Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2024

Práctica 0 - Repaso, Grupos, Anillos y Cuerpos

1. Calcule el determinante de las siguientes matrices:

   a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   c)
$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

2. Calcule la inversa de las siguientes matrices,

   a)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

   b)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

3. calcule el siguiente producto de una matriz por un vector:
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =?,$$

4. Resuelva el sistema de ecuaciones lineales(es decir, decida si tiene o no tiene solución, o si tiene infinitas soluciones):
$$x + 3y + z = 0, \quad 2x + 3y + z = 3, \quad x + 3y + 4z = 1.$$

5. Reescriba un número complejo $z = x + iy$ en coordenadas polares, para llegar a $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ donde (r, θ) son las coordenadas polares. Para el resultado anterior implemente la fórmula de Euler.

6. Con $z = x + iy$ y $w = a + ib$, efectúe las siguientes operaciones en los complejos, $w.z$ y z/w.

7. Demuestre que el conjunto de los números enteros con la suma usual forman una estructura de grupo. ¿Es abeliano? ¿Qué sucede si en lugar de la suma consideraramos producto usual?

8. Probar que los siguientes conjuntos, con las operaciones señaladas, forman grupos y determinar si son o no abelianos.

a) El conjunto de todos los números complejos de módulo 1, con el producto usual entre complejos.

b) El conjunto de las matrices complejas unitarias de $n \times n$ de determinante igual a 1 con el producto usual de matrices ($\mathrm{SU}(n)$).

c) El conjunto de matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

con el producto usual de matrices ($\mathrm{SO}(2)$).

d) $\mathbb{Z}_n$ con la operación suma.

9. Sea $F = \{f_i, i = 1, 2, ..., 6\}$ el conjunto de funciones biyectivas de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ en sí mismo, definidas por

$$f_1(x) = \frac{x}{x-1} \qquad f_2(x) = \frac{1}{x} \qquad f_3(x) = x \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_5(x) = \frac{x-1}{x} \qquad f_6(x) = 1 - x$$

a) Considere como operación binaria la operación composición de funciones $f \circ g = f(g(x))$. Completar la tabla composicón:

$\circ$	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

b) Probar que F tiene estructura de grupo respecto de $\circ$. ¿El grupo es abeliano?

c) ¿Qué puede mencionar acerca de las filas y columnas de la tabla?

d) ¿Qué relación puede establecer entre este grupo y $\mathbb{Z}_3$?

10. Describir las operaciones de simetría que dejan invariante la molécula trigonal plana de trifluoruro de boro (BF_3). Verificar que satisfacen un grupo. ¿Cuál es el orden del grupo de simetría de esta molécula?

11. Describir el grupo de simetría de un conjunto de tres elementos(el grupo de permutación de tres elementos distintos).
¿Encuentra alguna semejanza entre los grupos descritos en en los ejercicios 3. 4. y 5.?

12. Una traslación T en $\mathbb{R}^2$ sobre un elemento $\vec{x} = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ está dada por la acción:

$$T_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a} = (x_1 + a_1, x_2 + a_2)$$

donde $\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ es arbitrario. Mostrar que el conjunto de las traslaciones $\{T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\}$ forma un grupo abeliano con la composición de traslaciones.

13. Sea $\{G, \cdot\}$ un grupo:

    a) Demostrar que el elemento neutro o identidad es único.

    b) Demostrar que el inverso de todo elemento $g \in G$ respecto de $\cdot$ es único.

14. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos equipados con operaciones binarias poseen estructura de anillo.

    a) Los números enteros con la suma y el producto usuales.

    b) Los números irracionales con la suma y el producto usuales.

    c) Los pares ordenados de números enteros con la suma $(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$ y la multiplicación definida por $(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

15. Demostrar que las matrices reales 2×2, con la suma y el producto usuales de matrices, determinan un anillo con identidad que es no conmutativo.

16. Sea **A** un anillo con las operaciones $+$ y $\times$, y sean $a, b, c \in A$. Demostrar:

    a) $a \times 0 = 0 \times a = 0$, donde 0 es el elemento neutro de $+$

    b) $(-a) \times b = a \times (-b) = -(a \times b)$

17. Construir las tablas de las operaciones binarias de adición y producto que permitan darle estructura de cuerpo a conjuntos cualesquiera de:

    a) dos elementos;

    b) tres elementos.