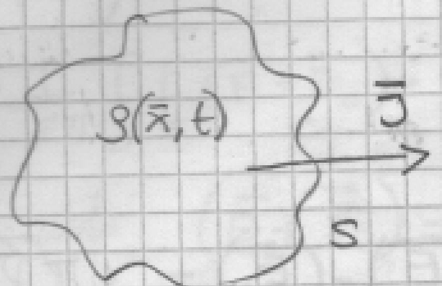
Magnetismo

- Ecuación de continuidad

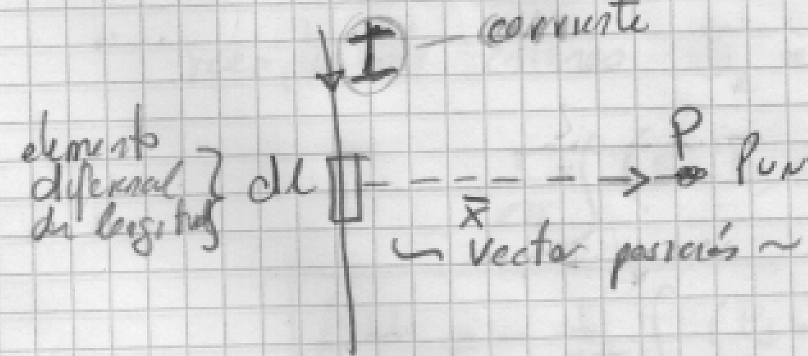


Para una distribución de cargas variable en el tiempo, la densidad de corriente ($\vec{J}$) generada por la variación de ρ en el volumen, satisface

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0}$$

Para el caso estacionario (magnetismo de corrientes) tenemos $\boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{J} = 0}$

Tomemos un cable conductor



el diferencial de campo magnético en P (punto de observación) $d\vec{B}$ esta definido por el producto vectorial

$$\boxed{d\bar{B} = k I \frac{d\vec{l} \times \vec{X}}{|\bar{x}|^3}}$$

Si en lugar de la corriente I tenemos una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ escribimos

$$\boxed{\bar{B} = k q \frac{\vec{v} \times \vec{x}}{|\bar{x}|^3}}$$

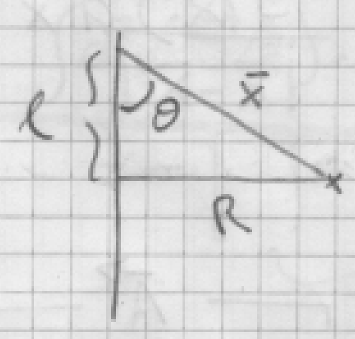
ó $$\boxed{\vec{B} = k \vec{v} \times \vec{E} \qquad (\text{si } v \ll c)}$$

k es una constante que depende del sistema de unidades. En el sistema gaussiano

$\boxed{k = 1/c}$ (c = velocidad de la luz en vacío)

Si integramos la expresión para $d\bar{B}$ resulta

$$|\bar{B}| = k I \int \frac{dl \; x}{|x|^3} \sin\theta = k I R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}}$$



$$\sin\theta = \frac{R}{x}$$

$$x = \sqrt{R^2+l^2}$$

ó $$|\bar{B}| = \frac{1}{c} \cdot (IR) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}} \, .$$

$$= \frac{1}{c} (IR) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dl}{(R^2+l^2)^{3/2}} \right] = \left(\frac{2I}{Rc} \right)$$

(Ampere $\rightarrow$ $2\pi R B = \frac{4\pi}{c} I \rightarrow B = \frac{2I}{cR}$)

La fuerza sobre un elemento de corriente $I_a d\vec{l}_a$ el campo magnético generado por otro elemento de corriente se escribe

$$\boxed{d\vec{F} = \frac{I_a}{c} d\vec{l}_a \times \vec{B}}$$

Para una densidad de corriente $\vec{J}$, en un volumen tenemos

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{c}\int \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\, d^3r}$$

Si volvemos a la expresión de $d\vec{B}$ tenemos

$$\boxed{\bar{B}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\int d^3\bar{x}'\ \bar{J}(\bar{x}') \times \frac{(\bar{x}-\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|^3}}$$

o bien

$$\boxed{\bar{B}(\bar{x}) = \frac{1}{c}\vec{\nabla}_{(x)} \times \int \frac{\bar{J}(\bar{x}')\, d^3\bar{x}'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0}$$

y

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{1}{c}\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\Bigg[\overbrace{\int\frac{\bar{J}(\bar{x}')\, d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}^{\vec{A}}\Bigg]$$

$$= \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\vec{A}$$

70

Entonces (los operadores diferenciales actúan sobre $\bar{x}$)

