# Electromagnetismo - Lic. Física Médica

Año 2018

Prof: D. Cabra — JTP: W. Baron

# Práctica 0 — Repaso

## Campos escalares y vectoriales, cálculo diferencial e integral, delta de Dirac.

**Problema 1.**

1. Grafique las siguientes curvas, y calcule sus vectores velocidad:

   (a) $\sigma(t) = \hat{\mathbf{x}}/t$ con $0 < t < 1$.

   (b) $\sigma(t) = \mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}t$ con $\mathbf{r}_0 = (1, 1, 1)$, $\Delta\mathbf{r} = (1, -1, -1)$ y $0 < t < 1$.

   (c) $\sigma(t) = (\cos(t) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) + 2)\hat{\mathbf{y}}$, $0 < t < \pi/2$

   (d) $\sigma(t) = \cos(t)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(t) - 2)\hat{\mathbf{y}} + (3t)\hat{\mathbf{z}}$ , $0 < t < 10$

   (e) $\sigma(t) = \sin(t)\hat{\mathbf{x}} - 3t\hat{\mathbf{y}}$ con $0 < t < 4\pi$.

2. Grafique las siguientes superficies, y encuentre los correspondientes elementos de área:

   (a) $A(u, v) = (1 - u)\hat{\mathbf{x}} + (1 - v)\hat{\mathbf{y}}$ $0 < u, v < 1$.

   (b) $A(\theta, \phi) = (\cos(\phi)\sin(\theta) - 1)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi)\sin(\theta) + 1)\hat{\mathbf{y}} + \frac{1}{2}\cos(\theta)\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \theta < \pi/2$, $-\pi < \phi < \pi$.

   (c) $A(z, \phi) = \cos(\phi)\hat{\mathbf{x}} + (\sin(\phi) - 1)\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$, $0 < \phi < \pi$, $-1 < z < 1$.

3. Dé una parametrización para las siguientes curvas:

   (a) Un segmento de recta que sale del punto $(1, 0, 0)$ y llega hasta el punto $(1, 2, 1)$

   (b) Un segmento de circunferencia que sale del punto $(1, 0, 0)$, pasa por el punto $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ y llega al punto $(0, 1, 0)$.

4. Dé una parametrización para las siguientes superficies, y sus correspondientes elementos de área:

   (a) El paralelogramo generado por los vectores $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 0)$.

   (b) La esfera de radio 2 centrada en el punto $(1, 0, 0)$.

   (c) Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

5. Dé una parametrización para los siguientes volúmenes, y sus correspondientes elementos de volumen:

   (a) Un cubo de lado 1, centrado en el origen, y con sus caras perpendiculares a los ejes cartesianos.

   (b) La esfera de radio 1, centrada en el origen.

   (c) Un cilindro de largo 2, centrado en el origen, coaxial con el eje z, y de radio 1.

**Problema 2.** Sea $\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{x}} + y_0\hat{\mathbf{y}} + z_0\hat{\mathbf{z}}$. Determine el gradiente de las funciones $f(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ y $g(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^{-1}$.

**Problema 3.** Calcule la divergencia y el rotor de los siguientes campos vectoriales

1. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$
2. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}$
3. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\hat{\mathbf{z}}$
4. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r}|^2 + a^2}$
5. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$
6. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y^2\hat{\mathbf{x}} + (2xy + z^2)\hat{\mathbf{y}} + 2yz\hat{\mathbf{z}}$
7. $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ con $\mathbf{E_0}$ y $\mathbf{k}$ vectores constantes.

**Problema 4.** Demuestre que a) La divergencia del rotor de una función suave es siempre nula. b) El rotor del gradiente de una función suave es siempre nulo.

**Problema 5. Integrales de linea** Calcule las integrales de linea asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = y\hat{\mathbf{x}} + 2x\hat{\mathbf{y}}$ a lo largo de las siguientes curvas:

1. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a} = (1, 1, 0)$ al punto $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$.
2. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (2, 1, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$.
3. Moviendose en linea recta desde el punto $\mathbf{a}$ al punto $\mathbf{c} = (2, 1, 0)$, y de ahí nuevamente en linea recta al punto $\mathbf{b}$, y finalmente, volviendo en linea recta hasta el punto $\mathbf{a}$.

Repita los cálculos para el campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xy^2\hat{\mathbf{x}} + 2yx^2\hat{\mathbf{y}}$

**Problema 6. Integrales de superficie** Calcule las integrales de superficie asociadas al campo $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = 2xz\hat{\mathbf{x}} + (x + 2)\hat{\mathbf{y}} + y(z^2 - 3)\hat{\mathbf{z}}$ sobre la superficie de un cubo de lado 2, con un vértice en el origen $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ y sus aristas paralelas a los ejes coordenados, excluyendo la cara que contiene al punto $(1, 1, 0)$.

**Problema 7. Integrales de volumen** Calcule las siguientes integrales de volumen sobre el cubo unitario $V = \{0 \leq x, y, z \leq 1\}$:

1. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = xyz^2$
2. $\int_V f(\mathbf{r})dV$ con $f(\mathbf{r}) = z^2$

**Problema 8. Teorema fundamental** Compruebe el teorema fundamental para gradientes usando $\phi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2yz^3$ para calcular la integral de linea de la función $\mathbf{T}(x, y, z) = \nabla\phi(x, y, z)$ desde el punto $a = (0, 0, 0)$ al punto $b = (1, 1, 1)$ y los caminos:

1. $(0, 0, 0) \to (1, 0, 0) \to (1, 1, 0) \to (1, 1, 1)$ de a tramos rectos.
2. por el camino parabólico $z = x^2$, $y = x$.

**Problema 9. Delta de Dirac** Calcule las siguientes integrales de volumen

1. $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{a})(r^2 + \mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + a^2)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{a}$ un vector fijo y $a = |\mathbf{a}|$) sobre todo el espacio.
2. $\int \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{c})(r^4 + r^2\mathbf{r} \cdot \mathbf{c} + c^4)d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{c} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 6 centrada en el origen.
3. $\int \delta^3(\mathbf{d} - \mathbf{r})\mathbf{r} \cdot (\mathbf{d} - \mathbf{r})d^3\mathbf{r}$ (con $\mathbf{d} = (5, 3, 2)$) sobre la esfera de radio 2 centrada en $\mathbf{c} = (2, 2, 2)$.