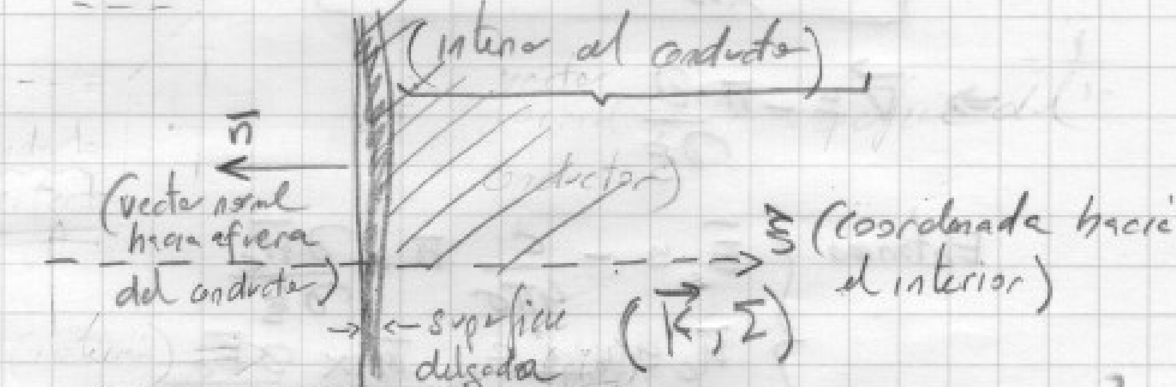
(155) Guías de Ondas y Cavidades Resonantes

Estudiaremos el comportamiento de los campos en medios conductores y más adelante en esta clase nos dedicaremos a estudiar procedimientos para direccionar ondas electromagnéticas




En un $\boxed{\text{conductor perfecto}}$ los campos en el interior son nulos. Si $\overline{E}$ y $\overline{B}$ son los campos en el exterior y $\overline{E}_c$, $\overline{B}_c$ en el conductor tendremos

$\overline{n} \cdot \overline{D} = 4\pi \Sigma$ (densidad superficial de carga)

$\overline{n} \times \overline{H} = \frac{4\pi}{c} \overrightarrow{K}$ (densidad superficial de corriente)

$\overline{n} \cdot (\overline{B} - \overline{B}_c) = 0$ (componentes normales de $\overline{B}$)

$\overline{n} \times (\overline{E} - \overline{E}_c) = 0$ (componentes tangenciales de $\overline{E}$)

$$\begin{cases} (\overline{E}, \overline{B}, \overline{H}, \overline{D}) & \text{exterior} \\ (\overline{E}_c, \overline{B}_c, \overline{H}_c) & \text{en la capa superficial} \end{cases}$$

156

$$\overline{\nabla}\times\overline{H} \simeq \frac{4\pi\sigma}{c}\,\overline{E}$$ (despreciando $\frac{\partial \overline{E}}{\partial t}$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{E}_c \simeq \frac{c}{4\pi\sigma}\left(\overline{\nabla}\times\overline{H}_c\right)}$$

$$\Rightarrow +i\omega\frac{\mu}{c}\overline{H}_c = \overline{\nabla}\times\overline{E}_c \quad \text{o'}$$

$$\boxed{\overline{H}_c = \frac{c}{\mu\omega}(-i)\,\overline{\nabla}\times\overline{E}_c}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\nabla} \simeq -\overline{n}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

Entonces
$$\begin{cases} \overline{E}_c \simeq -\dfrac{c}{4\pi\sigma}\,\overline{n}\times\dfrac{\partial\overline{H}_c}{\partial\xi} \\[2mm] \overline{H}_c \simeq \dfrac{ic}{\mu\omega}\,\overline{m}\times\dfrac{\partial\overline{E}_c}{\partial\xi} \end{cases}$$

Si combinamos ambas ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial\overline{E}_c}{\partial\xi} \simeq -\frac{c}{4\pi\sigma}\,\overline{n}\times\frac{\partial^2\overline{H}_c}{\partial\xi^2}$$ (derivamos la primera ecuación)

$$\simeq \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\overline{n}\times\overline{H}_c\right)\cdot\left(-\frac{c}{4\pi\sigma}\right)$$

$$\overline{n}\times\overline{H}_c \simeq \frac{ic}{\mu\omega}\left(\overline{n}\times\overline{n}\times\frac{\partial\overline{E}_c}{\partial\xi}\right)$$ (tomamos el producto $\overline{n}\times$ en la segunda)

$$\simeq -\frac{ic}{\mu\omega}\frac{\partial\overline{E}_c}{\partial\xi}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\overline{n}\times\overline{H}_c\right)\left(-\frac{c}{4\pi\sigma}\right) = \left(-\frac{\mu\omega}{ic}\right)\left(\overline{n}\times\overline{H}_c\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\left(\overline{n}\times\overline{H}_c\right) = \left(\frac{4\pi\sigma\mu\omega}{c^2}\right)(-i)\left(\overline{n}\times\overline{H}_c\right)$$

