Práctica 7 - Espacios Euclideos

Departamento de Física - UNLP

Ej. 1 — Muestre que las siguientes formas bilineales satisfacen los axiomas de un producto escalar euclídeo:

a)$((\eta_1, \eta_2), (\xi_1, \xi_2)) = \eta_1\xi_1 - \eta_2\xi_1 - \eta_1\xi_2 + 4\eta_2\xi_2$ en $\mathbb{R}^2$

b)$(K, H) = \text{tr}(K^{\text{t}}H)$ en $\mathbb{R}^{n\times m}$

c)Usando el producto escalar definido en el inciso anterior, y dadas $A = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$ y $C = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$, encuentre (A, B), $(2\,A + 3\,B, C)$, la distancia entre A y B, $||A||$, $||B||$ y $||C||$ y los "ángulos" que forman entre sí. Calcule las matrices normalizadas.

Ej. 2 — Determine la estabilidad de la forma cuadrática $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $\omega(x) = x^t.A.x$ con $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. Encuentre las direcciones de máxima y mínima variación.

Ej. 3 — Dada la ecuación de autovalores generalizados $A\,x_\lambda = \lambda\,B\,x_\lambda$ con

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad\qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a)Encuentre los correspondientes autovectores y autovalores generalizados

b)Muestre que los autovectores generalizados son ortogonales respecto al producto escalar definido por $(x, y)_B = x^t\,B\,y$

Ej. 4 — Calcule el coseno del ángulo que forman :

a)$u = (1, -3, 2)$ y $v = (2, 1, 5)$ en $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual.

b)$f(t) = 2\,t - 1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_0^1 f(t)g(t)dt$

c)$f(t) = t - 1$ y $g(t) = t^2$ en $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$, con el producto escalar $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\exp(-t^2)dt$

d)Determine el ángulo entre los vectores $v_1 = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ y $v_2 = (-1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$ en función de n.

Ej. 5 — Sea $\mathcal{S} = \text{span}(\{(1, 0, 1, 1, 1), (2, 3, 1, 1, 1), (4, 5, 7, 1, 1), (7, 8, 10, 11, 1)\})$ un subespacio de $\mathbb{R}^5$. Usando el método de Gramm-Schmidt, encuentre una base ortonormal que genere el mismo subespacio.

Ej. 6 — Sean $v_1 = (1, 0, 2, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, -1, 1, 1)$ y $v_3 = (0, 0, 0, 0, 1)$ tres vectores en $\mathbb{R}^5$. Construya la matriz de Gramm asociada a estos vectores. Luego calcule el hipervolumen del paralelepípedo generado por esos vectores y encuentre una base ortogonal de $\text{span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

Ej. 7 — Demuestre que en dimensión finita, la matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales es una matriz ortogonal ($[\mathbf{1}]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = ([\mathbf{1}]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}})^{\text{t}}$)

Ej. 8 — Sean $v_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $v_2 = (1, -2, 3, -2, -1)$ dos vectores en $\mathbb{R}^5$. Dado el subespacio $S = \text{span}\{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^5$, encuentre los operadores de proyección ortogonal sobre S y sobre su complemento ortogonal $S^\perp$. Encuentre la distancia mínima entre S y el vector $v_3 = (1, 0, 0, 0, 0)$.

Ej. 9 — Demuestre que $\{1\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\cos(nx), \sin(nx)\}$ es un conjunto de funciones mutuamente ortogonales respecto del producto $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Ej. 10 — *Polinomios ortogonales*:

a)Sea $\mathbb{P}_3[\mathbb{R}]$ con el producto escalar $(p, q) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t)p(t)\exp(-t^2)dt$. Aplique el método de Gram-Schmidt a la base $1, t, t^2, t^3$ para obtener una base ortonormal $\mathcal{B} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$.

b)Repita el procedimiento, pero ahora con el producto definido por

$$(p, q) = \int_{-1}^{1} q(t)p(t)dt\,.$$

Los polinomios que forman esta base se conocen como "Polinomios de Legendre".

c)Repita una vez más el procedimiento, pero ahora con el producto definido por

$$(p,q)=\int_{-1}^{1} q(t)p(t)(1-t^2)^{-1/2}dt\,.$$

Los polinomios que forman esta base se conocen como “Polinomios de Chebyshev”. Note que satisfacen la relación $T_n(\cos(x))=\frac{1}{\sqrt{\pi/2}}\cos(n\,x)$ para $n>0$

Opcionales

Ej. 11 — Transformaciones de Householder:

1.Muestre que si u es un vector unitario $|u|=1$, $\mathbf{P}_u=\mathbf{1}-2uu^{\mathrm{t}}$ es un operador “reflexión” respecto al hiperplano ortogonal a u, y que es un operador ortogonal ($\mathbf{P}_u^{\mathrm{t}}\mathbf{P}_u=\mathbf{1}$). Estas transformaciones son conocidas como “reflexiones de Householder”.

