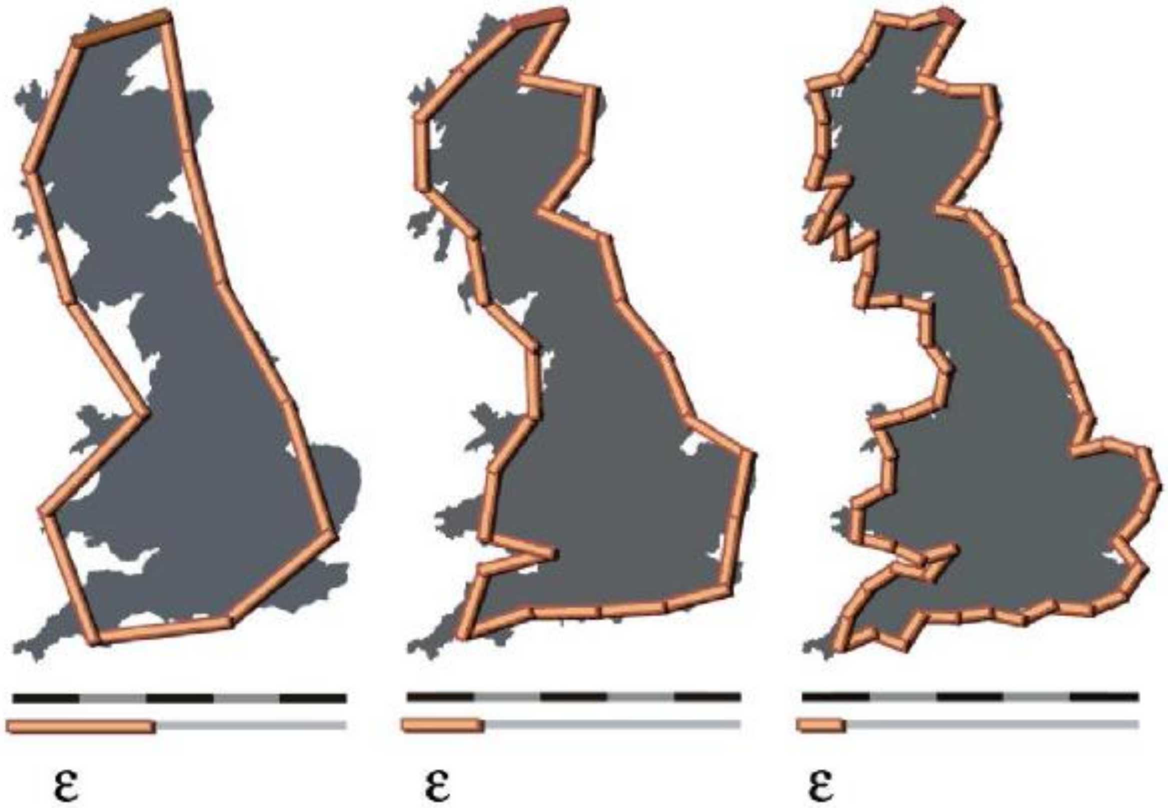
Fractales



Medida de la costa británica

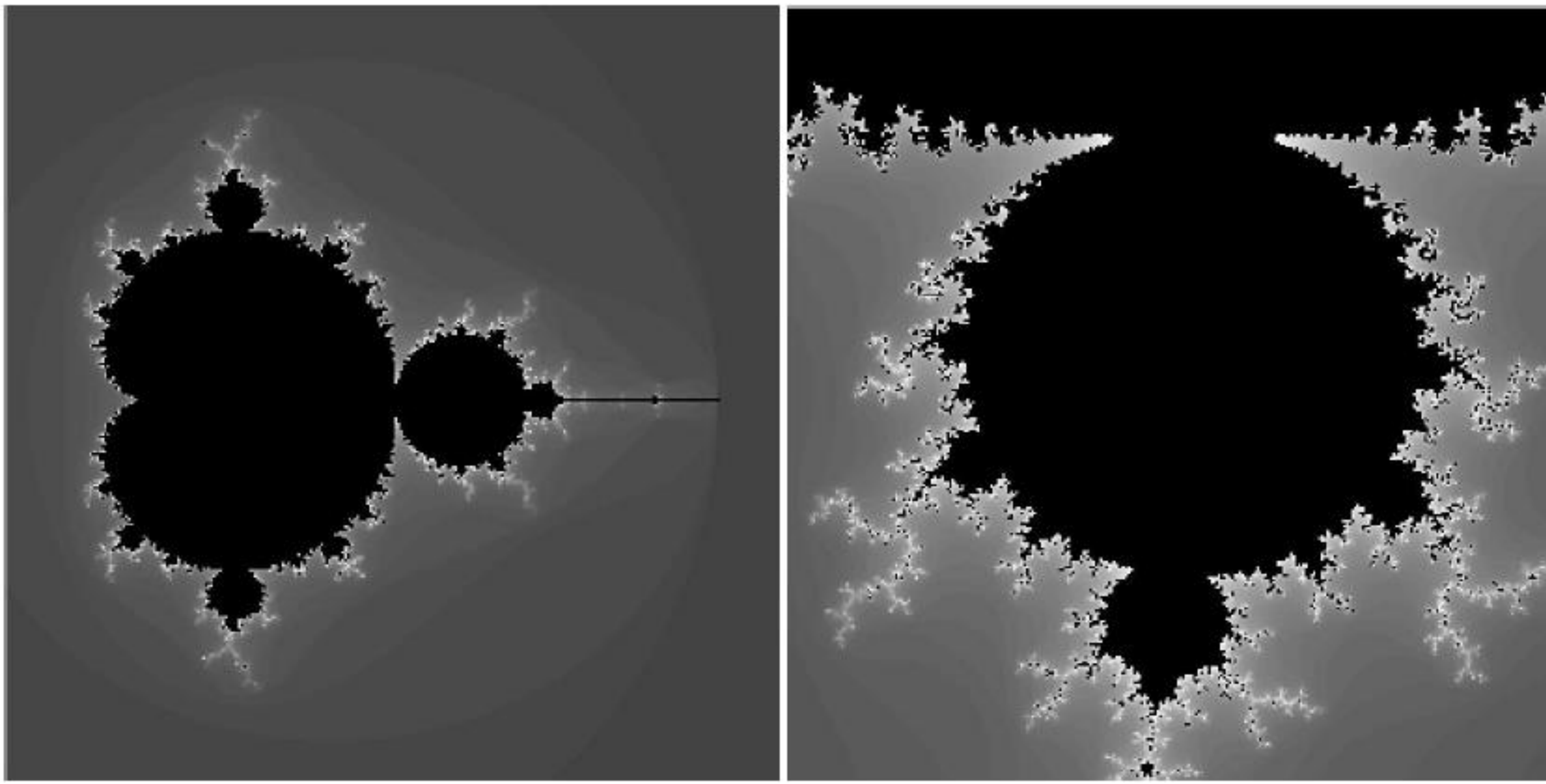
- La publicación del artículo “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension” en 1967 supuso un hito trascendental en el mundo científico, concretamente de las matemáticas, con una influencia que se ha extendido a todos los campos de la experiencia humana.
- En dicho artículo, el autor, Benoît Mandelbrot, introduce el concepto de geometría fractal.

- La geometría clásica se mostraba incapaz de describir objetos naturales rugosos o fragmentados, como el contorno accidentado del litoral.
- La aparición de la geometría fractal va a permitir el estudio de objetos fragmentados que presentan **invarianza** respecto al cambio de escala.
- Desde ese momento, es posible describir matemáticamente objetos que hasta entonces se consideraban demasiado complejos, como nubes, la superficie de ciertos materiales y las señales funcionales de un electrocardiograma; o simplemente caóticos, como el movimiento browniano.

- Los fractales son objetos matemáticos cuya principal peculiaridad es el ser auto-similares, es decir, que a cualquier escala se puede observar la misma estructura.
- Los fractales tienen, por lo tanto una cantidad infinita de detalle.
- A medida que aumentamos la resolución obtenemos más detalles, de la misma forma que sucede en el problema del cálculo de longitudes de líneas de costa.

- En la figura 2 se muestra la representación gráfica del conjunto de Mandelbrot, descubierto por Mandelbrot en 1980. Éste genera una imagen curiosa, cuya popularización es responsable del desarrollo de la ciencia fractal.
- En ella se puede observar la propiedad de **auto-similitud**. Al observar un detalle se puede reconocer una estructura similar a la global.

Conjunto de Mandelbrot.



