Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2020

Práctica 8 - Espacios Unitarios.

1. Determinar cuáles de las siguientes fórmulas definen un producto interno hermítico sobre el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$.

   a) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1 + 2 v_2 w_2$

   b) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = v_1 w_1^* + v_2 w_2^*$

   c) $\langle (v_1, v_2), (w_1, w_2) \rangle = 2 v_1 w_1^* + (1+i) v_1 w_2^* + (1-i) v_2 w_1^* + 3 v_2 w_2^*$

2. Probar la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la desigualdad triangular en el caso de un producto interno hermítico.

   ¿Que condición deben cumplir dos vectores para ser paralelos u ortogonales en un espacio vectorial complejo?

3. En $\mathbb{C}^{n\times n}$, $\langle A, B\rangle = Tr(A^\dagger B) = Tr(BA^\dagger)$. Verificar que las matrices de Pauli son ortogonales con este producto. ¿Son ortonormales?

4. Formular las condiciones necesarias para que la función peso $w(x)$ garantice que la integral

   $$\langle f, g\rangle = \int_a^b \mathrm{d}x \, w(x) \; f(x)^* \; g(x)$$

   define un producto interno sobre el espacio de las funciones complejas y continuas en $[a, b]$.

5. *a)* Encontrar una base ortogonal y una ortonormal (con el producto interno usual en $\mathbb{C}^3$) para el subespacio S generado por $(1, i, 1)$ y $(1+i, 0, 2)$.

   b) Determinar el complemento ortogonal de S, $S^\perp$.

   c) Encontrar las proyecciones de $(1, 1, 1)$ sobre S y $S^\perp$

6. Considerar el espacio vectorial $\mathbb{C}[-\pi, \pi]$ de las funciones complejas continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, con producto interno definido por $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t \, f^*(t) g(t)$.

   a) Verificar que (f, g) es un producto interno.

   b) Calcular $(1 + e^{it}, e^{it})$ y verificar la desigualdad de Schwartz.

   c) Mostrar que las funciones e^{ikt}, con k entero, son ortogonales con el producto interno anterior. ¿Son también ortonormales?

7. *a)* Determinar el valor de α para que, en la base canónica de $\mathbb{C}^{2\times 2}$, la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & i \\ \alpha & -2 \end{pmatrix}$ represente:

      1) un operador normal;

      2) un operador autoadjunto.

   b) Hallar, en cada caso, los autovalores de A y la base ortonormal de $\mathbb{C}^2$ en la que A es diagonal.

8. Una matriz se dice positiva si la forma "bilineal" hermíticamente simétrica que representa es definida positiva. Mostrar que, en $\mathbb{C}^2$, con el producto escalar unitario usual,

   a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ lo es;

   b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ no lo es.

9. Matrices unitarias como exponenciales de matrices hermíticas:

   a) Muestre que si H es una matriz hermítica, $U = \exp(i\ tH)$ es una matriz unitaria para todo valor real de t.

   b) Demuestre que si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria, existe una familia de matrices hermíticas H_k que satisfacen $U = \exp(i\ tH_k)$. ¿Cómo se relacionan las Hk entre sí?

   c) Opcional: Muestre que para $A, H \in C^{n\times n}$, con H una matriz hermítica, $\exp(i\ H)$ A $exp(-i\ H) = A+i[H,A]-\frac{1}{2}[H,[H,A]]+\cdots = \exp(i[H,\cdot])A$. (Observe que $[H,\cdot]A = H.A-A.H$ es un operador lineal sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$)

10. La descomposición en valores singulares (DVS) de una matriz real o compleja es una factorización de la misma con muchas aplicaciones en estadística y otras disciplinas. DVS consiste en factorizar una matriz A de $m \times n$ (rango de A mayor que 0) como:

$$A = U\ \Sigma\ V$$

donde U es una matriz con columnas ortogonales de $m \times n$, V es una matriz ortogonal de $n \times n$, y Σ una matriz "diagonal" de $n \times n$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Los elementos de matriz σ_i sobre la diagonal de Σ, se denominan valores singulares de A.

   a) Mostrar que la matriz $\mathcal{A} = A^\dagger A$ es una matriz hermítica de $n \times n$.

   b) Mostrar que los autovalores de la matriz $\mathcal{A}$ son números reales mayores o iguales a cero.

   c) Sean $[v_1]$ y $[v_2]$ autovectores columna de $\mathcal{A}$ asociados a autovalores λ_1 y λ_2, respectivamente, tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Mostrar que $[v_i]^\dagger[v_j] = 0$.

   d) Mostrar que si $[v_1]$ y $[v_2]$ están asociados a autovalores λ_1 y λ_2 no nulos, tales que $\lambda_1 \neq \lambda_2$, entonces
$$[u_1]^\dagger[u_2] = [u_2]^\dagger[u_1] = 0 \text{ y } [u_1]^\dagger[u_1] = [u_2]^\dagger[u_2] = 1$$
   con $[u_i] = A\ [v_i]/\sqrt{\lambda_i\ ([v_i]^\dagger[v_i])}$.

   e) Sean $[v_1], [v_2], \ldots, [v_n]$ una base de autovectores columna de $\mathcal{A}$ ($[v_i]^\dagger[v_j]$ igual a 1 si $i = j$ e igual a 0 en caso contrario) con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ tales que $\lambda_i \neq 0$ si $i = 1, 2, \ldots, r$ y $\lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.
   Sean $[u_1], [u_2], \ldots, [u_n]$ tales que $[u_i] = Av_i/\sqrt{\lambda_i}$ si $i \leq 0$ y $[u_i] = 0$ si $i = r+1, \ldots, n$
   Mostrar que:
$$A = \Big([u_1], [u_2], \ldots, [u_n]\Big) D \Big([v_1], [v_2], \ldots, [v_n]\Big)^\dagger$$
   donde
$$D = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_r} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

11. Hallar la descomposición en valores singulares de las siguientes matrices:

   a) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ *b*) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *c*) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

12. Descomposición polar: $A = U\ P$

    a) Muestre que para cualquier matriz invertible A, la matriz $P = \sqrt{A^\dagger A}$ es no singular y que $U = AP^{-1}$ es una matriz unitaria.

    b) Construya la descomposición polar de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$$

13. Muestre que si v_0 tiene proyección no nula sobre el subespacio de autovalor máximo de un operador $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hermítico, la sucesión $v_{k+1} = A\ v_k/|v_k|$ converge exponencialmente a un autovector con autovalor máximo.