Álgebra Lineal: Aplicaciones Físicas - Curso 2018

Carreras: Licenciatura en Física (optativa) – Profesorado en Física

I - Introducción

Sistemas algebraicos abstractos. Propiedades de operaciones binarias. Grupo. Anillo. Cuerpo. Funciones. Morfismos entre sistemas algebraicos.

II – Espacios vectoriales

Motivación geométrica. Definición. Propiedades. Combinación lineal de vectores. Dependencia e independencia lineal. Bases. Dimensión de un espacio vectorial. Espacios finito- e infinito-dimensionales. Subespacios. Operaciones con subespacios. Bases ordenadas y coordenadas de un vector. Cambio de base.

III – Funciones lineales de argumento vectorial

Formas lineales. Transformaciones lineales. Representación de transformaciones lineales mediante matrices. Operaciones con transformaciones lineales. Imagen y espacio nulo. Rango y nulidad. Monomorfismos, Epimorfismos e Isomorfismos. Inversas a izquierda y derecha. Operadores lineales. Potencias y funciones de operadores lineales. Inversas de operadores y matrices.

IV – Subespacios invariantes y diagonalización

Subespacios invariantes. Matriz de un operador lineal con subespacios invariantes. Autovectores y autovalores. Espacios propios. Determinación de autovalores y autovectores en dimensión finita: ecuación característica. Transformaciones de coordenadas. Matriz asociada con un cambio de base. Transformación de los coeficientes de una forma lineal y de la matriz de un operador linieal. Semejanza. Diagonalización. Aplicaciones. Evaluación de potencias y funciones de operadores lineales.

V – Teorema de Jordan

Álgebra de polinomios. Forma canónica de Jordan. Demostración y ejemplos de aplicación. Evaluación de potencias y exponenciales de matrices no diagonalizables. Teorema de Cayley-Hamilton.

VI – Formas bilineales y cuadráticas

Formas bilineales. Representación general en dimensión finita. Transformación de la matriz asociada frente a cambios de base. Formas cuadráticas. Reducción a la forma canónica. Base canónica de una forma bilineal. Construcción de la base canónica. Operadores lineales adjuntos con respecto a una forma bilineal simétrica. Isomorfismo entre espacios equipados con formas bilineales. Formas bilineales y cuadráticas en espacios reales: teorema de inercia. Formas multilineales.

VII – Espacios euclídeos y pseudo-euclídeos

Definición. Producto escalar en espacios reales. Conceptos métricos. Ortogonalidad. Teorema de Pitágoras generalizado y desigualdades triangulares. Bases ortogonales.

Proyectores ortogonales. Método de Gram-Schmidt. Matriz de Gram. Aplicaciones. Isomorfismo euclídeo. Bases ortogonales. Operadores adjuntos en espacios euclídeos. Isometrías. Espacios pseudo-euclídeos y transformaciones de Lorentz: el espacio de Minkowski.

VIII – Espacios unitarios

Formas hermíticas. Formas cuadráticas hermíticas. Vectores conjugados y bases canónicas. Operadores lineales adjuntos. Producto escalar en espacios complejos. Espacios unitarios. Espacios de Hilbert. Conceptos métricos. Desigualdad de Schwartz. Bases ortonormales en espacios unitarios de dimensión finita. Operadores adjuntos en espacios unitarios. Transformaciones unitarias. Operadores normales. Teorema de diagonaliación de operadores normales. Valores singulares. Descomposición en valores singulares. Aplicaciones. Norma de transformaciones lineales. Resolución de sistemas lineales. Pseudoinversa. Condicionamiento de sistemas lineales. Representación polar de operadores en espacios unitarios.

IX - Tensores

Espacio dual. Bases duales. Intercambiabilidad de un espacio y su dual. Doble dual. Transformaciones de coordenadas en un espacio y en su dual. Duales de espacios euclídeos. Formas multilineales y tensores. Transformaciones de los coeficientes de las formas multilineales frente a cambios de coordenadas. Tensores. Grado, contra- y covarianza. Propiedades de tensores. Operaciones con tensores. Contracción. Tensores simétricos y antisimétricos. Tensores en espacios euclídeos. Tensor métrico. Tensores y pseudo-tensores cartesianos. Producto tensorial de espacios vectoriales. Campos tensoriales. Cambios de coordenadas generales. Cálculo tensorial en coordenadas polares. Derivada covariante. Símbolos de Christoffel.

Bibliografía

G. E . Shilov – Linear Algebra – Ed. Dover

K. Hoffman y R. Kunze – Álgebra Lineal – Ed. Prentice-Hall Latinoamericana

I. M. Gelfand – Lectures on Linear Algebra – Ed. Dover

L. A. Santaló – Vectores y Tensores con sus Aplicaciones – Ed. EUDEBA

B. F. Schutz – A First Course in General Relativity – Ed. Cambridge University Press