Práctica 9 - Espacio dual y productos tensoriales

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Sea $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ la base canónica de un espacio vectorial $\mathbb{V}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ otra base dada por $e'_1 = e_1$ y $e'_2 = (e_1 + e_2)/\sqrt{2}$.

a)Hallar la matriz de cambio de base $S = [\mathbf{1}]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}$.

b)Determinar el tensor métrico $g'_{ij} = (e'_i, e'_j)$ en la nueva base y verificar que $g'_{ij} = S^k_i S^l_j g_{kl}$. Calcular además las componentes de $(g')^{ij}$.

c)Construir la base dual de $\mathcal{B}'$ en términos de los elementos de la base dual de $\mathcal{B}$.

d)Expresar el vector $v = e_1 + 2e_2$ en términos de los elementos de la base $\mathcal{B}'$ y verificar que $v = x^{\mu}_{\mathcal{B}} e_{\mu} = x^{\mu}_{\mathcal{B}'} e'_{\mu}$. Hallar las componentes covariantes de $x^{\mathcal{B}'}_{\mu}$ e interpretar su significado.

e)Expresar la forma lineal $\omega \in (\mathbb{V}_{\mathbb{R}})^*$ definida por $\omega(e_1) = 1$, $\omega(e_1 - e_2) = -1$ en las bases $\mathcal{B}^*$ y $(\mathcal{B}')^*$ y verificar que si $\omega = f^{\mathcal{B}}_{\mu} (e^*)^{\mu} = f^{\mathcal{B}'}_{\mu} (e^{'*})^{\mu}$, $\omega(v) = f^{\mathcal{B}}_i x^{\mu}_{\mathcal{B}} = f^{\mathcal{B}'}_i x^{\mu}_{\mathcal{B}'}$

Ej. 2 — Para el espacio $\mathbb{V} = \mathbb{R}_2[(-1, 1)]$ de los polinomios de grado 2 en el intervalo $(-1, 1)$ con el producto interno definido por $(p, q) = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$,

a)determinar la base dual de $\mathbb{V}^*$ asociada a la base de monomios $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

b)Calcular las componentes del tensor métrico g_{ij} en dicha base.

Ej. 3 — Sea R_{ijkl} un tensor 4 veces covariante sobre el espacio euclideo $\mathbb{R}^4$, que cumple $R_{ijkl} = R_{klij} = -R_{ijlk} = -R_{jikl}$. Usando el tensor metrico, construya todos los escalares posibles. Sea T_{ij} otro tensor euclideo sobre el mismo espacio tal que $T_{ij} = T_{ji}$. Usando el tensor métrico para subir y bajar índices, construya todas las posibles ecuaciones covariantes *lineales* en R_{ijkl} y T_{ij}.

Ej. 4 — Calcule los siguientes productos tensoriales de operadores, construya su representación matricial en la base producto tensorial y halle sus autovectores y autovalores:

$$a)\sigma_z \otimes \sigma_z \qquad b)\sigma_z \otimes \sigma_x \qquad c)\mathbf{1}_2 \otimes \sigma_x \qquad d)\sigma_x \otimes \mathbf{1}_2$$

Ej. 5 — Sea $H = \sigma_x \otimes \sigma_x + q(\mathbf{1}_2 \otimes \sigma_z + \sigma_z \otimes \mathbf{1}_2)$ un operador sobre $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. Construya la representación matricial de H y evalue $\rho = \exp(-tH)$. Luego calcule la “traza parcial” $\mathrm{Tr}_A \rho$ sobre el segundo subespacio.

Ej. 6 — Muestre que la cantidad δ^j_i es un tensor mixto con un índice covariante y otro contravariante, y calcule δ^i_i. Muestre además que las componentes de δ^j_i son invariantes ante cualquier transformación de coordenadas.

Ej. 7 — Verifica que bajo la transformación lineal de coordenadas $(x')^k = R^k_l x^l$ el operador $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ transforma en forma covariante $\partial'_i = (R^{-1})^k_i \partial_k$. Mostrar luego que la divergencia $\nabla \cdot F = \partial_i \phi^i$ de un campo vectorial $F = \phi^i e_i$ es una cantidad escalar.

Opcionales

Ej. 8 — Sea $\mathcal{R}$ un espacio de Riemann, con tensor métrico $g_{\mu\nu}$.

a) Muestre que el operador ∂_i transforma adecuadamente cuando actúa sobre campos escalares pero no cuando lo hace sobre campos tensoriales generales.

b) Demuestre que un operador $D_\mu = \partial_\mu + \Gamma^\kappa_{\mu\nu}$

c) Muestre que si $D_\kappa g_{\mu\nu} = 0$, $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} + \Gamma^\kappa_{\nu\mu} = g^{\kappa\sigma}(g_{\mu\sigma,\nu} + g_{\nu\sigma,\mu} - g_{\mu\nu,\sigma})$.

d) Muestre que por ser un espacio de Riemann, existe un sistema de coordenadas de manera que localmente se cumpla $D_\mu = \partial_\mu$. Muestre debido a esto, $\Gamma^\kappa_{\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\mu}$.

e) Generalice las expresiones para la divergencia y rotor de un campo vectorial para coordenadas generalizadas.