- En principio esta auto-similitud es infinita, pero sólo en el caso de los fractales matemáticos.
- Los fractales naturales sólo presentan un número finito de“niveles” auto-similares. Además, aunque parecidos no poseen una semejanza totalmente exacta.
- A esta propiedad de invarianza estadística del escalado se le denomina auto-similitud estadística.

De forma general, podemos caracterizar los fractales mediante las siguientes propiedades:

- Tienen una estructura compleja a cualquier resolución.
- Tienen una dimensión no entera.
- Tienen un perímetro de longitud infinita pero un área limitada.
- Son auto-similares e independientes de la escala.

Dimensión Fractal

- En su estudio, L. F. Richardson descubrió que para cualquier línea de costa, existen unas constantes F y D tales que para aproximar la línea de costa con un camino poligonal, se requieren aproximadamente $F\,\epsilon^{-D}$ intervalos de longitud . De esta forma la longitud estimada vendrá dada por

$$L(\epsilon) \approx F\epsilon^{1-D}$$

- El valor D se denomina dimensión Hausdorff-Besicovitch del conjunto S.
- Para definir este concepto, se ha de considerar el número N de bolas de radio no mayor a necesarias para cubrir S completamente.
- Es fácil comprobar que mientras más pequeño sea , mayor es el valor de N.
- Grosso Modo se puede asegurar que si N aumenta de la misma forma que δ^{-D} , entonces D es la dimensión Hausdorff-Besicovitch del conjunto S.

- Para medir una línea curva de longitud L0, ésta se cubre con N segmentos longitud , por tanto $N = L_0/\delta^1$, y la longitud total estimada será:

$$\tilde{L} = \sum \delta^1 = N_\delta \cdot \delta^1 = \frac{L_0}{\delta^1}\delta^1$$

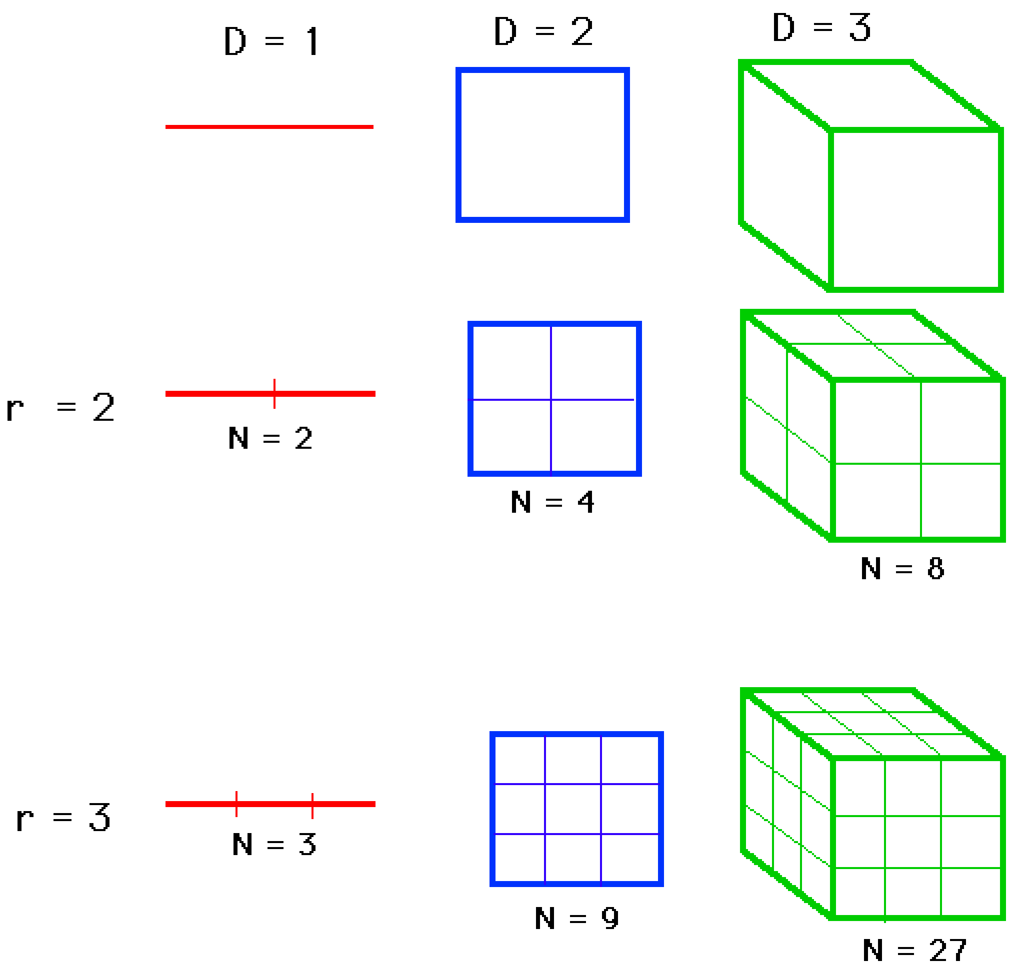
- Al hacer que el segmento tienda a cero obtenemos la longitud que queremos medir…
- Análogamente para una superficie o volumen!

