# Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas

## Práctica 1 - Espacios y subespacios vectoriales.

1. Considere los siguientos conjuntos de 3-úplas $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Determine cuáles de estos casos son espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{R}$.

   *a)* $x_1 > 0$

   *b)* $x_1 = 0$ o $x_2 = 0$

   *c)* $x_1 + x_2 = 0$

   *d)* $x_1 + x_2 = 1$

   *e)* $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ y $x_1 - x_3 = 0$

2. Probar que $\mathbb{R}^2$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con la suma $+_{(2,1)}$ y el producto por escalares $\cdot_{(2,1)}$ definidas de la siguiente forma:

$$(x_1, y_1) +_{(2,1)} (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 - 2, y_1 + y_2 - 1)$$

$$r \cdot_{(2,1)} (x, y) = r \cdot (x - 2, y - 1) + (2, 1)$$

3. Determinar si constituyen espacios vectoriales ($\mathbb{V}$ es el conjunto de vectores, $\mathbb{F}$ es el cuerpo y $\lambda \in \mathbb{F}$):

   *a)* $\mathbb{V} = \{x_i / x_i \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$; donde la suma de vectores está definida por $x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2$ (el producto usual de números reales) y el producto externo es $\lambda \odot x = x^\lambda$.

   *b)* $\mathbb{V} = \{x_i / x_i \in \mathbb{R}^+\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda / \lambda \in \mathbb{C}\}$; donde $x_1 \oplus x_2 = x_1 x_2$ y $\lambda \odot x = \lambda^2 x$.

   *c)* $\mathbb{V} = \{x / x \in \mathbb{C}\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda / \lambda \in \mathbb{C}\}$; con la suma usual entre complejos como $\oplus$ y $\lambda \odot x = \mathrm{Re}(\lambda) x$.

   *d)* $\mathbb{V} = \{x / x = (x_1, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{F} = \{\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$; con la suma usual de pares ordenados como $\oplus$ y el producto externo definido por $\lambda \odot x = (\lambda x_1, x_2)$.

4. Muestre que el conjunto de soluciones $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ del sistema de ecuaciones $AX = 0$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz constante es un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Sucede lo mismo con las soluciones de $AX = B$ , con $B$ una matriz columna no nula?

5. $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ es el grupo de las matrices $n \times n$ con elementos en $\mathbb{R}$. Mostrar que sobre el cuerpo $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ tiene estructura de espacio vectorial, con la suma usual de matrices y producto usual de un número real por una matriz.

6. Demuestre que el conjunto de las matrices hermíticas $H_n = \{M \in \mathbb{C}^{n \times n} / M = M^\dagger\}$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo de los reales pero no sobre los complejos. **Nota:** $M^\dagger$ se obtiene a partir la transposición de $M$ y la conjugación de todos sus elementos.

7. ¿El conjunto $V$ de las matrices reales singulares de $n \times n$, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con la suma usual de matrices y producto usual de un número real por una matriz, tiene estructura de espacio vectorial?

8. No sólo los conjuntos de n-túplas o matrices forman espacios vectoriales sobre algún cuerpo. Estudiar los siguientes casos de conjuntos funciones:

   *a)* El conjunto de las funciones reales periódicas en en intervalo $[0, 1]$, $V = \{f / f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = f(1)\}$ con las operaciones usuales de suma y producto forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

   *b)* $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con derivada segunda continua$\}$ sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ con la suma usual de funciones y producto usual de una función por un número real.

   *c)* $\mathbb{V}$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales de grado $\leq n$, sobre el cuerpo $\mathbb{R}$, con la suma usual de polinomios y el producto usual de un polinomio por un escalar.

*d*) Las soluciones de la ecuación diferencial ordinaria (la incógnita $y$ depende de una única variables) lineal (las derivadas de $y$ no aparecen elevedas a ninguna potencia) homogéneo (no hay términos independientes de $y(t)$):

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \ldots + a_1(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_0(t)y(t) = 0$$

de coeficientes $a_k(t)$ reales forman un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. ¿Qué sucede con la ecuación inhomogénea:

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \ldots + a_1(t)\frac{d}{dt}y(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$$

con $f(t)$ no idénticamente nula?

9. Sea $V = \mathbb{R}^\infty$, el conjunto de las infinito-uplas de la forma $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, donde $x_i \in \mathbb{R}$ , con operación $\oplus$ entre elementos de $V$ definida tal que, si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, $x \oplus y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots)$, y operación producto externo definida por $\lambda \odot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$?

10. Los espacios vectoriales tiene algunas propiedades elementales comunes, independientemente de qué son exactamente sus vectores. Considere $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{K}$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$. Probar:

    *a*) $\mathbf{0}$, vector nulo de $\mathbb{V}$, es único.
    *b*) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$ su inverso aditivo es único.
    *c*) $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$, $0\mathbf{v} = \mathbf{0}$
    *d*) $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{0} = \mathbf{0}$

11. En el espacio de matrices complejas $\mathbb{C}^{n\times n}$, sobre $\mathbb{R}$ , ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos son subespacios?

    *a*) Las matrices reales, $A = A^*$ (la matriz que se obtiene conjungado los elementos de $A$).
    *b*) Las matrices simétricas, $A = A^T$ (con $A^T$ corresponde a la matriz transpuesta).
    *c*) Las matrices hermíticas $A = A^\dagger$ ($A^\dagger = (A^*)^T$).
    *d*) Las matrices de traza nula (los elementos diagonales suman a cero), $\mathrm{Tr}A = 0$.

12. ¿Cuáles de los siguientes subconjuntos del espacio de las funciones reales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son subespacios sobre $\mathbb{R}$?

    *a*) Las funciones derivables.
    *b*) Las funciones crecientes.
    *c*) Las funciones que se anulan en 0.
    *d*) Las funciones tales que $f(x) \leq f(2x)$.
    *e*) Las funciones tales que $f(1) = 5\ f(4)$.

13. Sean $S$ y $T$ subconjuntos del espacio vectorial $V$, probar si son verdaderos o falsos:

    *a*) Un subconjunto de $S$ es subespacio vectorial de $V$ si y sólo si $\bar{S} = S$
    *b*) Si $S \subseteq T \subseteq V$, entonces $\overline{S} = \overline{T}$
    *c*) Si $S$ y $T$ son subconjuntos de $V$, entonces $\overline{S \cap T} \subseteq \overline{S} \cap \overline{T}$. Dar un ejemplo en el que $\overline{S \cap T} \neq \overline{S} \cap \overline{T}$

14. Sean $S$ y $T$ subespacios vectoriales de $V$. Probar que la intersección $S \cap T$ es también un subespacio vectorial de $V$. ¿Y $S \cup T$?

15. Estudiar si las siguientes afirmaciones son verdaderas:

    *a*) $S \cap (U + T) = (S \cap U) + (S \cap T)$
    *b*) $S + (U \cap T) \subset (S + U) \cap (S + T)$

16. Sean $U$ y $W$ subespacios de $V$. Probar que $V = U \oplus W$ si y sólo si para cualquier vector $v \in V$ existen vectores únicos $u \in U$ y $w \in W$ tales que $v = u + w$.