157 $$= \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(\bar{n}\times\bar{H}_c) + \frac{2i}{\delta^2}(\bar{n}\times\bar{H}_c) = 0$$

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}} \Rightarrow 2\pi\mu\omega\sigma = \frac{c^2}{\delta^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4\pi\mu\omega\sigma}{c^2}\right) = \left(\frac{2}{\delta^2}\right)$$ (espesor de penetración)

Combinando esta ecuación con la condición $\bar{n}\cdot\bar{H}_c \cong 0$ resulta

$$\bar{H}_c = \bar{H}_{//}\, e^{-(\xi/\delta)}\, e^{i(\xi/\delta)}$$
(soluciones)

($\vec{H}_{//}$ componente del campo magnético tangencial a la superficie).

exponente $\Rightarrow (1-i)\,\xi/\delta \qquad e^{-(1-i)\xi/\delta}$

[derivada segunda] $\rightarrow ((-)(1-i))^2/\delta^2$

$$= (1+(-i)^2+(-2i))/\delta^2 = -\frac{2i}{\delta^2}$$

De la misma manera, el campo eléctrico en el interior resulta

$$\bar{E}_c = \frac{c}{4\pi\sigma}(-)(-)(1-i)\frac{1}{\delta}\,\bar{n}\times\bar{H}_c$$

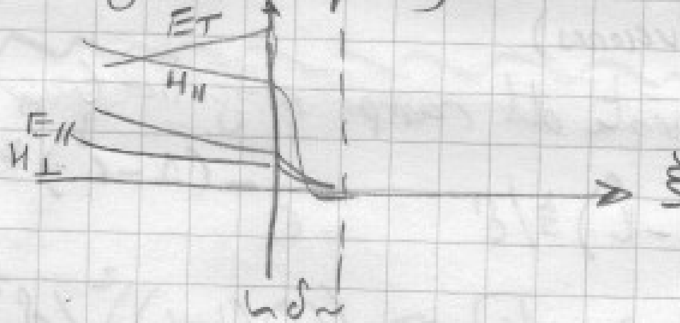
$$\bar{E}_c = \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}{c}(1-i)\,\bar{n}\times\bar{H}_{//}\cdot e^{-(\xi/\delta)}e^{i(\xi/\delta)}$$

ó en definitiva

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{H}_c \doteq H_{\parallel}\, e^{-(1-i)\xi/\delta} \\ \overline{E}_c \simeq \sqrt{\dfrac{\mu\omega}{8\pi\sigma}}\,(1-i)(\overline{n}\times\overline{H}_{\parallel})\, e^{-(1-i)\xi/\delta} \end{array}\right.$$

Entonces, hacia el interior, en la región superficial del conductor los campos decrecen exponencialmente.

En los conductores, entonces, los campos son paralelos al conductor y decaen a cero dentro de $\xi \simeq \delta$ (profundidad de la región de piel).




La densidad de corriente en la superficie resulta

$$\left\{ \overline{J} = \sigma\,\overline{E}_c = \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{8\pi}}\,(1-i)(\overline{n}\times\overline{H}_{\parallel})\, e^{-(1-i)\xi/\delta} \right.$$

159 La media temporal de la potencia disipada por unidad de volumen a causa de perdidas ohmicas

es $$\frac{1}{2}\vec{J}\cdot\vec{E}^{*} \equiv \left(\frac{1}{2\sigma}\right)|\vec{J}|^2$$

$$= \frac{\mu\omega}{8\pi}|\vec{H}_{\parallel}|^2 \int_0^\infty d\xi\, e^{-2\xi/\delta}$$

$$= \boxed{\frac{\mu\omega}{8\pi}\,\frac{\delta}{2}\cdot|\vec{H}_{\parallel}|^2}$$

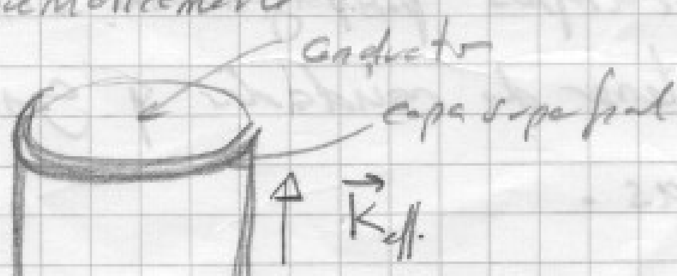
La densidad de corriente superficial resulta entonces $\vec{K}_{eff} = \int_0^\infty \vec{J}\, d\xi =$

$$= \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{8\pi}}\,\frac{(1-\cancel{i})\,\delta}{(\cancel{1}-i)}\left(\bar{n}\times\bar{H}_{\parallel}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{\mu\omega\sigma}{8\pi}}\cdot\frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\omega\sigma}}\left(\bar{n}\times\bar{H}_{\parallel}\right)$$