- En general, si tomamos un conjunto de dimensión D, podemos descomponerlo en N réplicas de sí mismo reducidas en un factor de escala r, y tendríamos que: N r^D= C, donde C es constante. Resolviendo obtendríamos:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \lim_{r \to 0} - \frac{\log N}{\log r}$$

- Así se define la **dimensión** fractal de la siguiente manera: Sea N(A,ϵ) el mínimo número mínimo de bolas abiertas de radio necesarias para cubrir el conjunto A, la dimensión de similitud D es:

$$D = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\log N(A,\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = \lim_{\epsilon \to 0} - \frac{\log N(A,\epsilon)}{\log \epsilon}$$



$$N = r^D$$

- Mas simple e intuitivo:

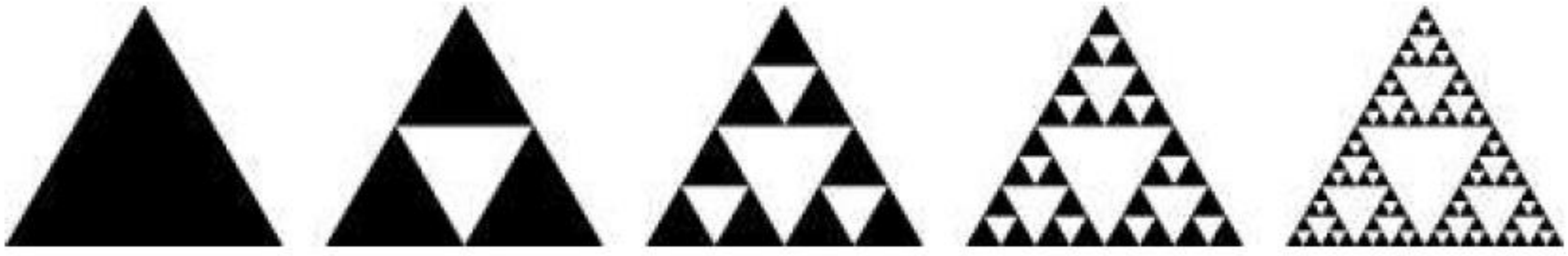
tomemos curvas (1D), superficies (2D) , volúmenes (3D) y luego reescalemos sus dimensiones por un factor 1/r .

Entonces despejando la dimensión fractal seria :

$$D = \frac{\log\ (N)}{\log\ (r)}$$

El triángulo de Sierpinski

- Se trata de un fractal descrito por Waclaw Sierpi`nski en 1915, que ya había aparecido en el arte italiano en el siglo XIII.
- Para generar la figura partimos de un triángulo sólido cualquiera, en nuestro caso equilátero. Éste se divide en cuatro triángulos iguales más pequeños, utilizando para ello el punto medio de cada lado como nuevo vértice.
- Finalmente eliminamos el triángulo que queda en el medio. Este proceso se repite en cada uno de los triángulos restantes.



- Como cada triángulo genera tres nuevos triángulos, el número de triángulos después de la n-ésima iteración es $Nn = 3^n$. Siendo A0 el área del triángulo original, en la primera iteración eliminamos 1/4 del área de éste, quedando A1 = 3 A0/4. En la siguiente iteración eliminamos 3 triángulos, cada uno con un área igual a 1/4 del área del triángulo del que fue tomado.
- Por lo tanto, el área total que eliminamos en esta iteración es 3 · 1/4 ·A0/4 = 3A0/16. Esto implica que en la segunda iteración el área total restante es:

$$A_2 = \frac{3A_0}{4} - \frac{3A_0}{16} = \frac{9A_0}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

- Y para la siguiente iteración:

$$A_2 = \frac{3A_0}{4} - \frac{3A_0}{16} = \frac{9A_0}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 A_0$$

