Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2020

Práctica 9 - Tensores.

1. Sea $V(\mathbb{R})$ un espacio vectorial de dimensión 2. Considere $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2\}$, la base canónica de un espacio vectorial, y $\mathcal{B}_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ otra base del mismo espacio definida por $\epsilon_1 = e_1$ y $\epsilon_2 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$.

   a) Hallar la matriz de cambio de base $S = [1]_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_0}$ que conecta las coordenadas de cualquier vector $v \in V(\mathbb{R})$ expresado en la base $\mathcal{B}_1$ con las del mismo vector en la base $\mathcal{B}_0$

   b) Determinar el tensor métrico $g'_{ij} = (\epsilon_i, \epsilon_j)$ en la nueva base y verificar que $g'_{ij} = S_i^m S_j^n g_{mn}$. Calcular además las componentes de $(g')^{ij}$

   c) Construir la base dual $\mathcal{B}_1^*$ de $\mathcal{B}_1$ en términos de los elementos de la base dual $\mathcal{B}_0^*$ de $\mathcal{B}_0$.

   d) Expresar el vector $v = e_1 + 2e_2$ en términos de los elementos de la base $\mathcal{B}_1$ y verificar que $v = x^\mu_{\mathcal{B}_0} e_\mu = x^\mu_{\mathcal{B}_1} \epsilon_\mu$. Hallar las componentes del vector $(x_{\mathcal{B}_1})_\mu$ del vector dual a v e interpretar su significado.

   e) Expresar la forma lineal $\Omega \in V(\mathbb{R})^*$ definida por $\Omega(e_1) = 1$ y $\Omega(e_1 - e_2) = -1$ en las bases duales $\mathcal{B}_0^*$ y $\mathcal{B}_1^*$. Verificar que $\Omega = (\omega_{\mathcal{B}_0^*})_\mu (e^*)^\mu = (\omega_{\mathcal{B}_1^*})_\mu (\epsilon^*)^\mu$ y que $\Omega(v) = (\omega_{\mathcal{B}_0^*})_\mu (x_{\mathcal{B}_0})^\mu = (\omega_{\mathcal{B}_1^*})_\mu (x_{\mathcal{B}_1^*})^\mu$

2. Sea $\mathcal{B}_0 = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^2$. Y sea $\mathcal{B}_1 = \{\epsilon_1, \epsilon_2\}$ otra base definida por $\epsilon_1 = \cos(\theta)e_1 - \sin(\theta)e_2$ y $\epsilon_2 = \sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2$. En estas nuevas condiciones repetir los inciso *a)*, *b)* y *d)* del inciso anterior.

3. Simplificar las siguientes expresiones realizando las sumas indicadas, donde los índices toman los valores posibles 1, 2 y 3.

   a) δ_i^i

   b) $\epsilon_{ijk}\delta_n^k$

   c) $\epsilon_{ijk}\delta_s^i\delta_m^j$

   d) $a_{ij}\delta_n^j$

   e) $\epsilon_{ijk}A^iA^jA^k$

   f) $A^iB_j\delta_i^j - B_mA^n\delta_n^m$

   donde $\delta_{\mu\nu} = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $\delta_{\mu\mu} = 1$ para todo valor de μ y ϵ_{ijk} es de Levi - Civita el tensor completamente antsimétrico.

4. La delta de Kronecker generalizada se define como el determinante de $p \times p$:

$$\delta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p} = \begin{vmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \delta^{\mu_1}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_p} \\ \delta^{\mu_2}_{\nu_1} & \delta^{\mu_2}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_2}_{\nu_p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{\mu_p}_{\nu_1} & \delta^{\mu_p}_{\nu_2} & \cdots & \delta^{\mu_p}_{\nu_p} \end{vmatrix}$$

   donde $\delta^\mu_\nu = 0$ si $\mu \neq \nu$ y $\delta^\mu_\mu = 1$ para todo valor de μ.

   a) Mostrar que: $\epsilon_{ijk} = \delta^{123}_{ijk}$

   b) Mostrar que: $\epsilon^{ijk} = \delta^{ijk}_{123}$

   c) Verificar que: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$

   d) Mostrar que: $\epsilon^{ijk}\epsilon_{imn} = \delta^j_m\delta^k_n - \delta^j_n\delta^k_m$

   e) A partir de la delta de Kronecker generlalizada, deducir los posible valores de ϵ_{ijkn}