$$= \frac{c}{4\pi}\left(\bar{n}\times\bar{H}_{\parallel}\right)$$

Esquematicamente



y en función de estos resultados, las pérdidas óhmicas resultan

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{J}\cdot\bar{E}^*}{(\text{area})} = \frac{\mu\omega\delta}{16\pi}\left|\vec{H}_{\parallel}\right|^2$$

$$= \frac{\mu\omega\delta}{16\pi}\cdot\frac{16\pi^2}{c^2}\left|\vec{K}_{eff}\right|^2$$

$$= \frac{\mu\omega\pi\delta}{c^2} = \frac{\mu\omega\pi\delta^2}{c^2}\,\frac{1}{\delta}\left|\vec{K}_{eff}\right|^2$$

$$= \mu\omega\frac{\pi}{c^2}\cdot\frac{c^2}{2\pi\mu\omega\sigma}\,\frac{1}{\delta}\left|\vec{K}_{eff}\right|^2$$

$$= \left(\frac{1}{2\delta\sigma}\right)\left|\vec{K}_{eff}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\delta\sigma}\right)}_{\text{resistencia superficial del conductor}}\left|\vec{K}_{eff}\right|^2$$

---

## $\boxed{\text{Cavidades cilíndricas}}$

Aquí resolvemos las ecuaciones para campos propagándose en el interior de cavidades y guías de ondas.


Supongamos que la dependencia temporal es armónica $\left(e^{-i\omega t}\right) \Rightarrow$

$\bar{\nabla}\times\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ ; $\bar{\nabla}\times\bar{E} = i\frac{\omega}{c}\bar{B}$

$\bar{\nabla}\times\bar{B} = -i\mu\epsilon\frac{\omega}{c}\bar{E}$

$\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$ ; $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 0$ ; $\bar{J} = 0$

$$\Rightarrow -\nabla^2\bar{E} = i\frac{\omega}{c}\left(-i\mu\epsilon\frac{\omega}{c}\right)\bar{E}$$

$$\text{ó} \quad \boxed{\left(\nabla^2 + \mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2}\right)\begin{bmatrix}\bar{E}\\ \bar{B}\end{bmatrix} = 0}$$

teniendo en cuenta la simetría tenemos

$$\bar{E} \Rightarrow \bar{E}(\bar{x},\bar{y})\, e^{\pm ikz - i\omega t}$$

$$\bar{B} \Rightarrow \bar{B}(\bar{x},\bar{y})\, e^{\pm ikz - i\omega t}$$

En consecuencia $\Rightarrow$

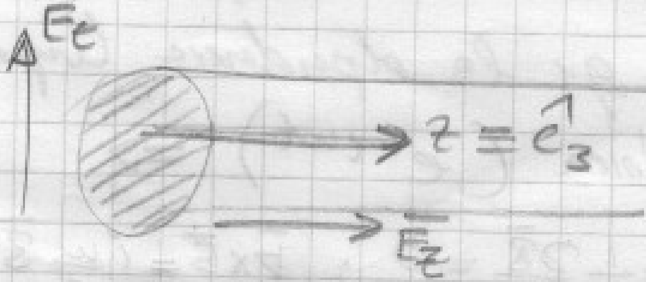
$$\left[\nabla^2_{(x,y)} + \left(\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\begin{bmatrix}\bar{E}\\ \bar{B}\end{bmatrix} = 0$$

Separando componentes tenemos

$$\bar{E} = \bar{E}_z + \bar{E}_t$$

donde

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{E}_z &= (\hat{e}_3 \cdot \bar{E})\,\hat{e}_3 \\ \bar{E}_t &= (\hat{e}_3 \times \bar{E}) \times \hat{e}_3\end{aligned}}$$




Si ahora hacemos lo mismo con las ecuaciones para $\bar{E}$ y $\bar{B}$

Las soluciones son de la forma

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B}_t &= \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left[\bar{\nabla}_t\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\hat{e}_3 \times \bar{\nabla}_t E_z\right] \\ \bar{E}_t &= \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left[\bar{\nabla}_t\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) - i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\hat{e}_3 \times \bar{\nabla}_t B_z\right]\end{aligned}}$$

A continuación verificaremos estas soluciones, a partir de las condiciones iniciales,

(163)

a partir de la ecuación para $\overline{B}_t$ tenemos

$$B_x = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left[\partial_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\left(-\partial_y E_z\right)\right]$$

$$B_y = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left[\partial_y\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\left(\partial_x E_z\right)\right]$$

tomando $\overline{\nabla} \Rightarrow$

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot$$

$$\left\{\partial^2_{xx}\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + \partial^2_{yy}\left(\frac{\partial B_z}{\partial z}\right) + i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\underbrace{\left(-\partial^2_{xy} + \partial^2_{yx}\right)E_z}_{=0}\right\}$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla}\cdot\overline{B} - \partial_z B_z = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \cdot \left(\nabla^2_t B_z\right)$$

$$\Rightarrow \overline{\nabla}\cdot\overline{B} = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2_t + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]B_z$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = \left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2_t + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\cdot B_z\right\} \times \left(\frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\right) = 0}$$

