Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2024

Práctica 2 - Bases y Dimensión.

1. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos de pares ordenados genera el espacio vectorial $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$:

   a) $\{(1, -1)\}$
   b) $\{(2, 1), (1, 3)\}$
   c) $\{(6, -9), (-4, 6)\}$
   d) $\{(1, -1), (2, -1), (3, -1)\}$
   e) $\{(0, 0), (1, -1), (3, -2)\}$

2. ¿Cuáles de los conjuntos anteriores resultan linealmente independientes? Para aquellos conjuntos que son base de $\mathbb{R}^2(\mathbb{R})$, encuentre las coordenadas de $(1, 1)$ y represéntelo matricialmente.

3. *a)* Demostrar que el espacio vectorial de matrices simétricas de 2×2, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, es generado por:
$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
   ¿Puede considerarse base de dicho espacio? En caso afirmativo, ¿qué vector es representado matricialmente como $(3, 3, 2)^T$?

   b) Encontrar un conjunto de matrices que genere el espacio vectorial de las matrices hermíticas ($A = A^\dagger$, donde $\dagger$ implica transponer la matriz y conjugar sus elementos) de 2×2, sobre $\mathbb{R}$. ¿Y sobre el cuerpo $\mathbb{C}$?

   c) Ahora encontrar la base y la dimensión para el subespacio de las matrices anti-simétricas. ($A^T = -A$).

4. ¿Es el conjunto de matrices $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}(\mathbb{R})$ linealmente independiente? En caso afirmativo, encontrar las coordenadas de una matriz
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$
   que además pertenezca al espacio generado por M, considerando a este conjunto como base. ¿Cuál es la dimensión de dicho subespacio?

5. Indicar si los siguientes conjuntos son linealmente independientes. En los casos afirmativos, estudiar si forman base. ¿Cuál es la dimensión del espacio vectorial?

   a) Los vectores $z = 1 + i$ y $z = 1 - i$ en $\mathbb{C}(\mathbb{C})$. ¿Y en $\mathbb{C}(\mathbb{R})$?
   b) Los vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ y $(1, 0, -1)$ en $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$
   c) Los vectores $v_1 = e_1 + e_3$, $v_2 = e_1 - e_2$, $v_3 = e_1 + e_2 + e_3$, si los vectores e_1, e_2 y e_3, pertenecientes a un cierto espacio vectorial V ($\dim V = 5$) son linealmente independientes

6. Considere un espacio vectorial $\mathbb{V}$, definido sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, generado por el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$. Demostrar que la unicidad del desarrollo $v = C_1v_1 + C_2v_2 + C_3v_3 + \ldots + C_nv_n$, para deteminado vector $v \in \mathbb{V}$, falla si el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ es linealmente dependiente.

7. Demostrar que $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V, si y sólo si $\{v_1 + v_n, v_2 + v_n, ..., v_{n-1} + v_n, v_n\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes.

8. Mostrar que si $\{v_1, v_2, v_3\}$ es un conjunto de vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V entonces todos sus subconjuntos propios: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_3\}$, $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, $\{v_1, v_3\}$ son subconjuntos de vectores linealmente independientes. ¿Vale la recíproca?

9. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. Sea $\{u_1, u_2, ..., u_n\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes de V. Sea $a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n$, con $\alpha_j \in K$ (para $j = 1, ..., n$).

   Probar que si $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$, entonces $\{u_1 - a, u_2 - a, ..., u_n - a\}$ son linealmente dependientes.

10. Demuestre que en un espacio vectorial V de dimensión n cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes es una base para V.

11. *a*) Probar que si $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m\}$ es una base de $V \subset \mathbb{R}^n(\mathbb{R})$, entonces $m < n$.

    b) Considerando la hipótesis del inciso anterior, probar que existen vectores $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tales que $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ resulta ser una base de $\mathbb{R}^n(\mathbb{R})$.

    c) Ilustrar estos resultados construyendo una base de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$, que incluya a $(1, 0, -1)$.

12. En $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, expresar $v(t) = t^2 + 4t - 3$ como combinación lineal de $p_1(t) = t^2 - 2t + 5$, $p_2(t) = 2t^2 - 3t$ y $p_3(t) = t + 3$.

13. Considere el espacio vectorial de funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Demostrar que $\sin(x)$ y $\cos(x)$ constituyen un conjunto de vectores linealmente independientes. **Ayuda:** en el caso de funciones la independencia lineal no depende del valor que tome el argumento x.

    Determine si las funciones $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sin(x + \pi/3)$ son también linealmente independientes.

    ¿Qué sucede en el caso de las funciones 1, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\cos^2(x)$ y $\sin^2(x)$

    ¿Y en el caso de e^x y e^{x+1}?

14. Probar que $1 + t^2$, $t + t^2$ y $1 + 2t + t^2$ son una base del espacio de polinomios reales de segundo grado. ¿Cuál es la dimensión de éste espacio?

    Hallar las coordenadas de $1 + 4t + 7t^2$ en esta base y representarlo matricialmente.

15. El *Wronskiano* de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$, diferenciables en el intervalo $[a, b]$, es la funcion escalar definida por:

$$W[f, g](t) = \text{Det} = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$

    Demostrar que si $\exists t_0 \in [a, b] \ / \ W[f, g](t_0) \neq 0$ entonces $f(t)$ y $g(t)$ son linealmente independientes en $[a, b]$. Demostrar que no vale la recíproca.

16. Encontrar los valores de k para los cuales $f_k(x) = e^{kx}$ resulta solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 f_k}{dx^2} - \frac{df_k}{dx} - 2f_k = 0 \tag{1}$$

    A partir del resultado obtenido en 15), mostrar que el conjunto de funciones $\mathcal{F} = \{f_k(x)\}$, tal que k toma sólo los valores obtenidos previamente, es linealmente independiente. Considerando a $\mathcal{F}$ como base, ordenado arbitrariamente, qué vector es representado matricialmente como $(3, -1)^T$.