Y la siguiente…

$$A_3 = \frac{9A_0}{16} - 9\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{A_0}{4} = \frac{27A_0}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 A_0$$

Y para orden n:

$$A_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n A_0 \text{ para } n = 0, 1, 2...$$

- el área de nuestro triángulo después de k + 1 iteraciones será:

$$A_{k+1} = A_k - 3^k \frac{A_0}{4^{k+1}} = \frac{3^k}{4^k} A_0 - \frac{3^k}{4^{k+1}} A_0 = \frac{4 \cdot 3^k - 3^k}{4^{k+1}} A_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} A_0$$

- Con lo cual podemos comprobar que a medida que n aumenta hacia infinito, el área tiende a 0.

$$A_\infty = \lim_{n \to \infty} A_n = A_0 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$$

- Para calcular el perímetro de los triángulos que restan después de cada iteración consideraremos que el perímetro de cada uno de éstos es la mitad que el de la iteración precedente.
- Esto se desprende directamente del procedimiento de construcción del fractal. Así, siendo P0 el perímetro original, después de la primera iteración nos quedan 3 triángulos cada uno con un perímetro de valor P0/2. En la segunda iteración, tendremos 3^2 triángulos con perímetros de valor P1/2 = P0/4. Para n iteraciones tendremos:

$$P_n = 3^n \left(\frac{1}{2}\right)^n P_0 = P_0 \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

- Es inmediato observar que cuando el número de iteraciones n se aproxima a infinito, el perímetro de los triángulos tiende a infinito.

$$P_\infty = \lim_{n \to \infty} P_n = P_0 \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

- ¡¡¡Resulta sorprendente que una curva infinita pueda encerrar un área nula!!!!

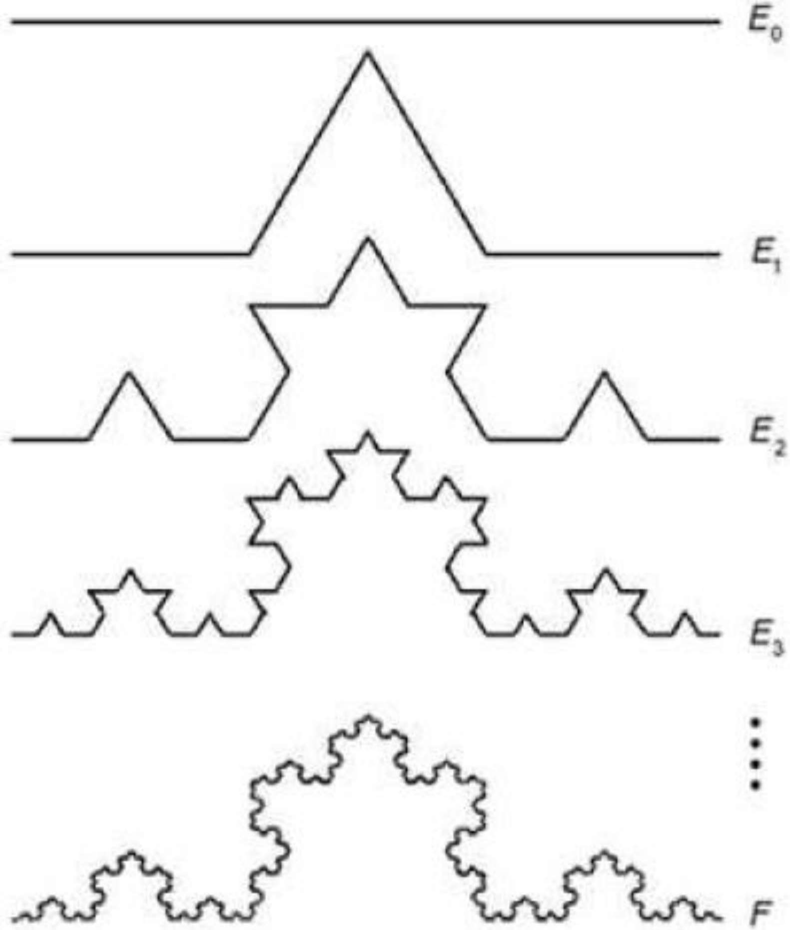
- Como ya se ha dicho, en la n-ésima iteración tendremos 3^n réplicas del triángulo, cada una de ellas reducidas en un factor $r = (½)^n$.

