mu}k''E_0''\,\mathrm{sen}(\widehat{B''n}) = \frac{1}{\mu'}k'E_0'\,\mathrm{sen}(\widehat{B'n}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathrm{sen}\,\widehat{Bn}=\mathrm{sen}(\pi/2-\theta_i)=\cos\theta_i$$

$$E_0+E_0''=E_0' \Rightarrow E_0'-E_0''=E_0$$

$$\frac{k}{\mu}(E_0-E_0'')\cos\theta_i=\frac{k'}{\mu'}E_0'\cos\theta_r$$

$$\frac{k}{\mu}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\ ;\ \frac{k'}{\mu'}=\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}$$

o sea

$$\Rightarrow \quad E_0 = E_0' - E_0''$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0 \cos\theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\, E_0' \cos\theta_r + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, E_0'' \cos\theta_i$$

de donde

$$E_0' = \frac{\begin{vmatrix} E_0 & -1 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \cos\theta_i & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\theta_i \end{vmatrix}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\theta_r} \; ; \qquad E_0'' = \frac{\begin{vmatrix} 1 & E_0 \\ \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\theta_r & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0\cos\theta_i \end{vmatrix}}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\theta_r}$$

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2\sqrt{\varepsilon/\mu}\,\cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\theta_r} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(\frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i}\right)}$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0 \cos\theta_i - E_0\sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}}\cos\theta_r}{\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\cos\theta_i\left(1 - \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\varepsilon\mu'}}\frac{\cos\theta_r}{\cos\theta_i}\right)}$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon'\mu}{\varepsilon\mu'}} = \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'\mu}{\varepsilon\mu\mu'}\,\frac{\mu}{\mu'}} = \sqrt{\frac{\varepsilon'\mu'}{\varepsilon\mu}}\left(\frac{\mu}{\mu'}\right) = \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r}$$

$$\boxed{\frac{E_0'}{E_0} = \frac{2}{1 + \left(\frac{\mu}{\mu'}\right)\left(\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}\right)}}$$

$$\boxed{\frac{E_0''}{E_0} = \frac{1 - \frac{\mu}{\mu'}\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}}{1 + \frac{\mu}{\mu'}\left(\frac{\tan\theta_i}{\tan\theta_r}\right)}}$$

soluciones para $\overline{E}$ incidente perpendicular al plano de incidencia

(plano $\overline{k}, \overline{B}$)

Si ahora invertimos las direcciones de $\overline{E}$ y $\overline{B}$ de modo que $\overline{B}$ es paralelo al plano de separación ($\overline{E}$ paralelo al plano de incidencia) tenemos $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \cos\theta_i \, (E_0 - E_0'') = E_0' \cos\theta_r \\ \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, (E_0 + E_0'') = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \, E_0' \end{cases}$$

de donde

$$\cos\theta_i \, E_0 = E_0' \cos\theta_r + E_0'' \cos\theta_i$$

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, E_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \, E_0' - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, E_0''$$

$$\begin{cases} E_0' = \dfrac{\begin{vmatrix} E_0 \cos\theta_i & \cos\theta_i \\ E_0 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} & -\sqrt{\varepsilon/\mu} \end{vmatrix}}{\left(-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\theta_r - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos\theta_i\right)} \\ E_0'' = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos\theta_r & E_0 \cos\theta_i \\ \sqrt{\varepsilon'/\mu'} & \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, E_0 \end{vmatrix}}{\left(-\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos\theta_r - \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\mu'}} \cos\theta_i\right)} \end{cases}$$

(Ejercicio $\rightarrow$ simplificar como en el caso anterior)