

Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2024

Práctica 1 - Espacios y subespacios vectoriales.

1. Considere los siguientes conjuntos de 3-tuplas $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ (con las sumas usuales entre vectores de \mathbb{R}^3). Determine cuáles de estos casos son espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{R} .

- a) $x_1 > 0$
- b) $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$
- c) $x_1 + x_2 = 0$
- d) $x_1 + x_2 = -1$
- e) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $x_1 - x_2 = 0$

2. Probar que \mathbb{R}^2 es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{R} , con la suma $+(2,1)$ y el producto por escalares $\cdot(2,1)$ definidas de la siguiente forma:

$$(x_1, y_1) +_{(2,1)} (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2 - 1)$$

$$r \cdot_{(2,1)} (x, y) = r \cdot (x - 2, y - 1) + (2, 1)$$

3. Determinar si constituyen espacios vectoriales (\mathbb{V} es el conjunto de vectores, \mathbb{F} es el cuerpo y $\lambda \in \mathbb{F}$):

- a) $\mathbb{V} = \{x_i/x_i \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\}$; donde la suma de vectores está definida por $x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2$ (el producto usual de números reales) y el producto externo es $\lambda \odot x = x^\lambda$.
- b) $\mathbb{V} = \{x_i/x_i \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}\}$; donde $x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2$ y $\lambda \odot x = \lambda^2 x$.
- c) $\mathbb{V} = \{x/x \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{C}\}$; con la suma usual entre complejos como \oplus y $\lambda \odot x = \operatorname{Re}(\lambda)x$.
- d) $\mathbb{V} = \{x/x = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda/\lambda \in \mathbb{R}\}$; con la suma usual de pares ordenados como \oplus y el producto externo definido por $\lambda \odot x = (\lambda x_1, x_2)$.

4. Muestre que el conjunto de soluciones $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ del sistema de ecuaciones $AX = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante es un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . Sucede lo mismo con las soluciones de $AX = B$, con B una matriz columna no nula? Cuando sea posible, reescriba los problemas del ejercicio 1. de la forma $AX = B$.

5. $M(n, \mathbb{R})$ es el conjunto de las matrices $n \times n$ con elementos en \mathbb{R} . Mostrar que sobre el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tiene estructura de espacio vectorial, con la suma usual de matrices y producto usual de un número real por una matriz.

6. $GL(n, \mathbb{R})$ es el grupo de las matrices $n \times n$ y determinante no nulo. ¿Forma un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, con la suma usual de matrices y producto usual de un número real por una matriz? .

7. Demuestre que el conjunto de las matrices hermiticas $H_n = \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} / M = M^\dagger\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales pero no sobre los complejos. **Nota:** M^\dagger se obtiene a partir la transposición de M y la conjugación de todos sus elementos. Las operaciones son la suma usual de matrices y producto por escalar.

8. ¿El conjunto V de las matrices reales singulares de $n \times n$, sobre el cuerpo \mathbb{R} , con la suma usual de matrices y producto usual de un número real por una matriz, tiene estructura de espacio vectorial?

9. No sólo los conjuntos de n-túplas o matrices forman espacios vectoriales sobre algún cuerpo. Estudiar los siguientes casos de conjuntos funciones:

- a) El conjunto de las funciones reales periódicas en el intervalo $[0, 1]$, $V = \{f/f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$ con las operaciones usuales de suma y producto forman un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

- b) $C^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ con derivada segunda continua}\}$ sobre el cuerpo \mathbb{R} con la suma usual de funciones y producto usual de una función por un número real.
- c) \mathbb{V} el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, sobre el cuerpo \mathbb{R} , con la suma usual de polinomios y el producto usual de un polinomio por un escalar.
- d) Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (la incógnita y depende de una única variable) lineal (las derivadas de y no aparecen elevadas a ninguna potencia) homogéneo (no hay términos independientes de $y(t)$):

$$a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} y(t) + a_0(t) y(t) = 0$$

de coeficientes $a_k(t)$ reales forman un espacio vectorial sobre \mathbb{C} . ¿Qué sucede con la ecuación inhomogénea:

$$a_n(t) \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \dots + a_1(t) \frac{d}{dt} y(t) + a_0(t) y(t) = f(t)$$

con $f(t)$ no idénticamente nula?

10. Los espacios vectoriales tiene algunas propiedades elementales comunes, independientemente de qué son exactamente sus vectores. Considere \mathbb{V} un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , $k \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Probar:
- $\mathbf{0}$, vector nulo de \mathbb{V} , es único.
 - $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ su inverso aditivo es único.
 - $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
 - $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$
 - $\forall v \in \mathbb{V}$ se tiene $(-1)v = -v$, siendo $-v$ el inverso aditivo de v .
11. En el espacio de matrices complejas $\mathbb{C}^{n \times n}$, sobre \mathbb{R} , ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios?
- Las matrices reales, $A = A^*$ (la matriz que se obtiene conjugando los elementos de A).
 - Las matrices simétricas, $A = A^T$ (con A^T corresponde a la matriz transpuesta).
 - Las matrices hermíticas $A = A^\dagger$ ($A^\dagger = (A^*)^T$).
 - Las matrices de traza nula (los elementos diagonales suman a cero), $\text{Tr}A = 0$.
12. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio de las funciones reales $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son subespacios sobre \mathbb{R} ?
- Las funciones derivables.
 - Las funciones crecientes.
 - Las funciones que se anulan en 0.
 - Las funciones tales que $f(x) \leq f(2x)$.
 - Las funciones tales que $f(1) = 5 f(4)$.
13. Sean S y T subconjuntos del espacio vectorial V , probar si son verdaderos o falsos:
- Un subconjunto de S es subespacio vectorial de V si y sólo si $\bar{S} = S$
 - Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\bar{S} = \bar{T}$
 - Si S y T son subconjuntos de V , entonces $\overline{S \cap T} \subseteq \bar{S} \cap \bar{T}$. Dar un ejemplo en el que $\overline{S \cap T} \neq \bar{S} \cap \bar{T}$
14. Sean S y T subespacios vectoriales de V . Probar que la intersección $S \cap T$ es también un subespacio vectorial de V . ¿Y $S \cup T$?
15. Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas para S, T, U , subespacios vectoriales de un espacio vectorial V :
- $S \cap (U + T) = (S \cap U) + (S \cap T)$
 - $S + (U \cap T) \subseteq (S + U) \cap (S + T)$
16. Sean U y W subespacios de V . Probar que $V = U \oplus W$ si y sólo si para cualquier vector $v \in V$ existen vectores únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.