Práctica 8 - Espacios de Hilbert

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — *Operadores adjuntos*

1. Muestre a partir de los axiomas que definen el producto escalar unitario en espacios complejos, que en dimensión finita, para cualquier operador $\mathbf{A}$, $\mathcal{B}$, $([\mathbf{A}]_{\mathcal{B}})_{ij} = ([\mathbf{A}^\dagger]_{\mathcal{B}})^*_{ji}$, respecto de cualquier base ortonormal $\mathcal{B}$.
2. Considere ahora el operador $\mathbf{A}$ definido por sus elementos de matriz $[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}^{(0)}} = \left(\begin{smallmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{smallmatrix}\right)$ en la base canónica ortonormal $\mathcal{B}^{(0)} = \{e_1, e_2\}$. Encuentre los elementos de matriz de $\mathbf{A}^\dagger$ en esa base y respecto a la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_1 + e_2\}$.

Ej. 2 — Dado el operador $\mathbf{P} = -i\partial_x$, que actua sobre el espacio de funciones $\mathcal{F} = \{f/f \in \mathcal{C}^\infty[-1,1] \wedge f(-1) = f(1)\}$, calcule $\mathbf{P}^\dagger$ respecto al producto escalar $(f,g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$. ¿Es autoadjunto?.

Ej. 3 — Determine si las siguientes formas satisfacen los axiomas de un producto escalar en un espacio complejo:

a) En $\mathbb{C}^2$, $((\xi_1,\xi_2),(\eta_1,\eta_2)) = \overline{\eta_1}\xi_1 + (1-i)\overline{\eta_1}\xi_2 + (1+i)\overline{\eta_2}\xi_1 + 3\overline{\eta_2}\xi_2$

b) En $\mathbb{C}^{n\times n}$, $(A,B) = \mathrm{tr}[A^\dagger B] = \mathrm{tr}[BA^\dagger]$. Verifique que las matrices de Pauli son ortogonales con dicho producto. ¿Son ortonormales?

Ej. 4 — Encuentre una base ortogonal y una ortonormal (con el producto interno usual en $\mathbb{C}^3$) para el subespacio S generado por $(1,i,1)$ y $(1+i,0,2)$. Determine $S^\perp$ y encuentre las proyecciones de $(1,1,1)$ sobre S y $S^\perp$.

Ej. 5 — Considere el espacio vectorial $\mathbb{C}[-\pi,\pi]$ de las funciones continuas en el intervalo $[-\pi,\pi]$, equipado con el producto interno definido por $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$.

a) Verifique que (f,g) es un producto interno.

b) Calcule $(1+\exp(it), e^{it})$ y verifique la desigualdad de Schwarz.

c) Muestre que las funciones $\exp(ikt)$, con k entero son ortogonales con este producto. ¿Son ortonormales?

d) Considere ahora el subespacio definido por las funciones $\mathcal{H} = \{\psi \in \mathbb{C}[-\pi,\pi], \psi \in \mathcal{C}^\infty([-\pi,\pi]) \wedge \psi(-\pi) = \psi(\pi) = 0\}$ (funciones derivables a todo orden que se anulan en los bordes). Sea $\psi \in \mathcal{H}$ una función tal que $(\psi,\psi) = 1$. Definimos (para un dado ψ) el valor medio de un operador $\mathbf{A} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ como $\langle A\rangle_\psi = (\psi, A\psi)$. Usando la desigualdad de Schwarz, muestre que para los operadores $\mathbf{X}$ y ∂_x (definidos en la práctica 5) se satisface que $|\langle X^2\rangle||\langle \partial_x^2\rangle| \geq \frac{1}{4}$.

Ej. 6 — Matrices cíclicas. Considere una matriz $A \in \mathbb{C}^{d\times d}$ tal que $A_n^m = f(n-m)$ con $f(n+d) = f(n)$ (cada fila es igual a la fila anterior desplazada cíclicamente una posición a la derecha). Muestre que la matriz es diagonal en la base definida en el Ej. 15 de la práctica 3, y que los autovalores vienen dados por

$$\lambda_k = \sum_{n=1}^{d} f(n)\exp(2\pi\mathbf{i}k\,n/d)$$

(esto es, los autovalores son la "transformada de Fourier discreta" de la última fila). Muestre que la base

Fourier es una base ortonormal. Luego diagonalice las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 7 — Determine los valores posibles de α para que la matriz $A(\alpha) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & i \\ \alpha & -1 \end{smallmatrix}\right)$ represente, en la base canónica de $\mathbb{C}^2$

a)Un operador normal

b)Un operador autoadjunto

c)En ambos casos, encontrar los correspondientes autovalores y bases ortonormales que diagonalizan $A(\alpha)$

Ej. 8 — *Matrices unitarias como exponenciales de matrices hermíticas*:

a)Muestre que si H es una matriz hermítica, $U = \exp(i\,t\,H)$ es una matriz unitaria para todo valor real de t.