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{1}{c}\,\bar{\nabla}\int d^3\vec{x}'\;\bar{J}\cdot\bar{\nabla}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)$$

$$-\frac{1}{c}\int d^3x'\;\bar{J}(\bar{x}')\;\nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)$$

Como vimos

$$\nabla^2\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}|}\right) = -4\pi\,\delta(\bar{x}-\bar{x}')$$

$$\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\int d^3\bar{x}'\;\vec{J}(\bar{x}')\,\delta(\bar{x}-\bar{x}')$$

$$+\frac{1}{c}\,\vec{\nabla}\left[\int d^3x'\;\vec{J}\cdot\vec{\nabla}_{x}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)\right]$$

de donde resulta

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{J}}$$

La segunda integral se anula, ya que

$$\int d^3x'\,\bar{J}(\bar{x}')\cdot\bar{\nabla}_x\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|} = -\int d^3x'\,\underbrace{\vec{J}(\bar{x}')}_{u}\cdot\underbrace{\bar{\nabla}_{x'}\left(\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right)}_{dv}$$

$$= -\left[\underbrace{\int d^3\bar{x}'\;\frac{\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}}_{=0 \text{ x continuidad de } \bar{J}}\right]$$

$d(uv) = u\,dv + v\,du$

$$\left(\frac{\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\right) \qquad u = \bar{J} \quad v = \frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

$$\int u\,dv = \int -v\,du + \int d(uv)$$

Ley de Ampere

Si $\overline{\nabla}\times\overline{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{J}$

$\Rightarrow$ Sobre una superficie abierta limitada por una curva C (cerrada), resulta

$$\int_S (\overline{\nabla}\times\overline{B})\cdot\vec{n}\,ds = \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,ds$$

y por el teorema de Stokes

$$\oint_C \overline{B}\cdot d\overline{l} \Rightarrow \frac{4\pi}{c}\int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,da$$

como $\vec{J}$ es la densidad de corriente (densidad volumetrica) la integral de superficie es igual a la corriente encerrada en la curva que limite el area en cuestion. $\rightarrow$

$$\int_S da\,\overline{J}\cdot\overline{n} = I$$

y entonces resulta la ley de Ampere

77

$$\oint \bar{B} \cdot d\bar{l} = \frac{4\pi}{c} I$$

Hasta el momento hemos definido

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\nabla} \times \bar{B} &= \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \bar{\nabla} \cdot \bar{B} &= 0 \end{aligned}}$$

La solución formal al problema estático consiste en introducir el potencial vectorial $\bar{A}(\bar{x})$ tal que

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A} \\ \text{donde} \quad &\bar{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x} - \bar{x}'|} d^3x' \end{aligned}}$$

al que pedimos agregar el gradiente de una función escalar,

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \bar{\nabla} \psi$$

ya que $\bar{\nabla} \times \bar{A} \rightarrow \bar{\nabla} \times \bar{A} + \underbrace{\bar{\nabla} \times \bar{\nabla} \psi}_{=0}$

ese agregado **NO** tiene consecuencias físicas.

(es decir $\boxed{\bar{B}(\bar{A}) \equiv \bar{B}(\bar{A} + \bar{\nabla} \psi)}$

Si ahora expresamos la ecuación para $\bar{A}$ a partir de la ecuación para $\bar{B}$ tendremos

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\bar{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\bar{A}$$
$$= \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Por lo tanto si elegimos $\vec{\nabla}\cdot\bar{A}=0$

(posible ya que si $\bar{A}\to\bar{A}+\vec{\nabla}\psi$
$\vec{\nabla}\cdot\bar{A}\to\vec{\nabla}\cdot\bar{A}+\nabla^2\psi$
con esta elección de gauge $\vec{\nabla}\cdot\bar{A}=0$)

$$\Rightarrow \nabla^2\bar{A} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Hasta ahora hemos establecido

campo eléctrico	campo magnético
$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi$	$\bar{B}=\vec{\nabla}\times\bar{A}$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=4\pi\rho$	$\vec{\nabla}\times\bar{B}=\frac{4\pi}{c}\bar{J}$
$\nabla^2\phi=-4\pi\rho$	$\nabla^2\bar{A}=-\frac{4\pi}{c}\bar{J}$
$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0$	$\vec{\nabla}\cdot\bar{B}=0$

