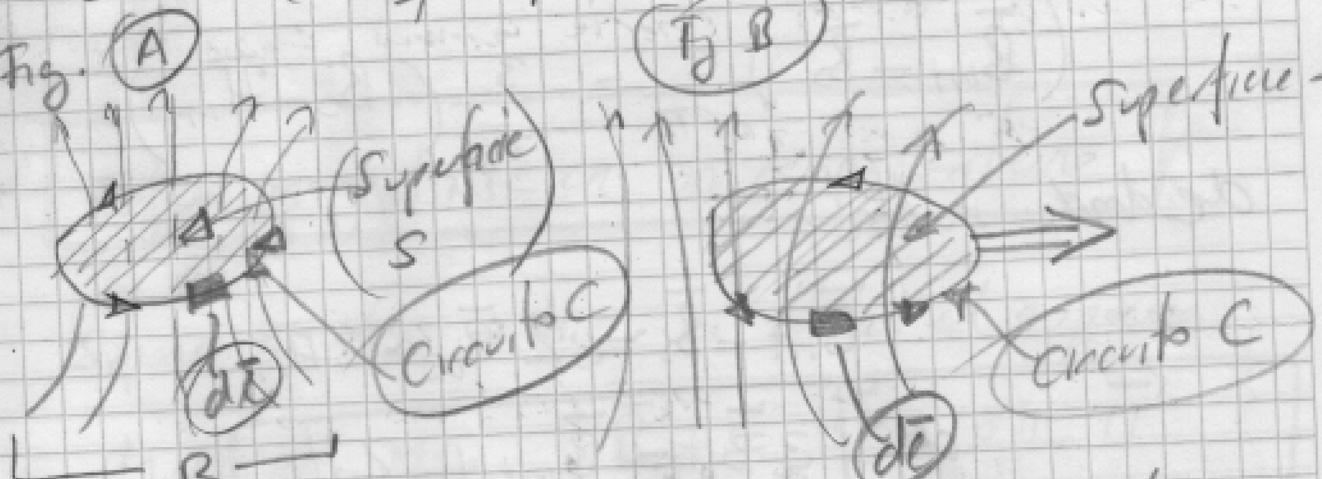
Campos que varían en el tiempo

Ley de inducción de Faraday

Supongamos un caso como el que se ilustra en la figura, donde mostramos las líneas de fuerza de un campo magnético y un circuito anillado. (Figura A). En la Figura B mostramos la variación del flujo magnético a través del circuito (el que pusimos en movimiento)



Lo que observamos, si medimos la corriente en el circuito, es que como resultado de la variación del flujo magnético a través del circuito circula una corriente.

El flujo de $\vec{B}$ a través del circuito se define

95

$$\phi = \int_S \bar{B} \cdot \bar{n} \, da \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Flujo de } \bar{B} \\ \text{a través de } S \end{array} \right\}$$

y la fuerza "electromotriz" a lo largo del circuito se escribe

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}' \cdot d\vec{l} \quad \{ \underline{\underline{\text{fem}}} \}$$

donde $\vec{E}'$ es el campo eléctrico en el elemento del circuito $\underline{\underline{dl}}$

La ley de Faraday conecte ambas expresiones

$$\mathcal{E} \approx - \frac{d\phi}{dt}$$

Ley de Lenz
(la variación del flujo magnético se opone a la fem)

Entonces $\Rightarrow$

$$\oint_C \bar{E}' \cdot d\bar{l} = -k \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, da$$

Ahora bien, podemos variar el flujo magnético variando $\vec{B}$ $\left(\frac{d\bar{B}}{dt} \right)$ ó el area expuesta al campo, (traslación del circuito con velocidad $\vec{v}$), así

$$\frac{d}{dt}\int_S \bar{B}\cdot\bar{n}\,da = \int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{n}\,da + \oint_c \left(\bar{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\bar{l}$$

La igualdad se basa en la definición de derivadas a lo largo de una línea de corriente,

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{v}\cdot\vec{\nabla}\right)$$

Entonces, reuniendo términos tenemos

$$\oint_c \left(\bar{E}'\cdot d\bar{l}\right) = -k\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{n}\,da - k\oint_c \left(\bar{B}\times\vec{v}\right)\cdot d\bar{l}$$

$$\Rightarrow \boxed{\oint_c \Big(\vec{E}' - \underbrace{k\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)}_{\text{traslación}}\Big)\cdot d\vec{l} = \underbrace{-k\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{n}\,da}_{\text{variación del campo}}}$$

Si en cambio suponemos que el circuito se mantiene fijo pero varía el campo magnético tenemos

$$\Rightarrow \oint_c \vec{E}\cdot d\vec{l} = -k\int_S \frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\cdot\bar{n}\,da$$

Notemos que hemos diferenciado $\overline{E}'$ (campo en el elemento de circuito) y $\vec{E}$ (campo medido en el laboratorio).