- Por lo tanto la dimensión fractal es:

$$D = \lim_{n \to \infty} -\frac{\log 3^n}{\log 2^{-n}} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1{,}58496$$

La curva de Koch

- La curva de Koch es uno de las primeras curvas fractales en ser descrita. Apareció en un artículo del matemático sueco Helge von Koch en 1906.
- Más conocida que ésta es el copo de nieve de Koch, similar a la curva excepto que comienza a partir de un triángulo en lugar de un segmento.



- Generando una curva de Koch

- La construcción de la curva de Koch se lleva a cabo mediante adiciones progresivas a un simple segmento de línea. Las adiciones se realizan dividiendo ésta en nuevos segmentos de un tercio de longitud, y luego sustituyendo el segmento central por dos segmentos que, junto con el suprimido, formarán un triángulo equilátero. La curva de Koch es el resultado de repetir este procedimiento sobre los segmentos resultantes infinitas veces.
- La curva de Koch tiene longitud infinita, ya que cada en cada iteración del proceso de generación, la longitud de cada segmento aumenta un tercio de su longitud original. Esto es evidente, ya que el segmento central es remplazado por dos nuevos segmentos de la misma longitud, resultando cuatro nuevo segmentos de longitud un tercio del segmento original.
- El número de segmentos en la n-ésima iteración es:

$$Nn = 4^n .$$

- Así, si llamamos L0 a la longitud inicial del segmento, después de la primera iteración tendremos una curva de longitud L1 = 4L0/3 formada por4 segmentos (cada uno de longitud L0/3). En la segunda iteración, tendremos 4^2 segmentos, cada uno con una longitud

  1/3 · L0/3 = L0/32.

Una nueva iteración dará como resultado 4^3 segmentos de 1/3 · L0/32 = L0/3 ^{3} .

- Generalizando, para cualquier n:

$$L_n = 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^n L_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$$

- que tiende a infinito a medida que el número de iteraciones se aproxima al infinito:

$$L_\infty = L_0 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty$$

- A partir de los resultados obtenidos anteriormente se puede determinar el área "bajo" la curva de Koch. Para ello hay que tener en cuenta que el área de un triángulo equilátero viene dado por A =(√3)/4 l^2, donde l representa la longitud de los lados. Así, en la primera iteración tendremos un triángulo equilátero cuyo área es A1 =(√3)/4 $(l_o/3)^2$.En la segunda iteración, tendremos que añadir a este triángulo otros 4 triángulos de área (√3)/4 $(l_o/3^2)^2$. Por lo tanto:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

- Puesto que en la iteración k-ésima existen 4^k segmentos, en la iteración k + 1 se añade el mismo número de triángulos. Por otro lado, el tamaño de los segmentos se divide por 3 en cada iteración, por lo tanto:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 \text{ para } n = 1, 2, \ldots.$$

- el resultado de esta serie cuando el número de iteraciones se aproxima a infinito es el área que se busca:

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A_n = \frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k = \frac{4}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3^2}\right)^k$$

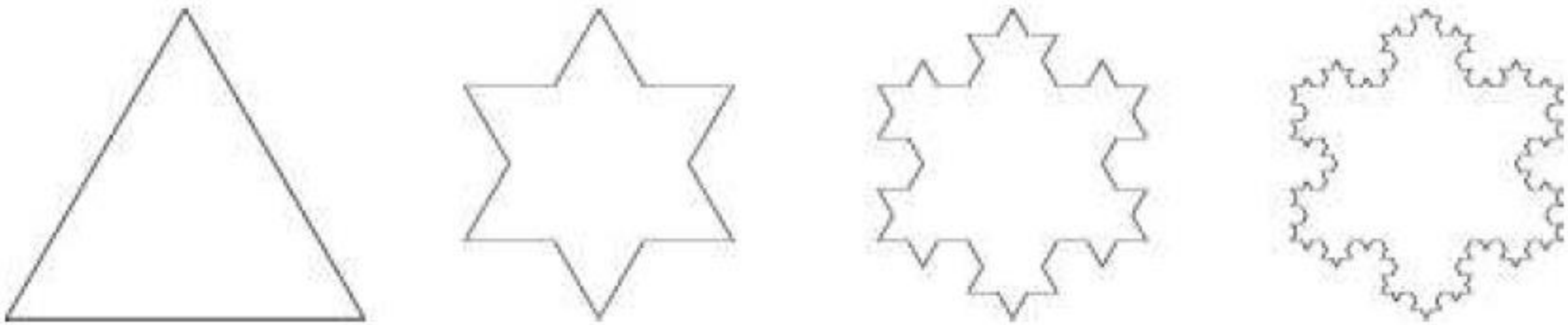
- que es una serie geométrica por lo que es convergente, y por lo tanto la curva encierra un área finita!!!