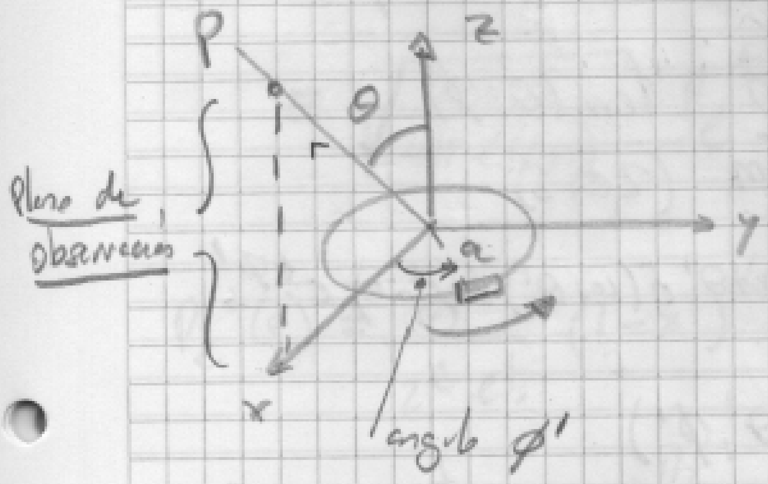
Ecuación de Continuidad $\Rightarrow \frac{\partial\rho}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\bar{J}=0$

Caso Estático $\Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\bar{J}=0$

Invariancia de escala (gauge) $\bar{A}\to\bar{A}+\vec{\nabla}\psi$

Ejemplo #1

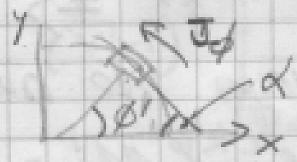
Cálculo del potencial vectorial para una espira (plano (x,y))



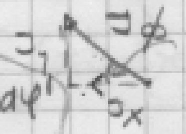
▷ localización de la corriente

$$\boxed{J_\phi = I\,\delta(\cos\theta')\,\frac{\delta(r'-a)}{a}}$$

$$\begin{cases} J_x = -J_\phi \sin\phi' \\ J_y = J_\phi \cos\phi' \end{cases}$$



$$A_\phi = \frac{I}{ac}\int \frac{dr'\,r'^2\,d\theta'\sin\theta'\,\delta(\cos\theta')\,\delta(r'-a)\,d\varphi'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$



$$\begin{cases} J_x = -J_\phi \cos\alpha \\ J_y = J_\phi \sin\alpha \\ \frac{\pi}{2} + \phi' + \alpha = \pi \end{cases}$$

$$\alpha = \left(\frac{\pi}{2} - \phi'\right)$$

$$\begin{cases} \cos\alpha = \sin\phi' \\ \sin\alpha = \cos\phi' \end{cases}$$

$$|\bar{x}-\bar{x}'| = \left[r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos\phi')\right]^{1/2}$$

$$|\bar{x}-\bar{x}'| = \left(a^2 + r^2 - 2ar\sin\theta\cos\phi'\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{A_\phi = \left(\frac{Ia}{c}\right)\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'\,\cos\phi'}{(a^2+r^2-2ar\sin\theta\cos\phi')^{1/2}}}$$

el plano de observación es el plano (zx), la integración de J_x se anula, queda solamente J_y.

La solución formal de A_ϕ se expresa en función de integrales elípticas. Alternativamente se puede expresar en función de esféricos armónicos

$$A_\phi = \frac{4\pi I}{ca} \operatorname{Re} \sum_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta,\phi)}{(2l+1)} \cdot$$

$$\int dr' r'^2 d\theta' d\phi' \operatorname{sen}\theta' \delta(\cos\theta') \delta(r'-a) e^{i\phi'} \cdot$$

$$\frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$$

Si tenemos en cuenta el factor $e^{i\phi'} Y^*_{lm}(\theta',\phi')$

$\underline{\propto}\ e^{i\phi' - im\phi'} \Rightarrow m=1$ es la única contribución no nula (para cualquier otro m

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\phi'} d\phi' = \frac{1}{ik}\left(e^{2\pi k i} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{ik}\Big(\underbrace{\underbrace{\cos 2\pi k}_{1} - 1 + i \operatorname{sen} \underbrace{2\pi k}_{0}}_{=0}\Big)$$

entonces $\Rightarrow$

$$A_\phi = \frac{4\pi I}{ca} \operatorname{Re} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{Y_{l1}(\theta,\phi)}{(2l+1)} \cdot \frac{r_<^{l}}{r_>^{l+1}} \cdot$$

$$\left(Y^*_{l1}\left(\theta'=\frac{\pi}{2}, \phi'\right) e^{i\phi'}\right) \cdot 2\pi$$

$r_<, r_>$ será el menor ó el mayor entre $\underline{\underline{a}}$ (radio de la espira) y r (punto de observación).