Entonces $\Rightarrow$ igualando ambas expresiones resulta

$$\overline{E}' - k\,\vec{v}\times\overline{B} = \overline{E} \quad \text{o}'$$

$$\boxed{\overline{E}' = \overline{E} + k\,(\vec{v}\times\overline{B})}$$

. En el sistema gaussiano de unidades, tenemos $k = 1/c$ (c = velocidad de la luz)

Significado de las expresiones anteriores

$\overline{E}'$ es el campo en el circuito, es decir, una carga q en el circuito está sometida a una fuerza $\overline{F}_q = q\,\overline{E}'$.

Visto desde el laboratorio, el movimiento de la carga se ve como una corriente $\vec{J} = q\,\vec{v}\;\delta(\bar{x}-\bar{x}_0)$.

Si suponemos al circuito en reposo ($\bar{v} = 0$)

$\Rightarrow \overline{E}' = \overline{E}$ y

$$\oint_c \overline{E}\,d\bar{l} = \int_s (\overline{\nabla}\times\overline{E})\cdot\bar{n}\,da$$

97

de donde $\Rightarrow$

$$\boxed{\int_S \left(\overline{\nabla}\times\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t}\right)\cdot\overline{n}\, da = 0}$$

Entonces, para cualquier superficie tenemos

$$\boxed{\overline{\nabla}\times\overline{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \overline{B}}{\partial t} = 0}$$

(esta es la diferencia básica con el caso estático donde $\overline{\nabla}\times\overline{E} = 0$)

Corriente de desplazamiento:

Si escribimos la ecuación de continuidad para $\overline{J}$ y ρ, considerando la dependencia temporal tendremos

$$\overline{\nabla}\cdot\overline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

pero si aplicamos esta definición de la ley de Ampere

$$\overline{\nabla}\times\overline{H} = \frac{4\pi}{c}\overrightarrow{J}$$

tendremos

(9a)

$$\underbrace{\vec\nabla\cdot(\vec\nabla\times\vec H)}_{=0} = \underbrace{\frac{4\pi}{c}\,\vec\nabla\cdot\vec J}_{??}$$

(ya que $\vec\nabla\vec J = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \neq 0$

Maxwell resolvió esta contradicción introduciendo un término a la corriente, de modo de satisfacer la ecuación de continuidad

$$\vec\nabla\cdot\vec J + \frac{\partial}{\partial t}\rho = \vec\nabla\cdot\left[\vec J + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right] = 0$$

$$\vec\nabla\cdot\vec D = 4\pi\rho$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\cdot\vec D) = 4\pi\frac{\partial\rho}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\vec\nabla\cdot\vec D)$$

$$= \vec\nabla\cdot\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec D}{\partial t}\right]$$

Entonces, corrigiendo la ley de Ampere obtenemos:

$$\boxed{\vec\nabla\times\vec H = \frac{4\pi}{c}\vec J + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec D}{\partial t}}$$

Podemos ahora reunir las ecuaciones en un único conjunto para los campos

(sistema de unidades gaussianas)

$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 4\pi\rho$	$\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$
$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$	$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$

Las fuentes ρ y $\vec{J}$ y los campos $(\bar{E}, \bar{D}, \bar{B}, \bar{H})$ están relacionados como vimos, por la conservación de cargas y linealidad en dieléctricos isotrópicos y en conductores.

$$\left\{\begin{array}{ll} \bar{J} = \sigma\bar{E} & \text{(conductores, ley de Ohm)} \\ \bar{B} = \mu\bar{H} & \text{(medios magnetizables)} \\ \bar{D} = \varepsilon\bar{E} & \text{(dieléctricos isotrópicos)} \end{array}\right.$$

$$\vec{\nabla}\cdot\bar{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \quad \text{(conservación de cargas).}$$

Ecuaciones para los potenciales escalares y vectoriales

DD

A partir de la ley de Faraday

$$\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0}$$

y utilizando $\boxed{\bar{\nabla}\times\bar{A} = \bar{B}}$, ya que $\bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0$

escribimos ambas ecuaciones homogéneas $\Rightarrow$

$$\bar{\nabla}\times\left(\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Esta ecuación implica la existencia de un potencial escalar (Φ) tal que

$$\boxed{\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi}$$ o'

$$\boxed{\bar{E} = -\bar{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}}$$

Así, podemos ahora re-escribir las ecuaciones inhomogéneas (con fuentes) y en vacío

$$\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) = 4\pi\rho$$

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{A}) = \bar{\nabla}\cdot(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}) - \nabla^2\vec{A} = \frac{4\pi}{c}\bar{J} +$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(-\bar{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}\right)\right.$$

de donde

$$\nabla^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\cdot\bar{A}) = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\bar{J} + \bar{\nabla}\left(\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

Ambas ecuaciones se pueden desacoplar si efectuamos las siguientes transformaciones

$$\boxed{\bar{\nabla}\cdot\bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0} \Rightarrow \text{Condición de Lorentz}$$

$$\vec{A} \rightarrow \bar{A} + \vec{\nabla}\eta \qquad \phi \rightarrow \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t}$$

lo que implica → $\boxed{\nabla^2\eta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0}$

Resultando

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -4\pi\rho$$

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

(Ecuaciones "para los" potenciales).