b)Demuestre que si $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria, existe una familia de matrices hermíticas $\{H_k\}$ que satisfacen $U = \exp(i\,t\,H_k)$. ¿Cómo se relacionan las H_k entre sí?

c)Opcional: Muestre que para $A, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$, con H una matriz hermítica, $\exp(i\,H)A\exp(-i\,H) = A + i\,[H,A] - \frac{1}{2}[H,[H,A]] + \ldots = \exp(i[H,\cdot])A$. (Observe que $[H,\cdot]A = H.A - A.H$ es un operador lineal sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$)

Ej. 9 — Muestre que las siguientes matrices son unitarias y encuentre sus autovalores y un conjunto de autovectores normalizados

$$P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad U_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad U_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\pi/3} \end{pmatrix}$$

Ej. 10 — Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a)Evalue $\max_{x\in\mathbb{R}^5} |A\,x|/|x|$.

b)Encuentre la descomposición en valores singulares de A.

c)Construya la correspondiente matriz de pseudoinversa de Moore - Penrose.

d)Dado el vector $b = (0,1,1)^t$ encuentre el vector $x \in \mathbb{R}^5$ que minimize $||A.x - b||$.

e)Dado el vector $b = (0,1,-1)^t$ encuentre el vector $x \in \mathbb{R}^5$ de norma mínima que satisfaga $A.x = b$

f)Calcule $\tilde{\mathbf{A}} = \sigma v \cdot w^{\mathrm{t}}$ tal que $\mathrm{Tr}|(\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}})|^2$ tome su menor valor posible. Note que la matriz original requería para ser representada 11 entradas no nulas, mientras que $\tilde{\mathbf{A}}$ requiere sólo seis.

Opcionales

Ej. 11 — Encuentre los autovalores y una base ortonormal de autovectores de las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ej. 12 — *Número de condición.*

a)Calcule el número de condición de la matriz

$$H = \begin{pmatrix} 120 & 60 & 40 \\ 60 & 40 & 30 \\ 40 & 30 & 24 \end{pmatrix}.$$

b)Encuentre el vector x_0 que satisface la ecuación $H.x_0 = b_0$ con $b_0 = (0,1,0)^t$.

c)Sea ahora un vector genérico $b = b_0 + \Delta b$ y $x(b)$ la solución de la ecuación matricial $H.x(b) = b$. De una cota para $|x - x_0|/|\Delta b|$ en términos del número de condición de H.

Ej. 13 — Descomposición polar:

a)Muestre que para cualquier matriz invertible A, la matriz $P = \sqrt{A^\dagger A}$ es no singular y que $U = A\,P^{-1}$ es una matriz unitaria.

b)Construya la descomposición polar de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 2i & -3 \end{pmatrix}$$

Ej. 14 — *Descomposicion QR*: Partiendo de la existencia del método de Gramm Schmidt, muestre que toda matriz real $M \in \mathbb{R}^{m\times n}$ puede escribirse como $M = Q\,R$ con $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ una matriz ortogonal y R una matriz triangular superior. Esta descomposición es conocida como "descomposición QR". Encuentre la descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Ej. 15 — Considere una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

a)Muestre que por medio de m reflexiones de Householder sucesivas, es posible encontrar $\mathbf{Q}$ y $\mathbf{R}$ tales que $\mathbf{Q}$ es la matriz ortogonal $\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{u_n} \ldots \mathbf{P}_{u_1}$ y $\mathbf{R}$ una matriz triangular superior.

b)Luego observe que las columnas de $\mathbf{Q}$ expanden una base ortonormal que genera el mismo espacio que las columnas de $\mathbf{A}$. Este método es en general más rápido y más estable que el método de Gram Schmidt para ortogonalizar una base en forma numérica.

Ej. 16 — Método de la potencia:

a)Muestre que si v_0 tiene proyección no nula sobre el subespacio de autovalor máximo de un operador $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, la sucesión $v_{k+1} = \mathbf{A}v_k/|v_k|$ converge exponencialmente a un autovector con autovalor máximo.

b)Muestre que si $\mathbf{A}$ es simétrica, la sucesión de matrices ortogonales Q_k, donde Q_{k+1} se obtiene de reordenar las filas de $M_k = \mathbf{A}Q_k$ de mayor a menor según sus módulos, y una posterior ortonormalización según ese orden, tiene como límite a una matriz Q que diagonaliza $\mathbf{A}$.

c)Muestre que si $\mathbf{B}_\lambda = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{1})^{-1}$, la sucesión $v_{k+1} = \mathbf{B}_\lambda v_k/|v_k|$ convergerá un vector en el subespacio propio de autovalor más cercano a λ, tal que v_0 tenga proyección no nula sobre ese subespacio.