51

luego $\Rightarrow \left(Y^{*}_{\ell 1}(\theta' = \pi/2, \phi') e^{i\phi'} \right)$

$$\equiv \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi \ell(\ell+1)}} \cdot P_\ell^{1}(0)$$

$$P_\ell^{1}(0) = \frac{(-)^1}{2^\ell \ell!} (1-x^2)^{1/2} \left(\frac{d^{\ell+1}}{dx^{\ell+1}} (x^2-1)^\ell \right)$$

$$P_1^{1}(0) = \frac{(-)^1}{2} (1-x^2)^{1/2} \underbrace{\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)}_{2} \Big|_{x=0} = -1.$$

$$P_2^{1}(0) = \frac{(-)^1}{2^2 2!} (1-x^2)^{1/2} \frac{d^3}{dx^3} (x^2-1)^2 \Big|_{x=0}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} (x^4 - 2x^2 + 1) = 12x \Big|_{x=0} = 0$$

$$P_3^{1}(0) = \frac{(-)^1}{2^3 3!} (1-x^2)^{1/2} \left(\frac{d^4}{dx^4} (x^2-1)^3 \right)$$

$\Rightarrow P_\ell^{1}(0) = 0 \Big|_{\ell = 2, 4, \dots \text{ par}}$

$$P_\ell^{1}(0) = \left[\frac{(-)^{n+1} \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1)\Gamma(3/2)} \right]$$

$(\ell = 2n+1)$

$(x^2-1)(x^4-2x^2+1)$

$x^6 - 2x^4 + x^2 - x^4 + 2x^2 - 1$

$\frac{d}{dx} \Rightarrow 6x^5 - 2\cdot 4\, x^3 + 3\cdot 2\, x$

$\frac{d^2}{dx^2} \Rightarrow 6\cdot 5\, x^4 - 2\cdot 4\cdot 3\, x^2 + 3\cdot 2$

$\frac{d^3}{dx^3} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot x^3 - 2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 2 x$

$\frac{d^4}{dx^4} = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\, x^2 \underbrace{- 4\cdot 4!}\ \neq 0$

Por lo tanto

$$\boxed{A_\phi = -\pi \frac{I a}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}} \cdot P^1_{2n+1}(\cos\theta)}$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 5.\, 3.\, 1$$

Componentes

$$\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{d}{dr}, \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}, \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{d\phi} \right)$$

$$\vec{A} = (0, \ 0, \ A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} \equiv \begin{vmatrix} \hat{e}_r & \hat{e}_\theta & \hat{e}_\phi \\ \partial_r & \frac{1}{r}\partial_\theta & \frac{1}{r\sin\theta}\partial_\phi \\ 0 & 0 & A_\phi \end{vmatrix}$$

$$B_r = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi) \equiv \frac{1}{r}\left(-\pi\frac{Ia}{c}\right) \sum_{n=0} (-)^n \frac{(2n-1)!!}{2^n (n+1)!} \frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}} \cdot \frac{d}{d\theta}\left(P^1_{2n+1}(\cos\theta) \right)$$

$(2n+1)(n+1)(2n-1)$

$$\frac{(2n-1)!!}{(n+1)!} \cdot l(l+1) \equiv \frac{(2n+1)(2n+2)(2n-1)!!}{(n+1)!} \equiv \left(\frac{2}{n!}\right)$$

$x = \cos\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta = -\sqrt{1-x^2}$

$l = (2n+1)$ $\left\{ \frac{d}{dx}\left(\sqrt{1-x^2}\, P^1_l(x)\right) = l(l+1) P_l(x) \right\}$

$$\Rightarrow \boxed{B_r = \frac{2\pi I a}{c r} \sum_{n=0} (-)^n \frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}} \cdot P_{2n+1}(\cos\theta) \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{n!} (2n+1)!!}$$

83

En definitivo

corregir en las notas

$$\boxed{B_r = \frac{2\pi I a}{c r}\sum_{n=0}\left(\frac{(-)^n (2n+1)!!}{2^n n!}\right)\left(\frac{r_<^{2n+1}}{r_>^{2n+2}}\right) P_{2n+1}(\cos\theta)}$$