2.Dado un vector v no necesariamente normalizado, encuentre un vector unitario u / $\mathbf{P}_u\,v=e_1$, el primer elemento de la base canónica.

3.Utilize el resultado anterior para encontrar una secuencia finita de operadores $\mathbf{P}_{u_i}$ que lleven una matriz arbitraria $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ a la llamada “forma de Hessemberg”: $A'=P_{u_n}\dots P_{u_1}A$ tal que $A'_{ij}=0\forall i>j+1$.

4.Muestre además que si $A=A^{\mathrm{t}}$, A resulta ser una matriz tridiagonal simétrica.

Ej. 12 — *Espacios de Krylov.* Sea $v\in\mathbb{R}^n$ y $\mathbf{H}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simetrica. Considere las bases $B'_k=\{w_1,\dots w_k\}$, con $w_m=\mathbf{H}^{m-1}v$ y subespacios $\mathbb{K}_k=\mathrm{span}(B'_k)$.

a)Observe que que la sucesión de subespacios $\mathbb{K}_1\subset\ldots\subset\mathbb{K}_k\subset\ldots\subset\mathbb{K}_n\subset\mathbb{R}^n$ definidos por las bases, o bien convergen a un subespacio invariante de $\mathbf{H}$ para algún $k<n$ o bien $\mathbb{K}_n=\mathbb{R}^n$.

b)Muestre que mediante ortonormalización de Gram-Schmidt existe una matriz de cambio de base L_{lm} que vincula cada base B'_k con una base ortonormal $B_k=v_0,\dots,v_k$ de manera que $B_k\subset B_{k+1}$. Muestre que tal matriz de cambio de base tiene que ser triangular superior y que además, dada la sucesión $B_1\subset\ldots\subset B'_k$, la sucesión de bases B_k queda determinada a menos de una fase (±1) en cada vector.

c)Partiendo de la observación de que $w_i^{\mathrm{t}}\mathbf{H}w_j=W_{i,j+1}$, muestre que $\tilde{\mathbf{H}}^{(k)}_{ij}=v_i^{\mathrm{t}}\mathbf{H}v_j$ tiene que ser una matriz simétrica tridiagonal. Observe que si relajamos la condición de simetría de $\mathbf{H}$ los elementos de matriz $\tilde{\mathbf{H}}^{(k)}_{ij}=0$ para $i>j+1$.

Ej. 13 — *Polinomios ortogonales y espacios de Krylov.*

1.Muestre que $\mathbb{P}_n[\mathbb{R}]$, los subespacios de polinomios hasta grado n forman una sucesión de espacios de Krylov respecto al operador $\mathbf{X}:\mathbb{P}[\mathbb{R}]\to\mathbb{P}[\mathbb{R}]$ definido por $(\mathbf{X}p)(x)=xp(x)$.

2.Muestre que el operador $\mathbf{X}$ es un operador simétrico respecto de cualquier producto escalar sobre $\mathbb{P}[\mathbb{R}]$ de la forma $(p,q)=\int_a^b p(x)q(x)\rho(x)dx$ con $\rho:[a,b]\to\mathbb{R}_+$.

3.Usando el resultado del problema **??** y de los incisos anteriores, muestre que cualquier conjunto de polinomios ortogonales satisface una relación de recurrencia de la forma $p_{n+1}(x)=x\,a_np_n(x)+b_np_{n-1}$.

Ej. 14 — *Aproximación a la Solución de una ecuación lineal usando espacios de Krylov* Partiendo de la idea de los espacios de Krylov, proponga un algoritmo de aproximaciones sucesivas para encontrar una solución al problema lineal $Ax=b$, y un criterio de convergencia. Tip: Observe que a partir del teorema de Cayley Hamilton, la inversa toda matriz no singular de dimensión d puede expandirse como un polinomio en A de grado $d-1$.