Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - 2020

Práctica 6 - Formas Bilineales y Formas Cuadráticas.

1. Considerar las siguientes funciones definidas para los vectores $\mathbf{x} = (a_1, a_2)$; $\mathbf{y} = (b_1, b_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

   a) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1$

   b) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a_1 - b_1)^2 - a_2 b_2$

   c) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (a_1 + b_1)^2 - (a_1 - b_1)^2$

   d) $A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_1 b_2 - a_2 b_1$

   Determinar cuáles de estas funciones son formas bilineales de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Para aquellas que lo sean, determinar la matriz que las representa en la base canónica del espacio y escribirlas en notación matricial. Indicar, además, si tales formas bilineales son simétricas.

2. Verificar si las siguientes aplicaciones $A : P_n(\mathbb{R}) \times P_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ son formas bilineales:

   a) $A(p, q) = p(1) + q(1)$.

   b) $A(p, q) = p(1)\ q'(1)$.

   c) $A(p, q) = \int_0^1 \mathrm{d}t\ p(t)\ q(t)$

   Determinar la matriz que la representa en la base canónica.

3. Sea V el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ generado por $\{\sin(x), \cos(x)\}$. Encontrar la matriz que representa a la forma bilineal $A(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}t f(t) g(t)$ en la base dada.

4. Mostrar que $f(A, B) = n\mathrm{Tr}AB - \mathrm{Tr}A\,\mathrm{Tr}B$ define una forma bilineal en $\mathbb{C}^{n\times n}$. ¿Es simétrica? ¿Es singular? (Sugerencia: aplicarla a la matriz identidad y a otra matriz arbitraria). Mostrar que, en cambio, es no singular si se la restringe al subespacio de matrices de traza nula.

5. Las matrices A y B sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ son congruentes si $B = P^{\mathrm{T}} A P$ para alguna matrices invertible P sobre $\mathbb{K}$. ¿Cuáles de las siguientes matrices simétricas son congruentes con la matriz identidad sobre $\mathbb{R}$? ¿Y sobre $\mathbb{C}$?

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad\qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Considere la forma bilineal $A : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A((x, y); (u, v)) = 2xu - 3xv + yv$.

   a) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

   b) Encuentre su matriz asociada en la base $\mathcal{B}' = \{(2, 1), (1, -1)\}$.

   c) Encuentre la matriz de cambio de base P con conecta $\mathcal{B}'$ con $\mathcal{B}$, y verifique que $A_{\mathcal{B}'} = P^{\mathrm{T}} A_{\mathcal{B}} P$.

   d) Escribir a A como suma de una parte simétrica y una antisemétrica. Encontrar las matrices asociadas con cada una de estas partes en la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

7. a) Mostrar que la función $\psi(A, B) = \mathrm{Tr}(AB^{\mathrm{T}})$ es una forma bilineal simétrica definida positiva sobre $Mat_n(\mathbb{R})$, el espacio vectorial de todas las mastrices reales de $n \times n$.

   b) Mostrar que el mapeo $A \to \mathrm{Tr}(A^2)$ es una forma cuadrática sobre $Mat_n(\mathbb{R})$. Determinar su rango y su signatura.

8. Las siguientes expresiones definen formas cuadráticas en $\mathbb{R}^2$. Encontrar las correspondientes formas bilineales simétricas:

   a) x^2

b) xy

c) $2x^2 - \frac{1}{3}xy$

d) $4x^2 + 6xy - 3y^2$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar en cada caso la matriz asociada en la base $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$. ¿Cuáles de ellas son no singulares?

9. Dadas las formas cuadráticas:

   a) x_1x_2 en $\mathbb{R}^2$

   b) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$ en $\mathbb{R}^3$

   llevarlas a su forma canónica completando cuadrados y usando el método de Jacobi. Determinar sus índices de inercia.

10. Llevar las siguientes formas cuadráticas definidas positivas a su forma canónica usando la descomposición de Cholesky.

    a) $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2$

    b) $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + x_3^2$

    c) $3x_1^2 + x_1x_2 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 + 2x_3x_4 + 3x_4^2$