De la misma manera

$$B_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r A_\phi)$$

$$B_\theta = \frac{\pi I a}{c}\sum_{n=0}\frac{(-)^n (2n-1)!!}{2^n (n+1)!} P^1_{2n+1}(\cos\theta)\times\Big\{$$

$$\times\begin{cases} r_< = r \quad r_> = a & \dfrac{1}{a^{2n+2}}\cdot(2n+1)\, r^{2n} = \left(\dfrac{r}{a}\right)^{2n}\cdot\dfrac{1}{a^2}(2n+1) \\ r_> = r \quad r_< = a & -\dfrac{a^{2n+1}}{r^{2n+3}}(2n+2) = -\left(\dfrac{a}{r}\right)^{2n}\cdot\dfrac{a}{r^3} \end{cases}$$

Distribuciones localizadas de corriente

▷ Para una densidad localizada de corrientes $\vec{J}(\bar{x}')$ tenemos a partir de la definición del potencial vector

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{1}{c}\int d^3x' \,\frac{\bar{J}(\bar{x}')}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

$$\simeq \frac{1}{c}\int d^3\bar{x}' \left\{\frac{1}{|\bar{x}|} + \frac{\bar{x}\cdot\bar{x}'}{|\bar{x}|^3} + \cdots\right\}\bar{J}(\bar{x}')$$

en componentes

$$A_k(\bar{x}) \simeq \frac{1}{c|\bar{x}|}\int d^3\bar{x}'\, \bar{J}_k(\bar{x}') + \frac{\bar{x}}{c|\bar{x}|^3}\cdot\int d^3\bar{x}'\, \bar{J}_k(\bar{x}')\,\bar{x}' + \cdots$$

La primera integral se anula, ya que $\bar{\nabla}\cdot\bar{J}=0$ (estado estacionario). Para calcular la segunda integral usaremos $\Rightarrow$

$$\left[(\bar{x}\cdot\bar{x}')\,\bar{J}\right]_\alpha = \sum_k (x_k x'_k)\, J_\alpha \equiv$$

$$\equiv \sum_i (x_i J_i)\, x'_\alpha - \left(\bar{x}\times(\bar{x}'\times\bar{J})\right)_\alpha$$

$$(\bar{x}'\times\bar{J})_i = \varepsilon_{ijk}(x'_j J_k)$$

Así, si $\alpha=1 \Rightarrow \sum_i (x_i J_i)\, x'_1$

$$- x_2(x'_1 J_2 - x'_2 J_1)$$

$$+ x_3(-x'_1 J_3 + x'_3 J_1)$$

$$= x_1 x'_1 J_1 + \cancel{x_2 x'_1 J_2} + \cancel{x_3 J_3 x'_1}$$

$$- \cancel{x_2 x'_1 J_2} + x'_2 x_2 J_1 - \cancel{x_3 x'_1 J_3}$$

$$+ x_3 x'_3 J_1$$

$$= (x_1 x'_1 + x_2 x'_2 + x_3 x'_3)\, J_1$$

demo

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{x}\cdot\bar{x}')\,\bar{J} = (\bar{x}\cdot\bar{J})\,\bar{x}' - \bar{x}\times(\bar{x}'\times\bar{J})}$$

Si ahora integramos

$$\int (J_\alpha x'_\beta + x'_\alpha J_\beta)\, d^3x' = 0$$

(ya que $\int \Big[\underbrace{\bar{\nabla}'\cdot(x'_\alpha \bar{J})\, x'_\beta}_{J_\alpha x'_\beta + 0} + \underbrace{x'_\alpha (\bar{J}\cdot\bar{\nabla}')\, x'_\beta}_{x'_\alpha J_\beta}\Big]\, d^3x' = 0$)

$$\Rightarrow \int (\bar{x}\cdot\bar{x}')\,\bar{J}(\bar{x}')\,d^3x' = -\int (\bar{x}\cdot\bar{x}')\,\bar{J}(\bar{x}')\,d^3\bar{x}'$$

$$- \bar{x}\times\int \left(\bar{x}'\times\bar{J}(\bar{x}')\right) d^3\bar{x}'$$

$$\Rightarrow \int (\bar{x}\cdot\bar{x}')\,\bar{J}(\bar{x}')\,d^3x' = -\frac{1}{2}\,\bar{x}\times\int\left(\bar{x}'\times\bar{J}(\bar{x}')\right) d^3\bar{x}'$$

definiendo el momento magnético

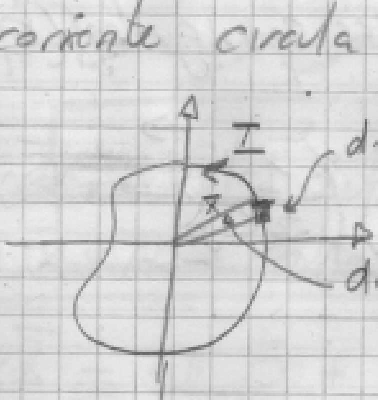
$$\boxed{\bar{m} = \frac{1}{2c}\int\left(\bar{x}'\times\bar{J}(\bar{x}')\right) d^3x'}$$

obtenemos

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{\bar{x}}{c|\bar{x}|^3}\times\left(-\frac{1}{2}\,\vec{m}\right)$$

$$\boxed{\bar{A}(\bar{x}) = \frac{1}{2c|\bar{x}|^3}\left(\bar{m}\times\bar{x}\right)}$$