Ej. 9 — El tensor de Levi Civita. Considere $\mathcal{R}$ un espacio de Riemann n-dimensional. Se define el tensor "forma de volumen n-dimensional" de ese espacio como el tensor completamente antisimétrico de tipo $(n, 0)$ tal que sus componentes satisfacen $\epsilon_{i_1\dots i_n} = \sqrt{|\det(g)|}\varepsilon_{i_1\dots i_n}$, siendo $\varepsilon_{i_1\dots i_n}$ el "símbolo de Levi Civita" ($\varepsilon_{i_1\dots i_n} = 1$).

a) Muestre que dadas dos bases *ordenadas* $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, $\epsilon^{\mathcal{B}'}_{i_1\dots i_n} = \pm\epsilon^{\mathcal{B}}_{i_1\dots i_n}$.

b) Muestre que si la anterior igualdad se cumple para el signo negativo, basta con intercambiar en la base $\mathcal{B}'$ los primeros dos elementos para construir una base $\mathcal{B}''$ que cumpla la igualdad con el signo $+$.

c) Muestre que la condición $\epsilon^{\mathcal{B}'}_{i_1\dots i_n} = \epsilon^{\mathcal{B}}_{i_1\dots i_n}$ define una relación de equivalencia entre las bases de $\mathcal{R}$.

d) Restringiendonos a bases dentro de una dada clase de equivalencia, $\epsilon_{i_1\dots i_n}$ transforma como un tensor, que se conoce como "forma de volumen de $\mathcal{R}$". Explique el motivo de este nombre.

e) De una forma general para las componentes del tensor completamentre contravariante $\epsilon^{i_1\cdots i_n}$.

f) Para $n = 3$, usando la antisimetría, construya todas las contracciones posibles del tensor $\epsilon^{ijk}\epsilon_{rst}$.

g) Opcional: Muestre que si $\omega^{i_1,\cdots i_m}$ es un tensor completamente antisimétrico de tipo $(0, m)$, el mapeo $(\cdot)^*$ definido por $\omega^*_{j_{m+1}\cdots j_n} = \frac{1}{m!}\omega^{i_1\dots i_m}\epsilon_{i_1\dots i_m\, j_{m+1}\cdots j_n}$ satisface $\omega^{**} = \omega$ (esto es, $^{(*)}$ resulta ser un operador idempotente, conocido como "estrella de Hodge"). En particular, si F_{ij} es un tensor antisimétrico en $\mathbb{R}^3$, $(F^*)^k$ transforma como un "pseudo-vector" (cambia de signo cuando transformamos entre bases no equivalentes). Muestre que si v^i y w^j son dos vectores de $\mathbb{R}^3$ y $T^{ij} = \frac{1}{2}(v^i w^j - v^j w^i)$, se cumple que $(T^*)_i = (v \times w)^i$.

Ej. 10 — Sean F, G dos campos vectoriales en $\mathbb{R}^3$ y ϕ un campo escalar. Usando las propiedades del tensor de Levi Civita, demuestre las siguientes identidades válidas en coordenadas cartesianas:

a) $\nabla \cdot (\nabla \wedge G) = 0$

b) $\nabla \wedge (\phi \wedge F) = (\nabla\phi) \wedge F + \phi\nabla \wedge F$

c) $\nabla \wedge (F \wedge G) = (\nabla \cdot G)F - (\nabla \cdot F)G + G \cdot \nabla F - F \cdot \nabla G$

d) $\nabla(F \cdot G) = (F \cdot \nabla)G + (G \cdot \nabla)F + F \wedge (\nabla \wedge G) + G \wedge (\nabla \wedge F)$

e) $\nabla \wedge (\nabla \wedge F) = \nabla(\nabla \cdot F) - \nabla^2 F$

Ej. 11 — Muestre que el "rotor" de un campo vectorial covariante F_i definido por $R_{ij} = F_{i,j} - F_{j,i}$ ($F_{i,j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$) es un tensor antisimétrico de tipo $(2, 0)$. Muestre que $R_{ij} = (\nabla \wedge F)^*_{ij}$, el "dual de Hodge" del campo vectorial rotor. Muestre que - a diferencia de $F_{i,j}$ - en un espacio de Riemann (o pseudo-Riemann) R_{ij} transforma correctamente ante transformaciones generales de coordenadas.