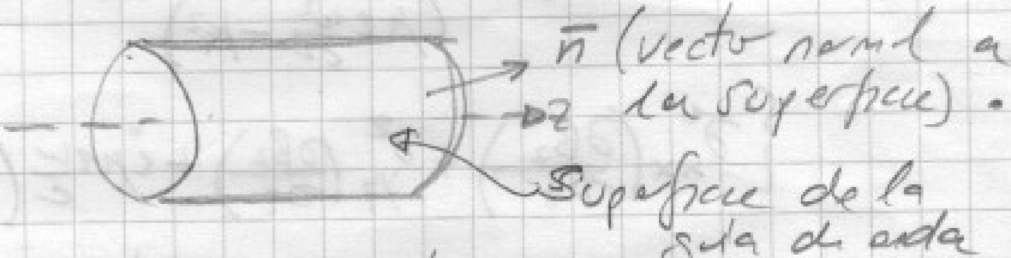
(es decir verificamos la condición $\overline{\nabla}\cdot\overline{B} = 0$

siendo $\left[\nabla^2_t + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right]\overline{B} = 0$ ($\forall$ componentes)

Entonces, ambas soluciones para $\bar{E}_t, \bar{B}_t$ dependen de $\boxed{E_z, B_z \text{ y sus derivadas}}$.

Si suponemos que la guía de ondas está construida con un conductor perfecto, tenemos

$$\bar{n}\cdot\bar{B} = 0$$
$$\bar{n}\times\bar{E} = 0$$




Para que $\bar{E}_t$ se anule, basta pedir

$$(E_z)\Big|_{superficie} = 0$$

idénticamente $\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0$

---

$\boxed{\text{Modos}}$

Casos especiales → Magnético transversal

→ Eléctrico transversal

→ Electro-Magnético Transversal

---

165

Modo magnetico Transversal $\Rightarrow$ $B_z = 0$ (TM)

en todos los puntos y la condicion de contorno esta dada por $E_z\big|_S = 0$

Modo transversal eléctrico $\Rightarrow$ $E_z = 0$ (TE)

condicion de contorno $\dfrac{\partial B_z}{\partial n}\Big|_S = 0$

Modo transversal electromagnetico (TEM)

$$\nabla_t^2 \begin{Bmatrix} \bar{E} \\ \bar{B} \end{Bmatrix}_{TEM} = 0$$

$$\Rightarrow \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0 \Rightarrow k = \sqrt{\mu\varepsilon}\,\frac{\omega}{c}$$

---

A partir de las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{B}_t = \dfrac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot \left[ i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\, \hat{e}_3 \times \bar{\nabla}_t E_z \right] & (TM) \\ \bar{E}_t = \dfrac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot \left[ -i\frac{\omega}{c}\, \hat{e}_3 \times \bar{\nabla}_t B_z \right] & (TE) \end{cases}$$

de donde, usando las ecuaciones para las ondas transversales, tenemos.

$$\bar{B}_t = \frac{\mu\varepsilon\omega}{ck}\left(\hat{e}_z \times \bar{E}_t\right) \qquad (TM)$$

$$\bar{E}_t = -\frac{\omega}{ck}\,\hat{e}_z \times \bar{B}_t \qquad (TE)$$

Verificamos: $\frac{1}{\alpha}\bar{\nabla}_t\left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = \bar{E}_t$

$$\bar{B}_t = \frac{\mu\varepsilon\omega}{ck}\,\hat{e}_z \times \left[\frac{1}{\alpha}\left(ik\bar{\nabla}_t E_z\right)\right]$$

$$= \left(i\frac{\mu\varepsilon\omega}{c\alpha}\,\hat{e}_z \times \bar{\nabla}_t E_z\right) ✓$$

donde $\alpha = \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)$

Análogamente (Modo TE)

$$\bar{E}_t = -\frac{\omega}{ck}\,\hat{e}_3 \times \underbrace{\left(\frac{ik}{\alpha}\,\bar{\nabla}_t B_z\right)}_{\bar{B}_t}$$

$$\bar{E}_t = -\frac{i\omega}{c\alpha}\,\hat{e}_3 \times \bar{\nabla}_t B_z ✓$$

Podemos tomar las soluciones para $\bar{E}_t$ y $\bar{B}_t$ a partir de $B_z$ y $E_z$ $\Rightarrow$

(167)

Asi para ondas (TM) escribimos $\Rightarrow$

$$\boxed{\bar{E}_t = i\,\frac{k}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)}\,\bar{\nabla}_t\,\Phi}$$

$\phi \equiv$ funcion escalar $\Rightarrow (E_z)$

por consiguiente

$$\left(\nabla_t^2 + \overbrace{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)}^{\alpha_\lambda^2}\right)E_z = 0$$

$$E_z\Big|_S = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{\partial E_z}{\partial n}\Big|_S = 0$$