Si la corriente circula por un circuito cerrado



$$da = \frac{1}{2}\left(\bar{x}\times d\bar{l}\right)$$

entonces $\quad |\bar{m}| = \frac{I}{c}\underbrace{\int da}_{\text{Area}} = \frac{I\,A}{c}$ $\quad$ [independiente de la forma del circuito]

Si volvemos a la definición de

$$\boxed{\bar{m} = \frac{1}{2c} \int \left(\bar{x}' \times \bar{J}(\bar{x}') \right) d^3x'}$$

para una dada distribución de carga, $\{ q_i \}$ moviéndose a velocidades $\{ v_i \}$

escribimos $$\boxed{\bar{J} = \sum_i q_i \bar{v}_i \delta(\bar{x} - \bar{x}_i)}$$

entonces $$\boxed{\bar{m} = \frac{1}{2c} \sum_i q_i \left[\bar{x}_i \times \bar{v}_i \right]}$$

Si cada partícula de carga q_i posee masa μ_i, tenemos

$$\boxed{\bar{m} = \sum_i \frac{q_i}{2c\mu_i} \vec{l}_i}$$

donde $\vec{l}_i$ es el momento angular asociado al movimiento de la carga $\underline{i}$.

Si las cargas y masas son iguales ($q_i = q$, $\mu_i = \mu$)

entonces $$\boxed{\bar{m} = \left(\frac{q}{\mu} \right) \left(\frac{1}{2c} \right) \cdot \vec{L}}$$

Ecuaciones Macroscópicas ⇒

Debemos distinguir dos fuentes para el potencial vectorial

1. corrientes que representan el transporte neto de cargas ($\vec{J}$)

2. corrientes de magnetización (localizadas en dominios locales de materia)

(momentos magnéticos por unidad de volumen)

$$\boxed{\bar{J}_M = c\,(\bar{\nabla}\times\bar{M})}$$

Así, escribimos

$$\bar{A}(\bar{x}) = \frac{1}{c}\int \frac{\left[\bar{J}(\bar{x}') + c\left(\bar{\nabla}'\times\bar{M}(\bar{x}')\right)\right]}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\,d^3x'$$

De acuerdo a esta definición el campo magnético $\bar{B} = \bar{\nabla}\times\bar{A}$ resulta la ley de Ampere

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{B} = \frac{4\pi}{c}\,\bar{J} + 4\pi\,(\bar{\nabla}\times\bar{M})}$$

(38) Podemos, para el caso magnético, proceder como en el caso eléctrico, definiendo un nuevo vector que tenga como fuente solo las corrientes de conducción.

Así, definiendo

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{H} = \bar{B} - 4\pi \bar{M} \\ &\bar{\nabla} \times \bar{H} = \frac{4\pi}{c} \bar{J} \\ &\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{aligned}}$$

Análogamente a

$$\begin{aligned} &\bar{\nabla} \cdot \bar{D} = 4\pi \rho \\ &\bar{\nabla} \times \bar{E} = 0 \end{aligned}$$

la proporcionalidad entre $\bar{B}$ y $\bar{H}$

$$\boxed{\bar{B} = \mu \bar{H}}$$

Sin embargo, la linealidad implícita en esta relación debe tomarse con cuidado, ya que (como veremos más adelante) pueden existir otros fenómenos no lineales.

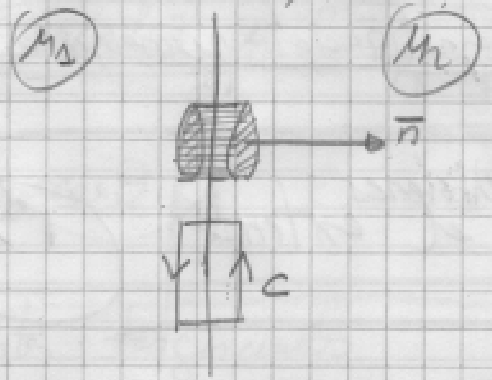
En general $\mu > 1$ (sustancias ferromagnéticas)

y $\mu < 1$ (sistemas diamagnéticos).

89

Condiciones de contorno para $\overline{B}$ y $\overline{H}$.