(10)

La elección $\vec{\nabla}\cdot\bar{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0$

(Condición de Lorentz) que como vimos se puede satisfacer eligiendo una función escalar $\eta(x,t)$ tal que $\nabla^2\eta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2} = 0$ desacopla las ecuaciones para los potenciales, pero no es la única posible. De hecho podemos elegir otra condición,

$$\vec{\nabla}\cdot\bar{A} = 0$$

llamada condición de Coulomb.

En este caso, separando la densidad de corriente en la suma

$$\vec{J} = \vec{J}_{\text{transv.}} + \vec{J}_{\text{long.}}$$

transversal paralela o longitudinal

resulta

$$\nabla^2\bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\vec{J} + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)$$

(104)

La misma condición para ϕ implica

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \qquad (\text{si } \vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0)$$

es decir que $\phi(\bar{x},t)$ es solución de la ecuación de Poisson y por lo tanto "instantáneamente" (es decir que cada valor de $\underline{\underline{t}}$) resulta dado por

$$\phi(x,t) = \int \frac{\rho(\bar{x}',t)}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\, d^3x'$$

Si ahora calculamos la derivada temporal

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(\bar{x},t) = \int (-)\, \frac{\bar{\nabla}_{(x')}\cdot\bar{J}(\bar{x}',t)}{|\bar{x}-\bar{x}'|}\, d^3x'$$

y

$$\vec{\nabla}_{(x)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\phi(\bar{x},t)\right) = -\vec{\nabla}_{(x)}\int \frac{\vec{\nabla}_{x'}\cdot\bar{J}(\bar{x}',t)\, d^3x'}{|\bar{x}-\bar{x}'|}$$

y si $\vec{J} = \vec{J}_{\text{transv}} + \vec{J}_{\text{longitudinal}}$

resulta

$$\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t} = -4\pi\vec{J}_{\text{longitudinal}}$$

como demostraremos a continuación

105

$$\bar{\nabla}\times(\bar{\nabla}\times\bar{J}) = \bar{\nabla}(\bar{\nabla}\cdot\bar{J}) - \nabla^2\bar{J}$$

$$\vec{J}_t = \frac{1}{4\pi}\,\bar{\nabla}\times\bar{\nabla}\times\int\frac{\bar{J}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}d^3x' \qquad \text{(a) (transv).}$$

$$\vec{J}_l = -\frac{1}{4\pi}\,\bar{\nabla}\int\frac{\bar{\nabla}'\cdot\bar{J}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}d^3x' \qquad \text{(b) (long).}$$

en (a) las derivadas se efectúan respecto a (x) $\Rightarrow$

$$\frac{1}{4\pi}\left(\bar{\nabla}\int\frac{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}d^3x' - \int\vec{J}\,\underbrace{\nabla^2\left(1/|\bar{x}-\bar{x}'|\right)}_{-4\pi\delta(\bar{x}-\bar{x}')}d^3x'\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{4\pi}\,\bar{\nabla}\left(\int\frac{\bar{\nabla}\cdot\bar{J}}{|\bar{x}-\bar{x}'|}d^3x'\right.}_{=-J_e} + 4\pi\vec{J}(\bar{x},t)\Bigg)$$

$$= -\bar{J}_e + \vec{J} = \boxed{\vec{J}_{transversal}}$$

De esta manera

condición de Coulomb $(\bar{\nabla}\cdot\bar{A}=0)$

$$\boxed{\begin{aligned}\bar{\nabla}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) &= 4\pi\vec{J}_{long}\\ \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\bar{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\vec{J}_{transv.}\end{aligned}}$$

Estos son ejemplos de fijado de escala o gauge en electromagnetismo.

106

La condición de Lorentz (o gauge restringida) y la de Coulomb (gauge transversal) son ejemplos particulares de condiciones de gauge.

Para el caso de Coulomb, con $\rho = 0$

tenemos $\phi = 0$ y $\bar{J} = 0$

$$\nabla^2 \bar{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \bar{A}}{\partial t^2} = 0$$

de donde $\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$

y $\bar{B} = \bar{\nabla} \times \bar{A}$

Resumen

1. Las ecuaciones de Maxwell unifican las expresiones para campos y potenciales, vía la introducción de la corriente de desplazamiento $\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right)$

2. Las ecuaciones presentan invariancias de escala (gauge)

3. Más adelante en el curso veremos que también mantienen la forma (relatividad restringida)