$\Rightarrow$ modos propios $\Rightarrow$

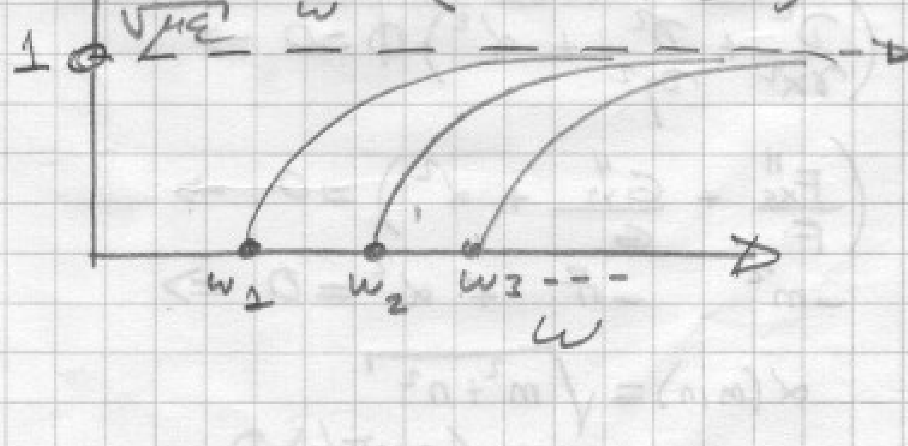
$$k_\lambda^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \alpha_\lambda^2$$

$$k_\lambda = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\left(\omega^2 - \frac{c^2}{\mu\varepsilon}\alpha_\lambda^2\right)^{1/2}$$

$$k_\lambda = \sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{c}\cdot\left(\omega^2-\omega_\lambda^2\right)^{1/2}$$

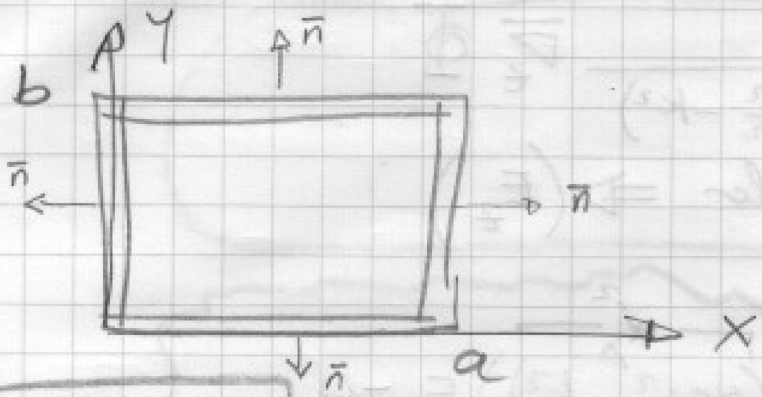
$$\omega_\lambda = \frac{c\,\alpha_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \text{frecuencia de corte}$$

$$\Rightarrow \frac{k_\lambda c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,\frac{1}{\omega} = \left(1-(\omega_\lambda/\omega)^2\right)^{1/2}$$




$k_\lambda$ (Real)

168 Modos en una guía rectangular (Ejemplo)




Modo TE

Ecuación $\Rightarrow$

$$\bar{E}_t = -\frac{\omega}{ck}\,\hat{e}_z \times \bar{B}_t$$

$$\bar{B}_t = \frac{ik}{\alpha^2}\,\bar{\nabla}_t\,\Phi$$

$\Phi = B_z$ condiciones $\frac{\partial B_z}{\partial n} = 0$ $\begin{cases} x = 0, a \\ y = 0, b \end{cases}$

$\phi$ = separable $\Rightarrow$

$\phi \Rightarrow F(x)\,G(y)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \alpha^2\right)\phi = 0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{F''_{xx}}{F} + \frac{G''_{yy}}{G} + \alpha^2\right) = 0 \rightarrow$$

$$-m^2 \quad -n^2 \quad + \alpha^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha(m,n) = \sqrt{m^2 + n^2}$$

$$F(x) \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(m x \pi / a) \\ \cos(m x \pi / a) \end{cases} \quad G(y) \rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(n \pi y / b) \\ \cos(n \pi y / b) \end{cases}$$

(169)

de donde, por la anulación de la derivada tenemos $\Rightarrow$ $\boxed{\phi = B_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}$

(ya que la derivadas se deben anular en $x=0$ y $a$ e $y=0$ y $b$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}} = 0$ si $(x=0,\ x=a)$

para $\underline{m \text{ entero}}$

Entonces $\Rightarrow$ $\boxed{\alpha(m,n) = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}}$

Para estos valores, las frecuencias de corte resultan $\Rightarrow$

$$\boxed{\omega_{mn} = \frac{c\,\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^{1/2}}$$

Por lo tanto las soluciones serán $\Rightarrow$

$e_z \times e_1$ $\phi(m=1, n=0) \equiv B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$ entonces