Si suponemos dos medios con diferentes permeabilidades magnéticas μ_1 y μ_2 tenemos



Aplicando la condición $\overline{\nabla}\cdot\overline{B}=0$ resulta

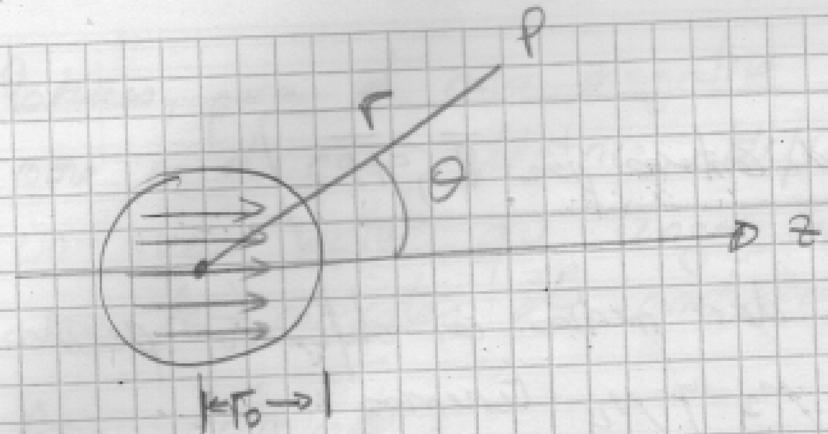
$$\boxed{(\overline{B}_2-\overline{B}_1)\cdot\overline{n}=0}$$ { componentes normales de $\overline{B}$ }

y para la curva C tenemos

$$\boxed{\oint \overline{H}\cdot d\overline{l}=0 \qquad (\text{si } \overline{J}=0)}$$

$$\Rightarrow \quad H_{tang}(1)=H_{tang}(2)$$ { componentes tangenciales de $\overline{H}$ }

Tomaremos ahora el caso de una esfera uniformemente magnetizada (en ausencia de campos externos)



$$\boxed{\vec{M} = M_0 \, \hat{e}_z} \; \Big\} \text{ Magnetización permanente}$$

$$\triangleright \; \boxed{\begin{array}{l} \overline{\nabla} \cdot \overline{B} = 0 \\ \overline{\nabla} \times \overline{B} = 0 \end{array} \Bigg\} \text{ Condiciones en el exterior}} \qquad r > r_0$$

En este caso, el campo en el exterior se puede expresar como gradiente de una función escalar

$$\triangleright \left\{ \begin{array}{l} \vec{B}_{exterior} = -\overline{\nabla} \phi_M \\ \nabla^2 \Phi_M = 0 \end{array} \right.$$

Como $\overline{B} \to 0$ para $r \to \infty$ y estamos en prosencia de simetría axial escribimos

exterior

$$\boxed{\phi_M(r, \theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell \frac{P_\ell(\cos\theta)}{r^{\ell+1}}}$$

en el interior

interior

$$\boxed{\begin{array}{l} \overline{B}_{int} = B_0 \, \hat{e}_z \\ \overline{H}_{int} = (B_0 - 4\pi M_0) \, \hat{e}_z \end{array}} \qquad r < r_0$$

91

Aplicando las condiciones de contorno

interior   exterior

componentes normales de B $(r=r_0)$ $\left(\frac{d}{dr}\right)$

$$\left(B_0 \cos\theta\right) = \left(\sum_l \frac{(l+1)\, a_l\, P_l(\cos\theta)}{r_0^{\,l+2}}\right)$$

componentes tangenciales $\left(\frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}\right)$

$$-\left(B_0 - 4\pi M_0\right)\sin\theta = -\left(\sum_l \left(\frac{a_l}{r_0^{\,l+2}}\right)\frac{dP_l(\cos\theta)}{d\theta}\right)$$

en esta última igualdad sólo contribuye el término en $l=1$ $\quad (P_l(\cos\theta) = \cos\theta) \Rightarrow$

