Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2024

Práctica 3 - Cambio de base y transformaciones lineales.

1. Considere la siguientes ternas ordenadas de números reales:

$$\mathbf{v}_1 = (1,0,2) \quad \mathbf{v}_2 = (3,1,1) \quad \mathbf{v}_3 = (2,-1,-1) \quad \mathbf{v}_4 = (4,-1,3)$$

   a) ¿Es $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ el espacio vectorial generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$? Justificar.

   b) ¿$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ son un conjunto linealmente independiente de vectores? ¿Por qué? ¿Cuál es la dimensión del espacio generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$?

   c) ¿Es posible elegir un subconjunto de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ que sea base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$?

   d) Construya las matrices de cambio de base que conectan la base que construyó en el inciso anterior y la base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$.

2. *a)* Determinar el valor de k para que el conjunto de matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} k & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   sea linealmente independiente.

   A partir, de haber definido el valor de k, estudiar si $\{A, B, C\}$ genera al subespacio vectorial de matrices triangulares superiores $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^{2\times2}$, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. ¿Es base? ¿Puede indicar cuál es la dimensión de dicho espacio vectorial?

   b) Construir la matriz de cambio de base de $\{A, B, C\}$ a $\{E_1, E_2, E_3\}$, donde:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Determinar si las siguientes aplicaciones son isomorfismos; cuando no lo sean, indicar qué condición no satisfacen:

   a) $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{R}$, tal que

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ab - bc$$

   b) $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, tal que

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c + (d+c)x + (b+a)x^2 + ax^3$$

   c) $f : \mathbb{R}^{2\times2} \to \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$, tal que

$$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = c + (d+c)x + (b+a+1)x^2 + ax^3$$

4. *a)* En $\mathbb{R}^2$, exprese el vector $v = ae_1 + be_2$ en una base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, rotada en un ángulo de 30° respecto de la base canónica $\{e_1, e_2\}$. Escriba la matriz de cambio de base correspondiente.

   b) En $\mathbb{R}^3$, exprese el vector $v = ae_1 + be_2 + ce_3$ en una base $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3\}$, correspondiente a una base rotada en un ángulo de 45° respecto del eje y de la base canónica e_1, e_2, e_3. Escriba la matriz de cambio de base correspondiente.

   c) En $\mathbb{R}^2$, exprese el vector $v = ae_1 + be_2$ en una base $\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, reflejada respecto a la recta $y = x$ en la base e_1, e_2. Escriba la matriz de cambio de base correspondiente.

5. Sea $L : V \to W$, transformación lineal entre los espacios vectoriales V y W. Supongamos que $L(v_1) = w_1, ..., L(v_k) = w_k$, para los vectores $v_1, ..., v_k \in V$ y $w_1, ..., w_k \in W$.

   a) Si el conjunto $\{w_1, ..., w_k\}$ es linealmente independiente, ¿debe el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ ser linealmente independiente?

   b) Si el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente, ¿debe el conjunto $\{w_1, ..., w_k\}$ ser linealmente independiente?

   c) Si el conjunto $\{w_1, ..., w_k\}$ genera W, ¿debe el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ generar V?

   d) Si el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ genera V, ¿debe el conjunto $\{w_1, ..., w_k\}$ generar W?

6. Sea $T : V \to W$, transformación lineal, y sea S subespacio de V. Demostrar que $Im(S)$ es subespacio de W (T transforma subespacios en subespacios).

7. Determinar cuáles de las siguientes son transformaciones lineales (en caso afirmativo, determinar el núcleo y la imagen de dicha transformación):

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, operador traslación ($T(x) = x + a$, con $a \in \mathbb{R}^3$ un vector fijo).

   b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $F(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$.

   c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, tal que $F(\alpha, \beta) = (e^\alpha, e^\beta)$.

8. *a*) Sea $F : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}$ el operador transposición, definido por $F(A) = A^T$. Indicar si es una transformación lineal y, en caso afirmativo, hallar el núcleo y la imagen. Para $m = 3$ y $n = 2$, hallar también la representación matricial de la misma en la bases canónica de $\mathbb{R}^{3\times 2}$ y $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

   b)) Sea $G : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ definida como $G(A) = [M, A]$ con $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz dada (conmutador de dos matrices $[A, B] = AB - BA$). Indicar si G es un operador lineal.

   c) Sea $\mathrm{Tr} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la traza, definida por $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ para $A = (a_{ij})$, $i, j = 1, ..., n$. Indicar si es una forma lineal y hallar en tal caso el núcleo y la imagen de Tr, junto con sus respectivas dimensiones. Para $n = 2$, hallar también una representación matricial.

   d) Sea $\mathrm{Det} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ la forma determinante. Indicar si es una forma lineal.

9. Dado el operador lineal $F(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha + \beta + \gamma, \alpha, \beta)$.

   a) Hallar el núcleo y la imagen de dicha transformación.

   b) Hallar la matriz de representación del operador en la base canónica.

   c) Hallar la matriz de representación del operador en la base $B = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 1, 1)\}$

   d) Verificar que el determinante y la traza de las matrices que representan a F en las bases anteriores permanecen invariantes.

10. Sea la transformación lineal $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $L(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\alpha - \beta + \gamma + \delta, \alpha + 2\gamma - \delta, \alpha + \beta - 3\gamma + 3\delta)$

    a) Construir la matriz asociada en las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^3$.

    b) Determinar una base y la dimensión de la imagen.

    c) Determinar una base y la dimensión del núcleo.

    d) Encontrar el conjunto de vectores $x \in \mathbb{R}^4$ tales que $L(x) = (1, 2, 3)$

11. Sean U, V y W espacios vectoriales de dimensiones 2, 3 y 4 respectivamente. Las transformaciones lineales $\mathcal{F} : V \to V$, $\mathcal{G} : V \to W$ y $\mathcal{H} : V \to U$ tienen, en ciertas bases, las siguientes matrices asociadas:

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

    a) Indicar si las transformaciones indicadas corresponden a un monomorfismo, epimorfismo o isomorfismo y las dimensiones de los núcleos e imágenes *b*) Sin realizar cálculos, indicar si existen las inversas a izquierda y/o derecha en cada uno de estos casos.

c) En caso de existir, mostrar las representaciones matriciales de las inversas a izquierda y derecha (al menos dos en caso de no ser únicas).

12. Las operaciones de derivación transforman funciones en funciones. Por ejemplo, la derivada respecto de x convierte la función $f(x) = x$ en la función constante $f'(x) = 1$. Demostrar que $D : \mathbb{P}(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}(\mathbb{R})$ tal que $D(p)(x) = \frac{dp(x)}{dx}$, es un operador lineal. ¿Es un isomorfismo?

13. *a*) Probar que el operador Laplaciano

$$\Delta[f] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$$

define una transformación lineal sobre el espacio de funciones $f(x, y)$ doblemente diferenciables.

b) Probar que el gradiente $G[f] = \nabla f(x, y) = (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y))$ es un operador lineal que va del espacio de las funciones escalares diferenciables $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ al espacio de campos vectoriales continuos $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.