$$A_\infty = \frac{4}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{4^2} l_0^2 \frac{1}{1-\frac{4}{3^2}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2$$

- Se observa que el área encerrada por la curva es una quinta parte del área que encerraría un triángulo equilátero de lado l_0.
- Para calcular la dimensión fractal de esta figura, tenemos en cuenta que el número de segmentos en cada iteración es $Nn = 4^n$, y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es $ln =(1/3)^n$
- La dimensión fractal será entonces:

$$D = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log 4^n}{\log 3^{-n}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26186$$

El copo de nieve de Koch



- El copo de nieve de Koch

- Como ya se ha indicado, el copo de nieve de Koch está muy relacionado con la curva de Koch. El procedimiento de generación de ambos es muy similar.
- En el caso del copo de nieve se comienza con un triángulo equilátero, cuyos lados son divididos en segmentos de un tercio de su longitud.
- El segmento central se sustituye con un triángulo equilátero de lado igual a los segmentos y se elimina la base. Para generar el copo se repite infinitas veces este proceso sobre los nuevos segmentos generados en la anterior iteración.

- Se observa que este proceso es equivalente a generar una curva de Koch utilizando como segmento inicial los lados del triángulo.
- Así, el perímetro será igual al de la curva de Koch multiplicado por tres, y tenderá a infinito a medida que aumenta el número de iteraciones.

$$P_n = 3\left(\frac{4}{3}\right)^n L_0$$

$$P_\infty = \lim_{n\to\infty} 3\left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 = \infty$$

- Para el cálculo del área sabemos que partimos de un triángulo equilátero cuyo área es

$Ao=(\surd 3)/4\ (l_o)^2$

siendo lo la longitud de los lados. En la primera iteración, tendremos que añadir a este triángulo otros 3 triángulos de área $(\surd 3)/4\ (l_o/3\ )^2$

Por lo tanto:

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2$$

- Recordando que después de cada iteración, cada segmento genera 4 nuevos segmentos, y que la longitud de estos se reduce en un factor de 1/3:

$$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + 3\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3}\right)^2 + 3 \cdot 4\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^2}\right)^2$$

- Generalizando para n iteraciones:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2 + \sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 4^{k-1}\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{l_0}{3^k}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2\left[1 + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{3^2}\right)^k\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} l_0^2\left[1 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{4}{3^2}\right)^k\right] \end{aligned}$$

- que al igual que en el caso de la curva de Koch, da lugar a un área finita e igual a:

$$A_\infty = \frac{8}{5}\frac{\sqrt{3}}{4}l_0^2 = \frac{8}{5}A_0$$

- Como sabemos, el número de réplicas del triángulo original es Nn = 3 · 4^n, y la longitud de cada segmento se reduce en un factor de un tercio cada vez, esto es ln =$(1/3)^n$
- La dimensión fractal será entonces:

$$D = \lim_{n\to\infty} -\frac{\log(3\cdot 4^n)}{\log 3^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\log 3 + n\log 4}{n\cdot\log 3} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1{,}26186$$

- Coincide con la dimensión de la curva de Koch. Esto no debe sorprendernos, ya que el proceso de generación de ambos fractales es idénticos, dando lugar a figuras de complejidad similar.

Bibliografía

-B. Mandelbrot, “How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self- Similarity and Fractional Dimension” Science vol. 156, pp. 636-638, 1967. 1

- L. F. Richardson, en General Systems Yearbook 6, 139, 1961. 2

- “Fractals”. Mathworld Jan. 2005. Wolfram. 22 Jan. 2005,http://mathworld.wolfram.com/topics/Fractals.html

Paper de Phys Rev Lett **75**(1995) 2428 respondan estas preguntas:

- ¿Por qué estudiar el comportamiento invariante de escala en este problema?

- ¿Cómo es el mecanismo de formación de estructura que plantean y cuáles son los argumentos biológicos que lo justifican?

- ¿Qué resultados obtienen?