312

$$\begin{cases} B_x = \frac{ik}{\gamma_{10}^2}\cdot\left(-\frac{\pi}{a}\right) B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t} \\ E_y = -\frac{\omega}{ck}\cdot i\frac{k}{\gamma_{10}^2}\left(-\frac{\pi}{a}\right) B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t} \end{cases}$$

$$\gamma_{10}^2 = \left(\pi^2/a^2\right) \Rightarrow \frac{-ik\pi}{a\gamma_{10}^2} = -(ika/\pi)$$

$$\left(\frac{\pi}{a}\frac{i\omega}{c\gamma_{10}^2}\right) = (i\omega a/\pi c)$$

(170)

Asi que para el modo TE mas bajo tenemos

$$B_z = B_0 \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}$$

$$E_y = i\left(\frac{\omega a}{\pi c}\right) B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}$$

$$B_x = -i\left(\frac{ka}{\pi}\right) B_0 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{ikz - i\omega t}$$

Para el modo TM simplemente reemplazamos

$B_z$ por $E_z = E_0 \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$

ya que $E_z \Big|_{\substack{x = a, 0 \text{ ó} \\ y = b, 0}} = 0$

Flujo energético y atenuación en guías de ondas



El flujo de energía, en términos del vector de Poynting

$$\vec{S} = \left(\frac{c}{4\pi}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right)$$

▷ Modos TM

$$\begin{cases} \vec{E}_t = \dfrac{ik}{\left(\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \vec{\nabla}_t \Phi \\ \left[\nabla_t^2 + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)\right] \Phi = 0 \\ \left[\phi\right]_S = 0 \\ \vec{B}_t = \mu \left(\dfrac{\varepsilon\omega}{ck}\right) \hat{e}_3 \times \vec{E}_t \end{cases}$$

($\hat{e}_3$ => dirección de propagación)

$$\vec{S}_{(TM)} = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{ik}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left(\vec{\nabla}_t \phi\right) \times \left(\frac{\varepsilon\omega}{ck}\right)$$

$$\left(\hat{e}_3 \times \left(\frac{-ik}{\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2}\right)\left(\vec{\nabla}_t \phi\right)^*\right)$$

$$= \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon\omega}{ck} \cdot \frac{k^2}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)^2} \cdot \underbrace{\left(\vec{\nabla}_t \phi \times \hat{e}_3 \times \left(\vec{\nabla}_t \phi\right)^*\right)}$$

$$= \left(\frac{\varepsilon\omega k}{8\pi}\right) \cdot \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)^2} \cdot \hat{e}_3 \left|\vec{\nabla}_t \phi\right|^2$$

(si $\phi$ => real)

$$\Rightarrow P = \int_A \vec{S}\cdot\hat{e}_3\, da$$

$$= \frac{\varepsilon\omega k}{8\pi\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^2}\cdot\int_A |\nabla_t\phi|^2 da$$

aplicando las identidad de Green en 2 dimensiones

$$\Rightarrow \int_A |\nabla_t \phi|^2 da = \int_A \vec{\nabla}_t\left(\phi^*\vec{\nabla}_t\phi\right) - \phi^*\nabla^2\phi$$

$$= \underbrace{\oint_C \phi^* \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dl}_{=0} - \int_A \phi^*\nabla^2\phi\, da$$

$\boxed{\text{(Condición de contorno)}}$

$$\underbrace{\nabla^2\phi = -\gamma^2\phi}$$

$$\left(-\gamma^2\int_A |\phi|^2 da\right)$$

en consecuencia, la potencia media se escribe

$$P = \frac{\varepsilon\omega k}{8\pi\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)^2}\cdot(+)\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)\cdot\int_A |\phi|^2 da$$

$$= \frac{\varepsilon\omega k}{8\pi}\,\frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}-k^2\right)}\int_A |\phi|^2 da$$

Esta expresión se puede reducir a la forma siguiente $\Rightarrow \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \gamma^2$

$$\Rightarrow k^2 = \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \gamma^2$$

usando el valor de $k$ permitido en la guía de onda tenemos $k_\lambda = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\omega\left(1 - \frac{\gamma_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$

donde $\gamma_\lambda = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\omega_\lambda \Rightarrow$

$$k_\lambda = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\cdot\omega\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

Entonces $\Rightarrow$

$$P = \frac{\varepsilon\omega}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c}\cdot\omega\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\frac{1}{\gamma_\lambda^2}$$

o'

$$P = \frac{\varepsilon}{4\pi}\cdot\frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{2c}\cdot\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\cdot\frac{\omega_c^2}{\gamma_\lambda^2}\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

$$P = \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\cdot\sqrt{\mu\varepsilon}\cdot\frac{1}{c}\cdot\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\cdot\frac{c^2}{\mu\varepsilon} \Rightarrow \left(\frac{\varepsilon\sqrt{\mu\varepsilon}}{8\pi c}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}\cdot\left(\frac{c^2}{\mu\varepsilon}\right)$$

de donde

$$\boxed{P = \varepsilon\cdot\left[\frac{c}{4\pi}\right]\cdot\frac{1}{2\sqrt{\mu\varepsilon}}\cdot\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2\left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}$$

(Potencia transmitida en el modo TM).