5. Considere un espacio en el que el tensor métrico está definido de forma tal que:

$$g_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

   Mostrar que:

   a) $\epsilon^{ij}\epsilon_{ij} = 2!$

   b) $\epsilon^{ijk}\epsilon_{ijk} = 3!$

   c) Predecir el resultado de $e^{i_1i_2\ldots i_n}e_{i_1i_2\ldots i_n}$

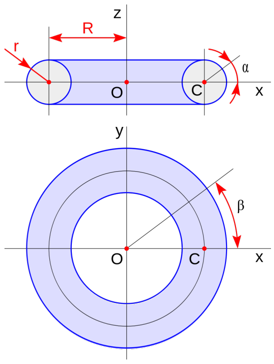

Figura 1: Toroide

6. Simplificar las siguientes expresiones:

   a) $(A_{ijkl} + A_{jkli} + A_{klij} + A_{lijk})\, x_i x_j x_k x_l$

   b) $(P^{ijk} + P^{jki} + P^{kij})\, x_i x_j x_k$

   c) $\dfrac{\partial x_i}{\partial x_j}$

   d) $a_{ij} \dfrac{\partial^2 x_i}{\partial \chi_t \partial \chi_s} \dfrac{\partial x_j}{\partial \chi_r} - a_{mi} \dfrac{\partial^2_m}{\partial \chi_t \partial \chi_s} \dfrac{\partial x_i}{\partial \chi_r}$

7. Usar la notación de índices para verificar la siguiente identidad vectorial

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

   donde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$.

8. Verifica que bajo la transformación lineal de coordenadas $\tilde{x}^i = R^i_j x^j$ que el operador $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ transforma en forma covariante $\tilde{\partial}_i = (R^{-1})^j_i \partial_j$. Mostrar luego que la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{F} = \partial_i \phi^i$ de un campo $\mathbf{F} = \phi^i e_i$ es una cantidad escalar.

9. Demostrar que, en general, el tensor métrico en un sistema de coordenadas curvilíneo no ortogonal viene dado por:

$$g_{\mu\nu}(\vec{r}) = \frac{d\vec{r}}{dx^\mu} \cdot \frac{d\vec{r}}{dx^\nu}$$

   donde "$\cdot$" denota el producto interno en el espacio vectorial. Luego, partiendo del sitsema de coordenadas euclídeo bidimensional, cosntuir el tensor métrico para los siguientes casos:

   a) R^2 usando coordenadas polares: $x = r\ \cos\phi$ y $y = r\ \sin\phi$

   b) R^2 usando el sistema de coordenadas parabólicas: $x = u\ v$ y $y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$

10. Calcular el tensor métrico sobre una superficie toroidal (ver figura).

11. Las coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z) son coordenadas curvilíneas ortogonales. Las coordenadas v son el ángulo asintótico de los cilindros hiperbólicos confocales simétricos sobre el eje $\check{\imath}$. Las coordenadas u son cilindros elípticos confocales centrados en el origen. El mapeo viene dado por las transformaciones

$$x = a\ \cosh u\ \cos v \qquad y = a\ \sinh u\ \sin v \qquad z = z$$

   a) Dibujar algunos contornos representativos para u o v constantes, en el plano $z = 0$.

   b) Encuentra los vectores de base covariante para el nuevo sistema de coordenadas.

   c) Mostrar que los factores de escala para el tensor métrico están dados por:

$$g_{uu} = a^2(\sin^2 v + \sinh^2 u) \qquad g_{vv} = a^2(\sin^2 v + \sinh^2 u) \qquad g_{zz} = 1$$

   d) Encuentra la función de energía cinética de una partícula de masa m en este sistema de coordenadas

$$T = \frac{1}{2}\ m\ g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu$$

12. Obtener la receta para el gradiente de una función escalar en coordenadas cilíndricas.

13. Obtener la receta para la divergencia de un campo vectorial en coordenadas cilíndricas.

14. Considere el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Calcular el símbolo de Christoffel en:

   a) las coordenadas cilíndricas ($x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$, $z = h$)

   b) coordenadas esféricas

   Para cada sistema de coordenadas, obtener las derivadas covariantes.