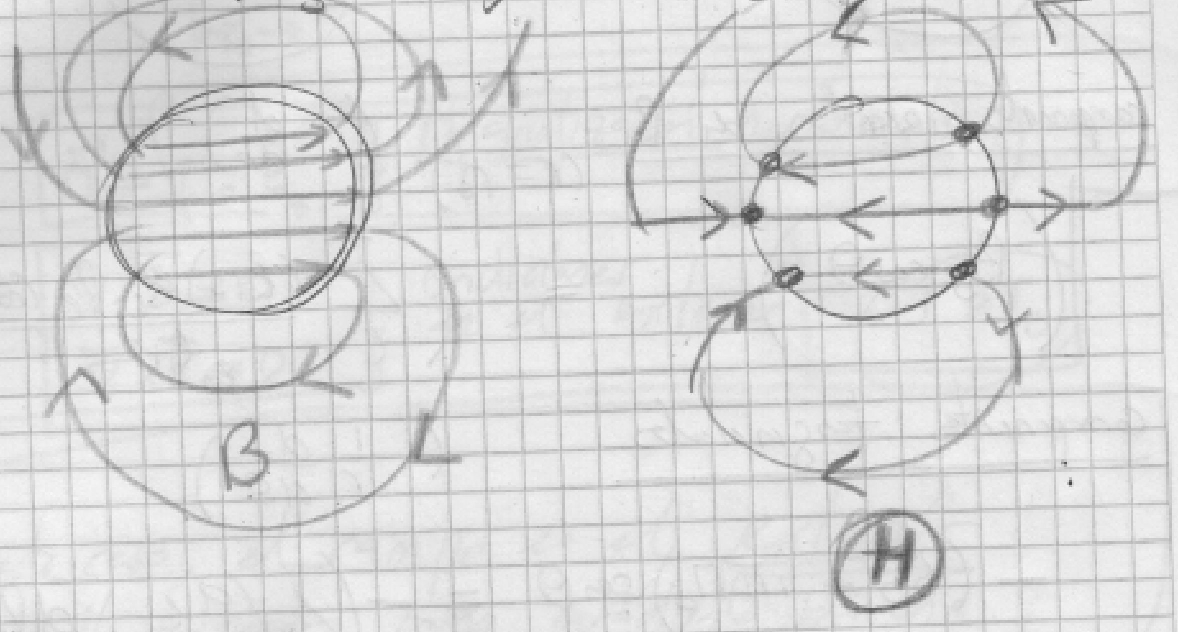
$$\begin{cases} B_0 = \dfrac{2a_1}{r_0^3} \Rightarrow \\[2ex] -\left(B_0 - 4\pi M_0\right) = \dfrac{a_1}{r_0^3} \Rightarrow 4\pi M_0 = \dfrac{3a_1}{r_0^3} \end{cases}$$

o' $\boxed{a_1 = \frac{4\pi}{3} M_0\, r_0^3}$

de donde resulta $\boxed{B_0 = \frac{8\pi}{3} M_0}$

En definitiva, en el interior de la esfera

$$\begin{cases} \vec{B}_{int} = \dfrac{8\pi}{3}\,\vec{M} \quad (\text{según } \hat{z}) \rightarrow \\ \vec{H}_{int} = \left(\dfrac{8\pi}{3} - 4\pi\right)\vec{M} = -\dfrac{4\pi}{3}\,\vec{M} \rightarrow \end{cases}$$



Esfera magnetizada en un campo externo

Suponemos $\bar{B}_0 = \bar{H}_0$ en todo el espacio

de manera que
$$\boxed{\begin{aligned} \vec{B}_{int} &= \vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\,\vec{M} \\ \vec{H}_{int} &= \vec{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\,\vec{M} \end{aligned}}$$

Si la esfera no esta uniformemente magnetizada

$$\Rightarrow \boxed{\bar{B}_{int} = \mu\,\vec{H}_{int}}$$

<u>Resultado</u>

$$\vec{B}_0 + \frac{8\pi}{3}\vec{M} = \mu\left(\bar{B}_0 - \frac{4\pi}{3}\vec{M}\right)$$

de donde $\bar{B}_0(1-\mu) = \left(-\frac{8\pi}{3} - \frac{4\pi}{3}\mu\right)\bar{M}$

$$= \frac{4\pi}{3}(-)\left[\mu+2\right]\bar{M}$$

ó $$\boxed{\vec{M} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)\left(\frac{\mu-1}{\mu+2}\right)\vec{B}_0}$$

Si en cambio eliminamos $\bar{M}$ $\Rightarrow$

$$\left(\bar{B}_{int} - \bar{B}_0\right)\frac{3}{8\pi} = \frac{3}{4\pi}\left(B_0 - \bar{H}_{int}\right)$$

de donde resulta

$$\bar{B}_{int} - \bar{B}_0 = 2\bar{B}_0 - 2\bar{H}_{int}$$

ó $$\boxed{3\bar{B}_0 = \bar{B}_{int} + 2H_{int}}$$

(esta expresión es la que debemos utilizar, ya que <u>no</u> presume linealidad entre $\boxed{\bar{B}_{int} \text{ y } \bar{H}_{int}}$

(ejemplo $\Rightarrow$ ciclo de histéresis)