124

La expresión para el modo TE es análoga y se obtiene reemplazando el factor $\varepsilon$ por $1/\mu$.

Análogamente, para el modo TM tendremos $\Rightarrow$

$\boxed{\text{densidad de energía}}$ Análogamente $\Rightarrow$

$$\boxed{U = \left(\frac{1}{4\pi}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2 \cdot \varepsilon \int_A |\phi|^2 da}$$

Entonces

$$\left(\frac{P}{U}\right) = \frac{\cancel{\varepsilon} \left(\frac{c}{\cancel{4\pi}}\right) \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{\mu\varepsilon}} \cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2} \left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}}{\cancel{\left(\frac{1}{4\pi}\right)} \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)} \cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_\lambda}\right)^2} \cdot \cancel{\varepsilon}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \left(1 - \frac{\omega_\lambda^2}{\omega^2}\right)^{1/2}$$

$$\boxed{\frac{P}{U} = v_{grupo}}$$

Este resultado relaciona el flujo de potencia con la energía (velocidad de grupo en la guía de onda).

Esta ($v_g$) es la velocidad que se anule en la frecuencia de corte ($\omega_\lambda$). Es siempre menor que c (velocidad de la luz en vacío).

Los efectos disipativos en la guía de ondas (pérdidas de energía en las paredes, ⇒ pérdidas óhmicas) se calculan introduciendo el vector de onda complejo

$$k_\lambda \Rightarrow k_\lambda^c + i\beta_\lambda$$

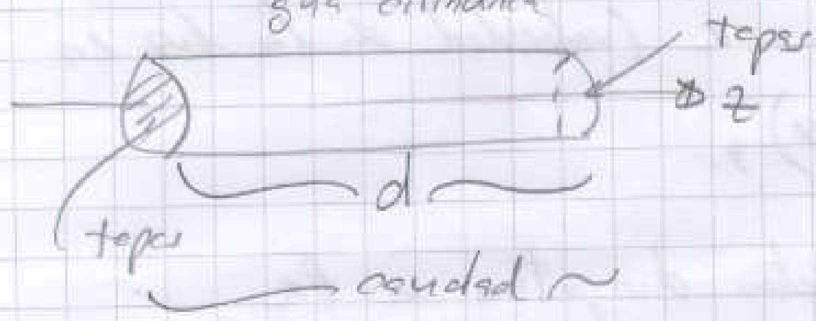
$k_\lambda^c$ = número de ondas para conductores perfectos.

— α —

126

# Cavidades resonantes

Consideremos una geometría como la siguiente




Así, tendremos ondas estacionarias de la forma

$$\boxed{\phi(z) = A \sin kz + B \cos kz}$$

$$\boxed{k = n\frac{\pi}{d} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots}$$

Los campos transversales resultan, en función del reemplazo $e^{ikz} \to \phi(z)$

**Modos TM**

$$\bar{E}_t \equiv 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ y } d$$

$$\bar{E}_t = \frac{1}{\left(\mu\epsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot \vec{\nabla}_t \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)$$

con $\qquad E_z = \psi(x,y)\cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right)$

Entonces $\Rightarrow$ para el campo magnético transversal tenemos $\overline{B}_t = \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\,\hat{\varepsilon}_3 \times \vec{\nabla}_t E_z$

$$= i\frac{\mu\varepsilon\omega/c}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)}\left(\hat{\varepsilon}_3 \times \overline{\nabla}_t \psi(x,y)\right) \cdot \cos\frac{n\pi z}{d}$$

En definitiva $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{E}_t &= \frac{1}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot (-)\left(\frac{n\pi}{d}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \cdot \overline{\nabla}_t \psi(x,y) \\ \overline{B}_t &= i\frac{\mu\varepsilon\omega/c}{\left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)} \cdot \cos\left(\frac{n\pi z}{d}\right) \cdot \hat{\varepsilon}_3 \times \overline{\nabla}_t \psi(x,y) \end{aligned}}$$

Estos campos satisfacen las condiciones de borde, de manera que aplicando los valores de $k_{(n)} = n\pi/a$ resulta

$$\boxed{\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 \Rightarrow \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

En consecuencia, el denominador

128

toma la forma

$$\boxed{\gamma^2(n) = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2}$$

y las frecuencias de corte se escriben

$$\boxed{\omega_\lambda = \frac{[c]}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \left(\gamma^2(n) + \left(\frac{n\pi}{d}\right)^2\right)^{1/2}}$$

Para la condicion de borde $E_z = 0 \,|$

tenemos en ambos casos

$\psi(x,y) = 0$ , así

en coordenadas cilindricas

$$\psi(\rho,\phi) = J_m(\gamma_{nm}\rho) e^{\pm im\phi}$$

$$\gamma_{nm} = \frac{x_{nm}}{R}$$

$$J_n(x_{nm}) = 0$$

$(J_n(x) =$ Funcion de Bessel$)$

Entonces $\Rightarrow$

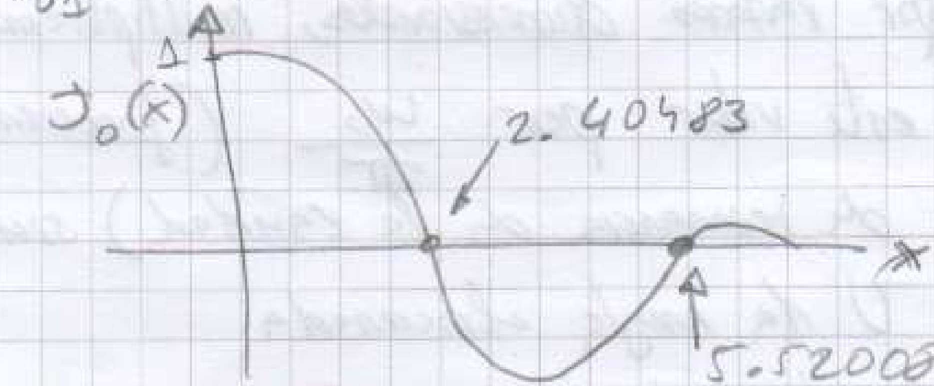
$$\boxed{\omega_{nm}(\ell) = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{x_{nm}^2}{R^2} + \frac{\ell^2\pi^2}{d^2}}}$$

(179) Tomando el primer modo

$$J_0(x_{01}) = 0$$

(primer cero de la función de Bessel, tenemos)

$$x_{01} = 2.405$$




Así

$$E_z \cong J_0\left(\frac{2.405\,\rho}{R}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\Rightarrow \quad B_\phi \cong -i\sqrt{\mu\varepsilon}\; J_1\left(\frac{2.405\,\rho}{R}\right) e^{-i\omega t}$$

$$\boxed{\text{Pérdidas de potencia en una cavidad}}$$

Se define el factor Q como la relación entre la energía almacenada y la energía perdida.

(18)

Por lo tanto

$$\frac{dU}{dt} \simeq (-) \frac{U}{Q}$$

por razones dimensionales, multiplicamos este valor por $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (frecuencia de resonancia de la cavidad) siendo U la energía almacenada

Integrando

$$\boxed{U(t) = U_0 e^{-\omega_0 t/2Q}}$$

Esto implica dada la definición de la densidad de energía, que los campos se amortiguan ya que los factores de dependencia temporal toman la forma

$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-(\omega_0 t/4\pi Q)} e^{-i\omega t}}$$

(181)

de donde integrando en frecuencias
resulta

$$E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

ó (invirtiendo la transformación)

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} dt\, E_0 e^{-\omega_0 t / 4\pi Q} \cdot e^{i(\omega-\omega_0)t}$$

por lo tanto

$$E(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} E_0 \cdot \int_{0}^{\infty} dt\, e^{-[(\omega_0 / 4\pi Q) + i(\omega_0-\omega)]t}$$

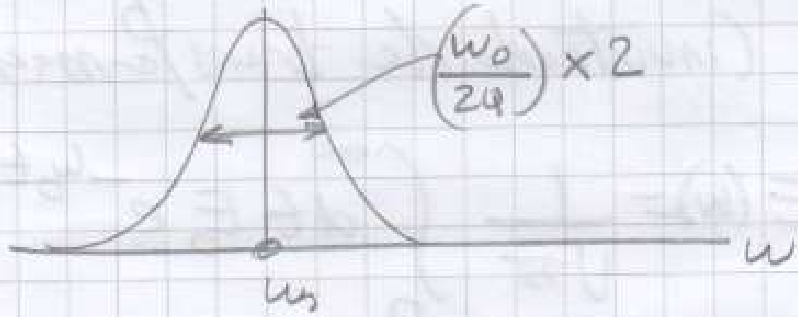
$$\alpha = \left(\frac{\omega_0}{4\pi Q}\right) + i\left(\omega_0 - \omega\right)$$

$$\Rightarrow [E(\omega)] = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{4\pi Q}\right) + i\left(\omega_0 - \omega\right)} \right]$$

$$\boxed{|E(\omega)|^2 = \frac{E_0^2}{(\omega - \omega_0)^2 + (\omega_0 / 4\pi Q)^2}}$$

182

Por lo tanto, alrededor de la frecuencia de resonancia ($w_0$) existe una region de ancho ($w_0/Q$)




---

**Guias de onda dielectricas**

Las ecuaciones son análogas a las ya estudiadas, excepto por los factores que determinan los números de onda propios, esto es

$$\left[\nabla_t^2 + \left(\mu_i \varepsilon_i \frac{w^2}{c^2} - k^2\right)\right]\left\{\begin{matrix}\bar{E}\\ \bar{B}\end{matrix}\right\} = 0$$

($\varepsilon_i \mu_i \Rightarrow$ constantes en el interior de la guia de ondas).